объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-94-324

Э.А.Кураев, З.К.Силагадзе*

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К СЕЧЕНИЮ ТРЕХФОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОНА И ПОЗИТРОНА ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

* ИЯФ им.Будкера, Новосибирск

1994

Процесс

$$e^+(p_+) + e^-(p_-) \to \gamma(r_1) + \gamma(r_2) + \gamma(r_3), \tag{1}$$

$$s = (p_+ + p_-)^2 \sim 2p_+ \cdot r_i \sim 2p_- \cdot r_i >> m^2, p_+^2 = p_-^2 = m^2, \ r_i^2 = 0,$$

в настоящее время может быть изучен с высокой степенью точности на *ee*-коллайдерах средних энергий со светимостью $L \sim 10^{32}$ см^{2}с$^{-1}$. Мотивацией для его изучения в первую очередь служит факт, что он представляет собой фон при изучении процессов $e^+e^- \to \pi^0\gamma$ и $e^+e^- \to \eta\gamma$ [1]. Во-вторых, его прецизионное измерение важно для проверки справедливости квантовой электродинамики в высших порядках теории возмущений [2].

Сечение процесса (1) в борновском приближении описывается шестью диаграммами Фейнмана типа *а* (см. рис.) и имеет вид:

$$d\sigma^{e^+e^- \to 3\gamma} = \frac{\alpha^3}{8\pi^2} \frac{A}{\chi_1\chi_1'\chi_2\chi_2'\chi_3\chi_3'} d\Gamma,$$

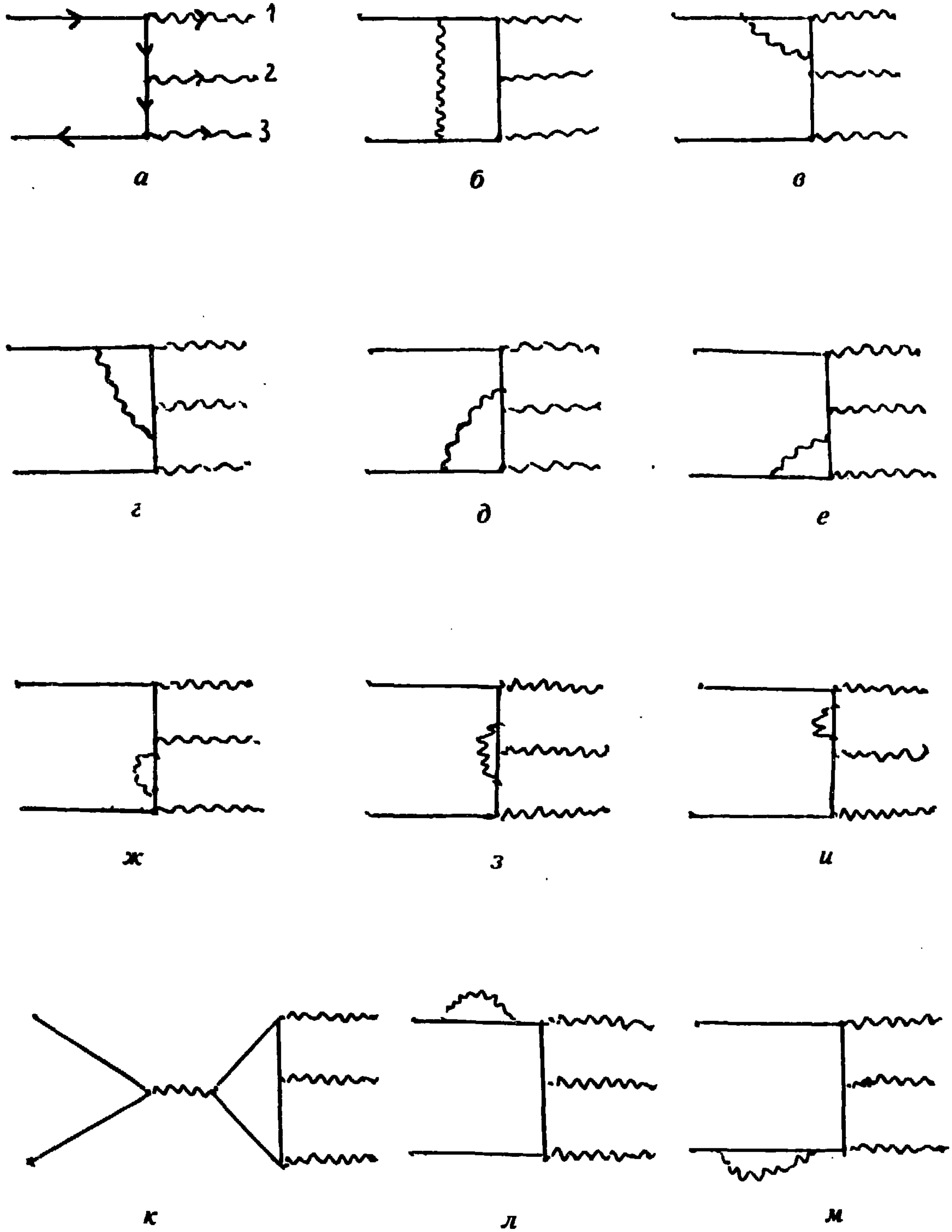
$$A = \chi_1\chi_1'(\chi_1^2 + \chi_1'^2) + \chi_2\chi_2'(\chi_2^2 + \chi_2'^2) + \chi_3\chi_3'(\chi_3^2 + \chi_3'^2),$$

$$d\Gamma = \frac{d\mathbf{r}_1}{\omega_1} \frac{d\mathbf{r}_2}{\omega_2} \frac{d\mathbf{r}_3}{\omega_3} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - r_1 - r_2 - r_3),$$

$$\chi_i = p_- \cdot r_i = \frac{s}{4} \nu_i (1 - c_i), \ \chi_i' = p_+ \cdot r_i = \frac{s}{4} \nu_i (1 + c_i),$$
$$\nu_i = \frac{\omega_i}{\varepsilon}, \ i = 1 \div 3, \ s = 4\varepsilon^2, \tag{2}$$

где $c_i = \cos\theta_i$, а θ_i — углы вылета фотонов к оси пучка $\mathbf{p}_-$ в системе центра инерции. Вклад в сечение интерференции амплитуд на диаграммах *а* и *б—к* имеет вид:

$$\alpha^4 \left\{ A(\chi, \nu)L^2 + B(\chi, \nu) \cdot L \cdot \ln\frac{\lambda}{m} + C(\chi, \nu)L + D(\chi, \nu) + \right.$$
$$\left. + E(\chi, \nu) \cdot \ln\frac{\lambda}{m} \right\} \left(1 + O\left(\frac{m^2}{s}\right)\right), \ \chi_i \sim s, \tag{3}$$



Типы фейнмановских диаграмм, описывающих процесс $e^+e^- \to 3\gamma$ в борновском и однопетлевом приближениях где $L = \ln \frac{s}{m^2}$ — «большой логарифм», а λ — «масса фотона». Учет излучения дополнительных мягких фотонов с энергией, не превышающей некоторую величину $\Delta\varepsilon$, $\omega < \Delta\varepsilon << \varepsilon$, приведет к замене в (3) $\ln \frac{\lambda}{m}$ на $\ln \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$, при этом также сокращаются слагаемые $\sim L^2$, и, кроме того, может измениться вид функций C, D. При учете излучения дополнительного (четвертого) жесткого фотона с энергией $\omega_4 (\omega_4 > \Delta\varepsilon)$ компенсируется также слагаемое $\sim L \cdot \ln \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$. Ниже мы вычисляем функции A, B, C. Для характерной в опытах области переменных

$$\nu_i \sim 1, \ \chi_i \sim s, \ |c_i| < c_0 \sim 0{,}8 \tag{4}$$

функции A, B, C оказываются плавно меняющимися, величиной порядка единицы. Вычисление функции D требует больших усилий, особенно вкладов диаграмм *б*, *к*. Предположение

$$|D| \sim |B| \sim |A| \sim |C| \sim |E| \sim 1 \tag{5}$$

в области (4) тем не менее представляется нам вполне естественным. Пользуясь результатами работы [3], мы убедились в справедливости (5) для вклада диаграммы *к*, содержащей блок рассеяния света на свете. Предположение (5) позволяет оценить точность вычисления радиационных поправок в случае, если ограничиться только логарифмическим приближением:

$$d\sigma = d\sigma_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\delta\right), \quad \left|\frac{\Delta\delta}{\delta}\right| \sim \frac{1}{L} \sim 4 \div 6\%, \ L = 15 \div 20. \tag{6}$$

Эта точность вполне достаточна для проводящихся опытов.

Выбор величины $\Delta\varepsilon/\varepsilon$ зависит от постановки опыта. Мы ограничимся вначале эксклюзивной постановкой, запрещающей излучение дополнительных жестких фотонов:

$$2 - \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \le \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \le 2, \tag{7}$$

где в качестве $\Delta\varepsilon$ можно принять границу чувствительности детектора при измерении энергии фотона. Величина $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \sim 10^{-1} \div 10^{-2}$ является типичной для детекторов типа «Cristall Ball».

При вычислении удобно использовать теорию возмущений с обрезанием по 4-импульсам петлевых диаграмм $|r^2| < \Lambda^2$, устраняющим ультрафиолетовые расходимости. Перенормируемость QED, т.е. независимость наблюдаемых результатов от параметра Λ, позволяет выбрать его наиболее удобным:

$$s \lesssim \Lambda^2. \tag{8}$$

Рассмотрим вначале вклад 4-импульсов виртуального фотона из петли r, таких что $s \sim |r^2| < \Lambda^2$. Вклады диаграмм $а$, $в$, $е$—$л$ (см. рис.) имеют вид:

$$M_а = M_0, \; M_в = M_е = M_з = M_0 \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{p^2},$$

$$M_и = M_ж = -M_0 \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{p^2},$$

$$M_л = M_к = -M_0 \cdot \frac{\alpha}{8\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}.$$

Суммируя их, получим вклад «ультрафиолетовой области» 4-импульсов фотона:

$$M_{uv} = M_а + M_в + M_е + M_ж + M_з + M_и + M_к + M_л =$$

$$= M_0 \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{p^2}{m^2}\right) = M_0 \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{s}{m^2}\right), \tag{9}$$

где $p^2 \sim s$ — характерный квадрат 4-импульса фермиона между вершинами излучения реальных фотонов.

Рассмотрим теперь вклад «мягкой» области 4-импульсов виртуального фотона $|r^2| << s$.

Удобно параметризовать 4-импульс виртуального фотона по Судакову: $k = \alpha p_2 + \beta p_1 + k_\perp$. Кинематическая область $|\alpha| \sim |\beta| \sim 1$ отвечает большим «виртуальностям» фотона $|k^2| \sim s$, она была рассмотрена нами выше. Покажем, что логарифмические вклады отсутствуют в области $|\beta| \sim 1$, $|\alpha| << 1$ и $|\alpha| \sim 1$, $|\beta| << 1$. Для определенности рассмотрим первую область. Логарифмические вклады в ней происходят от диаграмм, в которых виртуальный фотон испускается начальным электроном в направлении его 4-импульса $m^2 << kp_1 << s/4$. Выбирая в этой кинематической области аксиальную калибровку для функции Грина виртуального фотона

$$D_{\mu\nu}(k, n) = \frac{1}{k^2} \left\{ g_{\mu\nu} - \frac{1}{kn} (k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu) \right\}, \; D_{\mu\nu} n^\nu = 0, \; n^2 = 0,$$

где $n = p_2 - \frac{m^2}{s} p_1$, легко убедиться, что возникающий в числителе вектор $2p_1^{\mu} D_{\mu\nu}(k, n)$ обращается в нуль для $kp_1 \to 0$. Аналогично показывается отсутствие логарифмических вкладов во второй области. Для области $|\alpha| \sim |\beta| \ll 1$ можно пренебречь зависимостью от 4-импульса виртуального фотона в фермионных пропагаторах между вершинами излучения реальных фотонов. Логарифмический вклад происходит только от диаграммы *б*. Используя прием Фейнмана для объединения знаменателей, ее вклад в матричный элемент представим в виде:

$$M_\delta \sim \frac{-(4\pi\alpha)^{5/2}}{(2\pi)^4} i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^1 2y dy \int^{|k^2| < s} \frac{d^4k}{i\pi^2} \bar{V} \gamma_\mu (-\hat{p}_+ + \hat{k})\, O\, (\hat{p}_- + \hat{k}),$$

$$\gamma^\mu U \left[(1-y)(k^2 - \lambda^2) + y(k^2 + 2kp_x) \right]^{-3},$$

$$p_x = xp_- - (1-x)p_+ , \tag{10}$$

где символом «О» обозначен «жесткий блок» на диаграмме *б*. Слагаемое из числителя $\sim k^2$ дает вклад $\sim \ln p_x^2/s$, не содержащий L. В результате

$$M^{virt} = M_\delta = M_0 \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 \frac{dx \cdot s}{p_x^2} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{p_x^2}{\lambda^2} - 1 \right\} =$$

$$= M_0 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \left[2L - \frac{1}{2} L^2 + L \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right], \tag{11}$$

где $M_0 = \bar{V} O U$, $p_x^2 = m^2 - sx(1-x)$, λ — масса фотона. Масса фотона исчезает из выражения для дифференциального сечения при учете излучения дополнительных мягких фотонов. Сечение излучения дополнительного фотона, энергия которого в с.ц.и. не превышает $\Delta\varepsilon$, таково:

$$d\sigma^{soft} = d\sigma_0 \left(- \frac{4\pi\alpha}{16\pi^3} \right) \int_{\omega < |\Delta\varepsilon|} \frac{d^3k}{\omega} \left(\frac{p_-}{p_- k} - \frac{p_+}{p_+ k} \right)^2 =$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} d\sigma_0 \left\{ 2(L-1) \ln \left(\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} \right) + L - \frac{1}{2} L^2 \right\}. \tag{12}$$

Используя результаты (9)—(12), мы получим дифференциальное сечение трехфотонной аннигиляции в постановке, когда сумма энергий фотонов мало отличается от $\sqrt{s}$ (эксклюзивная постановка):

$$d\sigma^{e\bar{e}\to 3\gamma} = d\sigma_0^{e\bar{e}\to 3\gamma}\left\{1 + \frac{\alpha}{\pi}\left[2(L-1)\ln\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{3}{2}L\right]\right\},$$
$$L = \ln s/m^2\,, \tag{13}$$

где $d\sigma_0^{e\bar{e}\to 3\gamma}$ приведено выше (см. (2)).

Заметим, что (13) согласуется с представлением сечения в форме сечения процесса Дрелла — Яна [4]:

$$d\sigma^{e\bar{e}\to H}(s) = \int\limits_0^{\Delta\varepsilon/\varepsilon} dx\, F(x,\beta)\, d\sigma_0^{e\bar{e}\to H}(s(1-x)),$$

$$F(x,\beta) = \beta x^{\beta-1}\left(1 + \frac{3}{4}\beta\right) - \beta\left(1 - \frac{1}{2}x\right) + O(\beta^2),\ \beta = \frac{2\alpha}{\pi}(L-1), \tag{14}$$

для образования системы H жестких частиц в канале аннигиляции и, таким образом, подтверждает справедливость факторизационной теоремы.

В случае, когда энергии трех фотонов, летящих на большой угол, измеряются с небольшой точностью, допускается излучение дополнительных жестких фотонов вдоль оси пучков.

Дифференциальное сечение по аналогии с (14) имеет вид [4]:

$$d\sigma^{e\bar{e}\to 3\gamma} = \frac{\pi\alpha^3}{s}\int\limits_0^1 dx_1 dx_2\, \theta\left(x_1 + x_2 - 3\frac{\omega_{th}}{\varepsilon}\right) D(x_1,\beta)\, D(x_2,\beta)\times$$
$$\times\frac{d\varphi_{13}}{\pi}\frac{d\varphi_{23}}{\pi} dc_1 dc_2 dc_3 dv_1 dv_2 dv_3\left[(1 + P_{13} + P_{23})\times\right.$$
$$\left.\times\frac{[x_1^2(1-c_3)^2 + x_2^2(1+c_3)^2]v_3^2}{v_1^2 v_2^2 x_1^2 x_2^2(1-c_1^2)(1-c_2^2)}\right]\delta(x_1 + x_2 - \sum_1^3 v_i)\,\delta(x_1 - x_2 - \sum_1^3 v_i c_i)\times$$
$$\times\,\delta(v_1 S_1\cos\varphi_{13} + v_2 S_2\cos\varphi_{23} + v_3 S_3)\,\delta(v_1 S_1\sin\varphi_{13} - v_2 s_2\sin\varphi_{23}), \tag{15}$$

$$P_{13} f(x_1, x_2; c_1, c_2, c_3; v_1, v_2, v_3) = f(x_1, x_2; c_3, c_2, c_1; v_3, v_2, v_1),$$

где $0 < \varphi_{13}, \varphi_{23} < \pi$, φ_{13} — угол между плоскостями, содержащими ось пучков и один из импульсов фотонов k_1 и k_3; $c_i = \cos\theta_i$, $S_i = \sin\theta_i$, θ_i — соответствующие полярные углы; $v_i = 2\omega_i / \sqrt{s}$ — доли энергий фотонов, ω_{th} — пороговая энергия регистрации жесткого фотона,

$$D(x,\beta) = \frac{1}{2}\beta(1-x)^{\frac{\beta}{2}-1}(1+\frac{3}{4}\beta) - \frac{1}{4}\beta(1+x) + O(\beta^2).$$

Авторы благодарят В.С.Фадина и Л.Н.Липатова за полезные обсуждения.

Литература

1. Dolinsky S. et al. — Phys. Rev., 1991, vol.202, p.99.
   Behrend H.-J. et al. — Phys. Lett., 1988, vol.B202, p.154.
2. Guzenko S.Ya. et al. — In: Proc. of the Seminar «Physics of *ee*-Interactions», JINR, Dubna, 1989, p.19—26.
3. Байер В.Н., Кураев Э.А., Фадин В.С. — ЯФ, 1980, т.31, с.700.
4. Кураев Э.А., Фадин В.С. — ЯФ, 1985, т.41, с.733.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 августа 1994 года.