объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-94-385

Н.А.Черников

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ

Направлено в журнал «Гравитация и космология»

1994

1. Расшифровка двух терминов

При всех достоинствах теории тяготения Эйнштейна в ней находят недостатки. Самый известный недостаток видят в том, что плотность энергии в теории Эйнштейна зависит от выбора координат. Очевидно, это противоречит общему принципу относительности, согласно которому законы природы надо представлять в виде, независимом от выбора координат, однако хочу сразу сказать, что не считаю полезным делом выступать ни против теории относительности, ни против теории тяготения Эйнштейна. Более того, принимая обе теории за основу, стараюсь дополнить их и развить. Ведь в указанном выше противоречии проявляются не одни только теоретические трудности, но повинен и большой разнобой в терминологии, получившийся в результате многочисленных дискуссий по вопросам теорий относительности и тяготения [1], что говорит о необходимости создания специального толкового словаря [2].

В кругу вопросов теорий относительности и гравитации путеводной звездой для меня являлась и является геометрия Лобачевского. В качестве путеводной ее я выбрал потому, что изучил геометрию Лобачевского раньше, чем теорию относительности. При изучении же теории относительности заметил, что повторяю пройденное. Так оно и было: ведь в пространстве скоростей постулаты Евклида все, кроме одного, непременно реализуются. Остается только — применительно к пространству скоростей — принять или не принять еще один постулат, а именно постулат Евклида о параллельных. Если его принимаем, то пространство скоростей становится пространством Евклида, а не принимаем — пространством Лобачевского. Группой изометрий пространства скоростей Евклида является группа Галилея — группой изометрий пространства Лобачевского является группа Лоренца. В этом суть теории относительности.

Надо признать, что установилась довольно нелепая привычка называть физическую теорию релятивистской в случае Лоренца и нерелятивистской в случае Галилея, хотя в обоих случаях мы имеем дело с той или другой формой теории относительности.

Следовательно, термины "релятивистский" и "нерелятивистский" приходится считать чисто условными. Поэтому надо, если не отказываться от них вовсе, то хотя бы договориться, какой придавать им точный смысл. Так будем считать, что "релятивистский" означает, что в пространстве скоростей реализуется геометрия Лобачевского, а "нерелятивистский" означает, что в пространстве скоростей реализуется геометрия Евклида [3].

2. Конструктивное определение пространства скоростей

Понятие пространства скоростей является производным от основного понятия пространства–времени, представляемого в виде гладкого четырехмерного многообразия **M**. Движение материальной точки (которую удобней называть здесь частицей) представляется гладкой кривой линией в **M**, называемой мировой траекторией частицы. Скоростью частицы называем прямую, касательную к мировой траектории частицы [4]. Подчеркнем, что в отличие от мировой траектории касательная к ней прямая расположена не в самом многообразии **M**, а в касательном к **M** пространстве **A**. Касательное же пространство **A** является четырехмерным аффинным пространством с центром в точке касания, а точка касания (обозначим ее через **x**) принадлежит как многообразию **M**, так и пространству **A**. Множество всех прямых в **A**, проходящих через точку **x**, является трехмерным проективным пространством **P**. Если в некоторой карте многообразия **M** точка **x** задается координатами x^1, x^2, x^3, x^4, то точка проективного пространства **P** задается однородными координатами dx^1, dx^2, dx^3, dx^4. Так вот, пространство скоростей в точке **x** является открытой областью **V** в проективном пространстве **P**.

В нерелятивистском случае область **V** получается путем удаления из **P** одной проективной плоскости, которую обозначим $\mathbf{P}_\infty$, так что

$$\mathbf{V} \bigcup \mathbf{P}_\infty = \mathbf{P}.$$

Плоскость $\mathbf{P}_\infty$ назовем плоскостью скоростей тахионов в нерелятивистском случае. Чтобы задать эту плоскость аналитически, нужно ввести в $\mathbf{M}$ ковектор времени θ_a. Плоскость $\mathbf{P}_\infty$ задается уравнением

$$\theta_a d\boldsymbol{x}^a = 0. \tag{1}$$

При этом пространство скоростей оказывается трехмерным аффинным пространством, а чтобы превратить его в евклидово пространство, надо еще задать в $\mathbf{M}$ кометрический тензор g^{ab} нормального параболического типа, связанный с ковектором θ_a условием ортогональности

$$\theta_a g^{ab} = 0. \tag{2}$$

В соответствии с вышесказанным в нерелятивистском случае область $\mathbf{V}$ задается неравенством

$$\theta_a d\boldsymbol{x}^a \neq 0. \tag{3}$$

В релятивистском случае область $\mathbf{V}$ ограничена поверхностью $\mathbf{S}$ второго порядка. Как и в нерелятивистском случае, эта область простая. Поверхность $\mathbf{S}$ можно назвать поверхностью световых скоростей. Она является конформной плоскостью. Внешнюю по отношению к $\mathbf{S}$ область назовем пространством скоростей тахионов в релятивистском случае и обозначим $\mathbf{V}_\infty$. Таким образом, в релятивистском случае

$$\mathbf{P} = \mathbf{V} \bigcup \mathbf{S} \bigcup \mathbf{V}_\infty.$$

Чтобы задать поверхность $\mathbf{S}$ аналитически, нужно ввести в $\mathbf{M}$ метрический тензор g_{ab} нормального гиперболического вида. Поверхность $\mathbf{S}$ задается уравнением

$$g_{ab} d\boldsymbol{x}^a d\boldsymbol{x}^b = 0. \tag{4}$$

В окрестности точки $\mathbf{x}$ многообразия $\mathbf{M}$ найдется такая четверка линейных дифференциальных форм

$$X = X_a d\boldsymbol{x}^a, \quad Y = Y_a d\boldsymbol{x}^a, \quad Z = Z_a d\boldsymbol{x}^a, \quad T = T_a d\boldsymbol{x}^a, \tag{5}$$

что
$$g_{ab}dx^a dx^b = XX + YY + ZZ - c^2TT, \tag{6}$$
где через c обозначена скорость света, совпадающая с константой, характерной для геометрии Лобачевского. Наряду с метрическим удобно ввести тензор времени θ_{ab}, равный
$$\theta_{ab} = -c^{-2} g_{ab}. \tag{7}$$
Расстояние s в пространстве скоростей $\mathbf{V}$ между точками с неоднородными координатами dx^a и δx^a определяется по правилу Кэли
$$\mathrm{ch}\frac{s}{c} = \frac{\theta_{ab}dx^a\delta x^b}{\sqrt{[\theta_{ab}dx^a dx^b][\theta_{ab}\delta x^a \delta x^b]}} \quad . \tag{8}$$

В незримом мире скоростей расстояние s измеряется не в см, а в см/сек и называется быстротой. Относительная скорость v частиц, встретившихся в точке $\mathbf{x}$ с безотносительными скоростями dx^a и δx^a, равна
$$v = c \quad \mathrm{th}\frac{s}{c} \quad . \tag{9}$$
Область $\mathbf{V}$ задается условием
$$\theta_{ab}dx^a dx^b > 0, \tag{10}$$
а область $\mathbf{V}_\infty$ — противоположным условием
$$\theta_{ab}dx^a dx^b < 0. \tag{11}$$

Итак, релятивистская теория, как мы видели, характеризуется метрическим тензорным полем g_{ab}, приводящимся в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ к виду (6). В нерелятивистской теории тензор g^{ab} вырожден, и поэтому обратного поля g_{ab} в ней нет, но есть тензор времени
$$\theta_{ab} = \theta_a \theta_b. \tag{12}$$
В отличие от (12) тензор времени (7) не факторизуется.

В соответствии с предложенной расшифровкой двух терминов теория тяготения Ньютона является нерелятивистской, а теория тяготения Эйнштейна — релятивистской. К этому вопросу мы еще вернемся.

Если считать, что $\mathbf{M}$ является аффинным пространством, то на всем многообразии $\mathbf{M}$ можно положить

$$X = dx^1, \quad Y = dx^2, \quad Z = dx^3, \quad T = dx^4. \tag{13}$$

Отсюда легко получается конструкция Котельникова [5].

3. Координаты Бельтрами и 4–скорость частицы

В области $\mathbf{V}$, представляющей пространство скоростей Лобачевского и задаваемой в неоднородных координатах dx^a неравенством (10), отношения

$$v^1 = \frac{X}{T}, \quad v^2 = \frac{Y}{T}, \quad v^3 = \frac{Z}{T} \tag{14}$$

называются координатами Бельтрами. Они совпадают с компонентами трехмерной скорости частицы. Их сумма квадратов меньше квадрата скорости света c. Отношения

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{cX}{\sqrt{c^2T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2}}, \\ \eta &= \frac{cY}{\sqrt{c^2T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2}}, \\ \zeta &= \frac{cZ}{\sqrt{c^2T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2}}, \\ u &= \frac{cT}{\sqrt{c^2T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2}} \end{aligned} \tag{15}$$

составляют 4–скорость частицы. Значения компонент ξ, η и ζ ничем не ограничены. Компонента u не может быть меньше единицы, так как

$$cu = \sqrt{c^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \tag{16}$$

Из последней формулы следует, что пространство скоростей Лобачевского можно представить в виде одной полы гиперболоида в касательном пространстве **A**.

Компоненты ξ, η и ζ можно выбрать в качестве координат в пространстве скоростей. Из (8), (15) и (16) следует, что в этих координатах метрическая форма пространства скоростей равна

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - \frac{(\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta)^2}{c^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \tag{17}$$

Ее можно рассматривать как первую квадратичную форму поверхности (16) в пространстве **A**, так как через дифференциал функции (16) ее можно представить в виде

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - c^2 du^2. \tag{18}$$

В нерелятивистском пределе $c \to \infty$ пространство скоростей становится евклидовым, координаты Бельтрами становятся декартовыми, а компоненты 4-скорости частицы становятся равными

$$\xi = v^1, \quad \eta = v^2, \quad \zeta = v^3, \quad u = 1. \tag{19}$$

Следовательно, пространство скоростей Евклида можно представить в виде плоскости в касательном пространстве **A**.

4. Свободное движение частицы. Фоновая связность

Рассмотрение уравнений свободного движения частицы приводит к понятию фоновой связности. Говоря о свободном движении, мы имеем в виду, что на частицу никакие внешние силы не действуют, а так как внешнее гравитационное поле действует на все тела, то свободное движение возможно только в отсутствие гравитационного поля. При наличии же гравитационного поля частица не может двигаться свободно, но может падать свободно, если нет негравитационных сил. До сих пор на топологию многобразия **M** никаких ограничений не накладывалось, но дальше будем считать, что **M** является прямым произведением трехмерного многообразия на ось времени и в качестве координаты x^4 будем неизменно выбирать время t. Начнем с нерелятивистского случая. Ковектор времени θ_a имеет следующие компоненты:

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = 0, \quad \theta_4 = 1. \tag{20}$$

В силу условия (2) следующие компонеты кометрического тензора g^{ab} равны нулю:

$$g^{14} = g^{41} = 0, \quad g^{24} = g^{42} = 0, \quad g^{34} = g^{43} = 0, \quad g^{44} = 0. \tag{21}$$

Поэтому можно ввести компоненты $h_{\alpha\beta}$, удовлетворяющие условию

$$h_{\alpha\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta^{\nu}_{\alpha} \,. \tag{22}$$

Здесь и дальше греческие индексы принимают значения от 1 до 3. Квадратичная форма

$$h_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \tag{23}$$

положительно определённа и на поверхности

$$t = const \tag{24}$$

в M задает трехмерную риманову геометрию. Будем считать, что компоненты $h_{\alpha\beta}$ не зависят от времени t. Это не помешает нам рассмотреть две теории: Ньютона и Лобачевского. Теория Ньютона хорошо известна, теория Лобачевского изложена в [6]. Свободное движение частицы задается функцией Лагранжа, равной

$$L_0 = \frac{1}{2} v^2, \tag{25}$$

в нерелятивистском случае, где

$$v^2 = h_{\alpha\beta} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}, \tag{26}$$

и равной

$$L_c = c^2 - c\sqrt{c^2 - v^2} \tag{27}$$

в релятивистском случае. Замечательно, что в обоих случаях уравнения Лагранжа приводятся к одним и тем же уравнениям геодезических в $\mathbf{M}$, а именно:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\right\} \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = 0, \quad \frac{d^2x^4}{dt^2} = 0, \tag{28}$$

где $\left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\right\}$ — скобки Кристоффеля тензора $h_{\mu\nu}$ [7]. В данном случае

$$\left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\right\} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}). \tag{29}$$

Уравнения геодезических (28) задают на многообразии $\mathbf{M}$ аффинную связность $\breve{\Gamma}$ без кручения. В рассматриваемой карте ее компоненты равны

$$\breve{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\right\}, \quad \breve{\Gamma}^\alpha_{\mu 4} = 0, \quad \breve{\Gamma}^\alpha_{4\nu} = 0, \quad \breve{\Gamma}^\alpha_{44} = 0, \quad \breve{\Gamma}^4_{mn} = 0. \tag{30}$$

Эту связность мы выбираем в качестве фоновой. Подчеркнем, что она не зависит от скорости света c. Заметим, что выбор функции Лагранжа (27) соответствует заданию на многообразии $\mathbf{M}$ метрики

$$g_{ab}dx^a dx^b = h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta - c^2 dt^2. \tag{31}$$

О необходимости введения фоновой связности см. [8]–[9].

С каждой связностью Γ мы сопрягаем тензор кривизны

$$R_{mnb}{}^{a} = \partial_m \Gamma^a_{nb} - \partial_n \Gamma^a_{mb} + \Gamma^a_{ms}\Gamma^s_{nb} - \Gamma^a_{ns}\Gamma^s_{mb} \tag{32}$$

и свернутый тензор кривизны

$$R_{mn} = R_{smn}{}^{s}. \tag{33}$$

В соответстствии с (30) пространственные компоненты тензора фоновой кривизны равны

$$\breve{R}_{\mu\nu\beta}{}^{\alpha} = \left\{{}^{\ \ \ \alpha}_{\mu\nu\beta}\right\}, \tag{34}$$

а остальные его компоненты равны нулю. Тензор $\left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu\beta}\right\}$ построен из связности $\left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\right\}$ так же, как тензор (32) из связности Г. Свернутый тензор фоновой кривизны симметричен:

$$\check{R}_{\mu\nu} = \left\{{}_{\sigma}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu}\right\}, \quad \check{R}_{44} = 0, \quad \check{R}_{\mu 4} = 0, \quad \check{R}_{4\nu} = 0. \tag{35}$$

Во времена Ньютона неевклидовы геометрии были неизвестны. Поэтому в теории тяготения Ньютона форма (23) задает геометрию Евклида и, следовательно, приводится к сумме квадратов. В теории тяготения Лобачевского форма (23) приводится к виду

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - \frac{(x dx + y dy + z dz)^2}{k^2 + x^2 + y^2 + z^2}. \tag{36}$$

Соответственно, элемент объема равен

$$dV = \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{1 + \frac{x^2+y^2+z^2}{k^2}}}.$$

В этих теориях многобразие $\mathbf{M}$ простое. В формуле (36) k — константа Лобачевского. В отличие от скорости света c, входящей в аналогичную формулу (17), она измеряется в единицах длины.

В фоновой связности информация о фоновой метрике в случае Ньютона исчезает, ибо в этом случае

$$\left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu\beta}\right\} = 0, \quad \Rightarrow \check{R}_{m}{}^{a}{}_{nb} = 0. \tag{37}$$

В случае же Лобачевского информация о фоновой метрике в фоновой связности частично сохраняется, поскольку в этом случае

$$\left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu\beta}\right\} = (h_{\mu\beta}\delta^{\alpha}_{\nu} - h_{\nu\beta}\delta^{\alpha}_{\mu})k^{-2}. \tag{38}$$

Соответственно свернутый тензор кривизны фоновой связности в случае Лобачевского задается компонентами

$$\check{R}_{\mu\nu} = -2k^{-2}h_{\mu\nu}, \quad \check{R}_{44} = 0, \quad \check{R}_{\mu 4} = 0, \quad \check{R}_{4\nu} = 0. \tag{39}$$

5. Нерелятивистское свободное падение частицы. Гравитационный потенциал

Согласно Ньютону гравитационное поле в нерелятивистском случае описывается потенциалом U, не влияющим ни на ковектор θ_a, ни на тензор h^{ab}. Свободное падение частицы задается функцией Лагранжа

$$L_U = \frac{1}{2}v^2 - U. \tag{40}$$

В этом случае уравнения Лагранжа приводятся к следующим уравнениям геодезических в $\mathbf{M}$:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\right\}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} + U^\alpha\frac{dx^4}{dt}\frac{dx^4}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2x^4}{dt^2} = 0, \tag{41}$$

где

$$U^\alpha = g^{\alpha\mu}\partial_\mu U. \tag{42}$$

Уравнения (41) задают на многообразии $\mathbf{M}$ аффинную связность Γ без кручения, компоненты которой в рассматриваемой карте равны

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\right\}, \quad \Gamma^\alpha_{\mu4} = 0, \quad \Gamma^\alpha_{4\nu} = 0, \quad \Gamma^\alpha_{44} = U^\alpha, \quad \Gamma^4_{mn} = 0. \tag{43}$$

В отличие от фоновой связности (30), связность (43) будем называть полевой. Тензор аффинной деформации равен

$$P^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn} = -\theta_m\theta_n g^{as}\partial_s U. \tag{44}$$

В соответствии с (43) тензор полевой кривизны имеет следующие компоненты:

$$R_{\mu\nu\beta}^{\ \ \ \ \alpha} = \left\{{}_{\mu\nu\beta}^{\ \ \alpha}\right\}, \quad R_{\mu4\beta}^{\ \ \ \ \alpha} = 0, \quad R_{\mu\nu4}^{\ \ \ \ \alpha} = 0,$$

$$R_{\mu44}^{\ \ \ \ \alpha} = \partial_\mu U^\alpha + \left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\right\}U^\nu, \quad R_{mnb}^{\ \ \ \ 4} = 0. \tag{45}$$

Как видно, компоненты $R_{\mu44}^{\ \ \ \ \alpha}$ составляют ковариантную производную от вектора U^α в пространстве с метрикой (23).

Свернутый тензор полевой кривизны симметричен:

$$R_{\mu\nu} = \{{}_{\sigma}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu}\}, \quad R_{44} = \Delta U, \quad R_{\mu 4} = 0, \quad R_{4\nu} = 0. \tag{46}$$

Здесь

$$\Delta U = g^{\mu\nu}(\partial_\mu \partial_\nu - \{{}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\}\partial_\sigma)U, \tag{47}$$

то есть Δ — оператор Лапласа в пространстве с метрикой (23), а ΔU — второй дифференциальный параметр Бельтрами.

Вычитая (35) из (46), находим

$$R_{mn} - \check{R}_{mn} = \theta_m \theta_n \Delta U. \tag{48}$$

Следовательно, уравнение Лапласа

$$\Delta U = 0 \tag{49}$$

в пространстве с метрикой (23) эквивалентно уравнению

$$R_{mn} = \check{R}_{mn}. \tag{50}$$

Так как в нерелятивистском случае тензор массы равен

$$M_{mn} = \theta_m \theta_n \rho, \tag{51}$$

где ρ — плотность массы, то уравнение Пуассона

$$\Delta U = 4\pi\gamma\rho \tag{52}$$

в пространстве с метрикой (23) эквивалентно уравнению

$$R_{mn} - \check{R}_{mn} = 4\pi\gamma M_{mn}. \tag{53}$$

Здесь и дальше γ — гравитационная константа Ньютона. В теории тяготения Ньютона, если форма (23) приведена к сумме квадратов

$$dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

гравитационный потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta U = 4\pi\gamma m\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{54}$$

и стремящийся к нулю на бесконечности, равен, как известно,

$$U = -\frac{\gamma m}{r}, \tag{55}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{56}$$

В теории тяготения Лобачевского, если форма (23) приведена к виду (36), гравитационный потенциал, удовлетворяющий уравнению (54) и стремящийся к нулю на бесконечности, равен

$$u = \frac{\gamma m}{k}(1 - \operatorname{cth}\frac{\rho}{k}), \tag{57}$$

причем

$$\operatorname{sh}\frac{\rho}{k} = \frac{r}{k}, \tag{58}$$

где ρ — расстояние до центра, r равняется (56).

В пространстве Лобачевского площадь сферы радиуса ρ равна $4\pi r^2$, а сила, с которой точечная масса m притягивает пробную частицу, удаленную на расстояние ρ, равна массе пробной частицы, умноженной на производную

$$\frac{dU}{d\rho} = \gamma m r^{-2}. \tag{59}$$

Следовательно, сила притяжения обратно пропорциональна площади сферы. На эту зависимость обратил внимание Лобачевский [10, с. 159]. Законы Кеплера в пространстве Лобачевского рассмотрены в [6] и [11].

6. Релятивистское свободное падение частицы. Полевая метрика

В нерелятивистском случае гравитационное поле не влияет ни на фоновую связность, ни на метрику в $\mathbf{M}$. В релятивистском случае гравитационное поле на фоновую связность тоже не влияет, но на метрику в $\mathbf{M}$ влияет, причем настолько сильно, что метрика (6) отождествляется с полевой метрикой. Полевая связность в релятивистском случае равна скобкам Кристоффеля

$$\Gamma^{a}_{mn} = \frac{1}{2} g^{as} (\partial_m g_{sn} + \partial_n g_{sm} - \partial_s g_{mn}) \tag{60}$$

полевого тензора g_{ab}. В области, где тензор массы равен нулю, полевая связность подчиняется уравнениям (50). В случае $\check{R}_{mn} = 0$ одним из решений уравнений (50), то есть в данном случае уравнений Эйнштейна

$$R_{mn} = 0, \tag{61}$$

является нерелятивистская полевая связность (43) с потенциалом (55). Другим решением этих уравнений является релятивистская полевая связность (60) с полевой метрикой Шварцшильда. В случае (39) одним из решений уравнений (50), то есть в данном случае уравнений

$$R_{\mu\nu} = -2k^{-1} h_{\mu\nu}, \quad R_{44} = 0, \quad R_{\mu 4} = 0, \quad R_{4\nu} = 0, \tag{62}$$

является нерелятивистская полевая связность (43) с потенциалом (57). Другим решением этих уравнений является (см. [9]) релятивистская полевая связность (60) с полевой метрикой

$$\mathrm{e}^{-2\alpha} k^2 \left\{ \Xi^{-1} d\xi^2 + \mathrm{sh}^2(\xi + \alpha) d\Omega^2 \right\} - \mathrm{e}^{2\alpha} c^2 \Xi dt^2, \tag{63}$$

где

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2,$$

$$\Xi = \frac{\mathrm{sh}(\xi - \alpha)}{\mathrm{sh}(\xi + \alpha)}, \quad \xi = \frac{\rho}{k}, \quad \frac{1}{2}\mathrm{sh}2\alpha = \frac{\gamma m}{kc^2}.$$

Координаты x, y, z, в которых метрика пространства Лобачевского записана в виде (36), связаны со сферическими координатами ρ, θ, φ следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= k\,\mathrm{sh}\frac{\rho}{k} \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= k\,\mathrm{sh}\frac{\rho}{k} \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= k\,\mathrm{sh}\frac{\rho}{k} \cos\theta. \end{aligned} \tag{64}$$

В пределе $k \to \infty$ из (63) получается метрика Шварцшильда (сразу в гармонических координатах). В пределе $c \to \infty$ из (63) получается потенциал (57), а в двойном пределе ($k \to \infty$, $c \to \infty$) — потенциал (56). В пределе $\gamma \to 0$ из (63) получается метрика

$$d\rho^2 + k^2 \mathrm{sh}^2 \xi d\Omega^2 - c^2 dt^2, \tag{65}$$

пространственная часть которой является метрикой пространства Лобачевского в сферических координатах.

Литература

[1] Черников Н.А. *Трудные вопросы теории относительности.* ЭЧАЯ, 1987, том 18, вып. 5, с. 1000.

[2] Черников Н.А. – *О необходимости создания толкового словаря для гравитационистов.* В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 17. М.: Энергоатомиздат, 1986, с. 24.

[3] Черников Н.А. – *Геометрия Лобачевского и релятивистская механика.* ЭЧАЯ. 1973, том 4, вып.3, с. 773.

[4] Черников Н.А. – *Геометрия Лобачевского как физическая наука.* В сб.: "150 лет геометрии Лобачевского". М.: ВИНИТИ, 1977, с. 146.

[5] Котельников А.П. – *Принцип относительности и Геометрия Лобачевского.* В сб.: In memoriam N.I. Lobatschevskii. Vol. 2. Казань: Главнаука, 1927, с. 37–66.

[6] Черников Н.А. – *Введение геометрии Лобачевского в теорию гравитации.* ЭЧАЯ, 1992, том 23, вып. 5, с. 1155.

[7] Норден А.П. – *Пространства аффинной связности.* М.: Наука, 1976.

[8] Черников Н.А. – *Релятивистская теория тяготения с двумя аффинными связностями.* Дубна: Краткие сообщения ОИЯИ, No 3[60]–93, с. 5 1993.

[9] Chernikov N.A. – *The relativistic Kepler problem in the Lobachevsky space.* Acta Phys. Polonica. B24, 927 (1993).

[10] Лобачевский Н.И. – *Новые начала геометрии с полной теорией параллельных.* Полн. собр. соч. Том 2, М.–Л.: Гостехиздат, 1949.

[11] Chernikov N.A. – *The Kepler problem in the Lobachevsky space and its solution.* Acta Phys. Polonica. B23, 115 (1992).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 октября 1994 года.