94-310

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-94-310

Д.В.Ширков

# РЕНОРМГРУППА БОГОЛЮБОВА[1]

[1]Направлено в журнал «Успехи математических наук»

1994

## СОДЕРЖАНИЕ



# 1. ВСТУПЛЕНИЕ

## 1.1. Квантовая теория поля

Проблемами КТП Николай **Николаевич** (далее – НН, произносится "энэн") вплотную занялся в конце 40-х гг., возможно, под влиянием известного цикла статей Швингера. Эти статьи докладывались на семинаре НН в Стекловке. Во всяком случае, первые квантово-полевые публикации НН, появившиеся в начале 50-х гг.[1], были посвящены уравнениям в вариационных производных типа Томонага-Швингера и основаны на аксиоматическом введении матрицы рассеяния как функционала от функции области взаимодействия $g(x)$, обобщающей швингеровскую функцию поверхности $\sigma(t)$.

В первой половине 50-х НН активно входил в быстро развивающуюся науку – перенормируемую КТП, причем входил со стороны математики, шел быстрее, врастал глубже других ученых, мигрирующих в теорфизику из математики. Как известно, он развил свой метод перенормировок на основе теории обобщенных функций Соболева–Шварца. Его подход позволяет обойтись без введения "голых" полей и частиц и физически неудовлетворительной картины бесконечных перенормировок.

НН имел обыкновение время от времени делать доклады с обзором больших кусков КТП, таких как "перенормировки", "континуальный интеграл" или "поверхностные расходимости". Слушатели всей последовательности обзоров находились под впечатлением того, что НН "видит" эти, внешне столь различные, фрагменты с одной точки зрения, воспринимает их как части единой картины.

Напомню, что речь идет о времени, когда учебником по теории частиц было довоенное издание "Квантовой теории излучения" Гайтлера. "Квантовая электродинамика" Ахиезера и Берестецкого (1953), как и первый том "Мезонов и полей" Бете, Хоффмана и Швебера (1955), еще ждали своего появления на свет.

И вот как-то раз осенью 1953 года, находясь под впечатлением его очередной лекции, я спросил: "НН, почему бы Вам не написать книгу – учебник по новой КТП?" В ответ услышал: "Идея недурна, быть может, мы ее осуществим вместе?" Поначалу я не воспринял всерьез это предложение. Следует пояснить, что лишь в мае того памятного года один из соавторов будущей книги защитил кандидатскую диссертацию по теории диффузии и замедления нейтронов и не имел ни единой работы по квантовой теории поля, тогда как в октябре другой уже стал академиком.

Однако через неделю разговор возобновился, и мы начали обсуждать детали проекта. Временные рамки этих событий определяются достаточно надежно, во-первых, тем обстоятельством, что приведенный диалог происходил в автомобиле при поездке на квартиру НН в Щукинском проезде (район Курчатовского института), т.е. до переезда НН в высотное здание МГУ на Ленинских горах в конце 1953 г. Во-вторых, к моменту подачи нашей заявки в Гостехиздат в начале 1954 г. книга Ахиезера и Берестецкого только что вышла в свет. В то же время первый вариант последовательного изложения аксиоматической $S$-матрицы рассеяния был сдан для опубликования в УФН в конце 1954 года.

Первоначальный эскиз книги, помимо вводной части, излагающей лагранжев формализм релятивистских полей и швингеровскую схему квантования, включал оригинальную аксиоматическую конструкцию матрицы рассеяния, существенно основанную на боголюбовском условии причинности, метод перенормировок, базирующийся на теории распределений, а также метод функционального интеграла и обобщенное уравнение Томонага–Швингера.

Технически книга создавалась следующим образом. Я приезжал к НН на Ленинские горы и мы беседовали час-другой, составляя набросок очередного раздела. После этого у себя дома я писал первый вариант текста. При следующей встрече этот кусок обсуждался и зачастую существенно изменялся. Начисто переписанный манускрипт, в случае окончательного одобрения, складывался на верх большого платяного шкафа в его левый угол. Оттуда его забирала Евгения Александровна и перепечатывала на машинке. При печати использовалась слегка тисненая бумага нескольких разных цветов. Такая бумага, выпускавшаяся рижской фабрикой, специально покупалась для нашей работы. НН ее очень любил. Различные параграфы рукописи имели разные цвета: голубой, желтый, светлозеленый, фиолетовый... . Печатались сразу три экземпляра. Напечатанные параграфы забирались мною с противоположного, правого угла шкафа для вписывания формул.

Третий экземпляр разноцветных параграфов, сброшюрованный в главы, предназначался для критического чтения сотрудниками отдела НН в Стекловке. Это чтение давало первую "обкатку". Для второй предназначались две пространные статьи в УФН[2]. Поэтому текст вышедшей в сентябре 1957 года книги[4] был, в основном, достаточно хорошо

[2]Опубликованные в 1955 году[2],[3] .



"проутюжен" и, за исключением содержащих свежий материал двух последних глав по ренормгруппе и дисперсионным соотношениям, являл собой, так сказать, "третье приближение".

Оглядываясь назад с учетом моего последующего писательского опыта, скажу, что монография в 30 с лишком печатных листов была создана довольно быстро. Определяющая причина заключалась в том, что НН уже вначале имел в голове четкий план, а впоследствии держал в голове и весь созданный текст.

## 1.2. Рождение боголюбовской ренормгруппы

Весной 1955 года в Москве состоялась небольшая конференция "КЭД и теория элементарных частиц". Она проходила в ФИАНе в первой декаде апреля. Среди участников было несколько иностранцев, в том числе Ху-нинг и Гуннар Челлен. Мое короткое выступление касалось следствий конечных преобразований Дайсона для перенормированных функций Грина и матричных элементов в КЭД.

Центральным событием конференции был обзорный доклад Ландау "Основные проблемы КТП", в котором обсуждалось УФ–поведение в локальной квантовой теории поля. Незадолго до этого задача поведения на малых расстояниях в КЭД была существенно продвинута в цикле работ Ландау, Абрикосова и Халатникова. Им удалось построить такое замкнутое приближение к уравнениям Швингера–Дайсона, которое оказалось совместным как с перенормируемостью, так и с градиентной ковариантностью. Это, так называемое "трех-гаммное", приближение допускало явное решение в безмассовом пределе и, на современном языке, приводило к суммированию главных УФ логарифмов.

Наиболее замечательным был тот факт, что это решение оказалось внутренне противоречивым с физической точки зрения, т.к. содержало "призрачный полюс" в перенормированной амплитуде фотонного пропагатора — трудность "нуля физического заряда".

Наши встречи с НН в это время были регулярными и интенсивными, поскольку мы были заняты подготовкой окончательного текста книги. НН был весьма заинтригован результатами группы Ландау и поставил передо мной общую задачу оценки их надежности путем построения, например, второго приближения (включающего *следующие-за-главными УФ логарифмы*) к уравнениям Швингера–Дайсона для проверки стабильности УФ–асимптотик и существования призрачного полюса.

В ту пору я временами встречался с Алешей Абрикосовым, с которым мы были хорошо знакомы со студенческих лет. Вскоре после фиановской конференции Алеша поведал мне о только что появившейся статье Гелл-Манна и Лоу. В ней рассматривалась та же самая физическая проблема, но как он сказал, она была сложна для понимания и не поддавалась комбинированию с результатами, полученными их группой.

Я просмотрел статью и представил моему учителю краткую справку по ее методу и результатам, которые включали некоторые общие утверждения о скейлинговых свойствах распределения заряда на малых расстояниях и довольно сложные функциональные уравнения.

Последующая за моим сообщением сцена была весьма впечатляюща. НН тут же заявил, что подход Гелл-Манна и Лоу правилен и очень важен: он представляет собой реализацию *группы нормировок (la groupe de normalisation)*, открытой пару лет назад Штюкельбергом и Петерманом при обсуждении структуры конечного произвола в матричных элементах, возникающего после устранения расходимостей. Эта группа является примером непрерывных групп преобразований, изученных Софусом Ли. Отсюда следовало, что групповые функциональные уравнения, подобные полученным в работе ГМ-Л, должны иметь место в общем случае, а не только в УФ–пределе.

Затем НН добавил, что наиболее сильным инструментом в теории групп Ли являются дифференциальные уравнения, отвечающие инфинитезимальным групповым преобразованиям.

Удачным образом я был знаком с основами теории групп. В ближайшие дни мне удалось переформулировать конечные преобразования Дайсона и получить искомые функциональные уравнения для скалярных пропагаторных амплитуд КЭД, обладающие групповыми свойствами, а также соответствующие дифференциальные уравнения, т.е. ренормгрупповые уравнения Ли. Все полученные уравнения содержали специфический объект – произведение квадрата заряда электрона $\alpha = e^2$ на поперечную амплитуду фотонного пропагатора $d(Q^2)$. Это произведение, $e^2(Q^2) = e^2 d$, мы назвали **инвариантным зарядом**. С физической точки зрения оно представляет аналог т.н. *эффективного заряда* электрона, впервые рассмотренного Дираком в 1933 году и описывающего эффект экранировки заряда за счет поляризации квантового вакуума. Термин "группа перенормировок" (Renormalization Group) также впервые был введен нами в первой из публикаций[5] в ДАН в 1955 г. (и в Nuovo Cimento в 1956 г.[7] ).



### 1.3. Эпизод с "призрачным полюсом"

На упоминавшейся выше конференции в ФИАНе Гуннар Челлен доложил выполненную им вместе с Паули работу по анализу так называемой "модели Ли", точное решение которой содержало *призрачный полюс* (который, в отличие от физического, отвечающего связанному состоянию, имел отрицательный вычет) в пропагаторе нуклона . Анализ Челлена и Паули приводил к выводу о физической бессодержательности модели Ли.

В свете полученного незадолго до этого в Москве результата о наличии подобного полюса в фотонном пропагаторе КЭД (как это следовало из решения группы Ландау, а также из независимого анализа Фрадкина) сообщение Челлена привело к бурной дискуссии о возможной противоречивости КЭД. Отчетливо помню сцену у доски, на которой Челлен приводил пример ряда с неравномерной сходимостью по параметру (от которого зависели члены ряда) в обоснование того, что на основе анализа конечного числа членов ряда нельзя сделать строгого вывода о свойствах бесконечной суммы.

Стороны разошлись, не убедив друг друга, и в скором времени появились публикации Ландау и Померанчука, в которых делался вывод о внутренней противоречивости не только квантовой электродинамики, но и локальной квантовой теории поля.

Не вдаваясь в детали, отмечу, что анализ этой проблемы, проведенный НН с помощью только что развитого им аппарата ренормгруппы, привел к выводу, что подобное заключение не может иметь статуса *строгого результата, не зависящего от теории возмущений.*

Однако наша работа, подобно аргументации Челлена, не убедила оппонентов. Как известно, Исаак Яковлевич Померанчук вскоре даже закрыл свой семинар по квантовой теории поля.

# 2. ИСТОРИЯ РЕНОРМ–ГРУППЫ В КТП

### 2.1. Перенормировки и ренорминвариантность

Как известно, регулярный формализм для устранения ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля был развит на основе ковариантной теории возмущений в конце 40-х гг. Этот прорыв связан с именами

Томонаги, Фейнмана, Швингера и некоторыми другими. В частности, Дайсон и Абдус Салам провели общий анализ структуры расходимостей в произвольно высоких порядках теории возмущений. Однако, ряд тонких вопросов, относящихся к так наз. перекрывающимся расходимостям в матрице рассеяния, а также к поверхностным расходимостям, обнаруженным Штюкельбергом [8] в уравнении Томонага–Швингера, оставались неясными.

Важный вклад в этом направлении, основанный на тщательном анализе математической природы УФ–расходимостей, был внесен Боголюбовым. Это было сделано на основе нового тогда раздела математики — *теории обобщенных функций* Соболева–Шварца. Дело заключается в том, что в локальной КТП пропагаторы являются обобщенными функциями (подобными дельта-функции Дирака), и их произведения, содержащиеся в коэффициентах разложения матрицы рассеяния, требуют дополнительного определения. При таком взгляде УФ–расходимости выступают как отражения неопределенностей указанных произведений в случае, когда их аргументы совпадают или располагаются на световом конусе.

На основе такого подхода в середине 50-х гг. Боголюбов и его ученики развили технику доопределения произведений сингулярных пропагаторов Штюкельберга–Фейнмана[2] и доказали теорему [9, 10] о конечности и единственности (для перенормируемых теорий) матрицы рассеяния в произвольном порядке теории возмущений. Рецептурная часть этой теоремы, *R-операция Боголюбова*, и по сей день служит практическим средством получения конечных и однозначных результатов в пертурбативных вычислениях в КТП.

Суть $R$-операции состоит в следующем. Для устранения УФ–расходимостей, вместо введения некоторой регуляризации, например, импульсного обрезания, и манипулирования квазибесконечными контрчленами, достаточно доопределить расходящиеся фейнмановские интегралы с помощью вычитания из них некоторых полиномов по внешним импульсам, которые в простейшем случае сводятся к первым нескольким членам разложения интеграла в ряд Тейлора. Единственность результатов вычислений обеспечивается специальными условиями, накладываемыми на них. Эти условия содержат определенные степени свободы[3], которые могут быть использованы для установления соотношений между параметрами лагранжиана (массами, константами связи) и соответствующими им физическими величинами То, что физические предсказания не зависят от произвола, содержащегося в условиях перенормировки, т.е. являются *ренорминвариантными*, составляет концептуальную основу ренормализационной группы.

[3]Эти степени свободы соответствуют различным схемам и масштабам перенормировки



Притягательная особенность этого подхода состоит в том, что он свободен от нефизических вспомогательных атрибутов – затравочных масс, констант связи и параметров регуляризации, введение которых в процессе вычислений оказывается здесь излишним. В целом этот метод может рассматриваться как *перенормировка без регуляризации и контрчленов.*

## 2.2. Открытие ренормгруппы

Ренормгрупповой подход в теоретической физике известен с середины 50-х гг. Ренормализационная группа была открыта Штюкельбергом и Петерманом [11] в 1953 году как группа инфинитезимальных преобразований, апеллирующих к конечному произволу, возникающему в элементах $S$-матрицы рассеяния после устранения ультрафиолетовых расходимостей. Этот произвол может быть зафиксирован посредством некоторых параметров $c_i$:

> *... следует ожидать, что существует группа инфинитезимальных операций* $\mathbf{P}_i = (\partial/\partial c_i)_{c=0}$*, удовлетворяющих соотношению*
>
> $$\mathbf{P}_i S = h_i(m,e)\partial S(m,e,...)/\partial e \ ,$$
>
> *и, следовательно, подразумевающих перенормировку* $e$.

Эти авторы ввели *группу нормировок*, порождаемую инфинитезимальными операторами $\mathbf{P}_i$ (т.е., как группу Ли), которые связаны с перенормировкой константы связи $e$.

В следующем году Гелл-Манн и Лоу [12], опираясь на записанные в регуляризованной форме преобразования Дайсона, вывели функциональные уравнения для пропагаторов КЭД в УФ–пределе. Например, для перенормированной поперечной части $d$ фотонного пропагатора они получили уравнение вида

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, e_2^2\right) = \frac{d_C(k^2/m^2, e_1^2)}{d_C(\lambda^2/m^2, e_1^2)} \ , \quad e_2^2 = e_1^2 d_C(\lambda^2/m^2, e_1^2) \ , \qquad (1)$$

где $\lambda$ – импульс обрезания, а $e_2$ – физический заряд электрона. Приложение к их статье содержит общее решение (полученное Т.Д. Ли) этого функционального уравнения для фотонной амплитуды $d(x, e^2)$, записанное в двух эквивалентных формах:

$$e^2 d\left(x, e^2\right) = F\left(xF^{-1}\left(e^2\right)\right)$$

и

$$\ln x = \int\limits_{e^2}^{e^2 d} \frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)} , \qquad (2)$$

где

$$\psi(e^2) = \frac{\partial(e^2 d)}{\partial \ln x} \quad \text{при} \quad x = 1 .$$

С помощью решения (2) был проведен качественный анализ поведения электромагнитного взаимодействия на малых расстояниях. Были указаны две возможности – бесконечная и конечная перенормировки заряда.

> *Мы приходим к выводу, что на малых расстояниях* **форма** *распределения заряда в вакууме в окрестности пробного заряда может зависеть от константы связи только через масштабный фактор. Поведение пропагаторов при больших импульсах определяется величиной констант перенормировки в теории. Таким образом, показано, что неперенормированная константа связи $e_0^2/4\pi\hbar c$, которая в теории возмущений представлена степенным рядом по перенормированной константе связи $e_1^2/4\pi\hbar c$ с расходящимися коэффициентами, может вести себя двумя способами:*
>
> *действительно быть бесконечной, как указывает теория возмущений;*
>
> *равняться некоторому конечному числу, не зависящему от $e_1^2/4\pi\hbar c$.*

Последняя из этих возможностей соответствует случаю, когда функция $\psi$ обращается в нуль в некоторой конечной точке [4] : $\psi(\alpha_\infty) = 0$.

[4]Здесь $\alpha_\infty$ – так называемая фиксированная точка ренормгрупповых преобразований.



Заметим, что в работе [12] не было обращено внимания на групповую природу проделанного анализа и полученных результатов и не упомянута статья [11]. Кроме того, авторы не осознали, что использовавшиеся ими преобразования Дайсона справедливы только для поперечной калибровки электромагнитного поля. Вероятно, поэтому они не смогли установить связь своих результатов со стандартной теорией возмущений и не обсудили возможность существования духового полюса.

Окончательный шаг был сделан в 1955 году Боголюбовым и Ширковым [5], [6] [5]. Используя групповые свойства конечных преобразований Дайсона для константы связи и полей, эти авторы получили групповые функциональные уравнения для пропагаторов и вершин КЭД в общем случае (т.е. с учетом массы). Например, уравнение для поперечной амплитуды фотонного пропагатора было получено в виде

$$d(x, y; e^2) = d(t, y; e^2) d\left(x/t, y/t; e^2 d(t, y; e^2)\right) ,$$

в котором учтена зависимость амплитуды $d$ не только от $x = k^2/\mu^2$ (где $\mu$ – определенный нормировочный масштаб), но и от массовой переменной $y = m^2/\mu^2$.

В современных обозначениях приведенное выше соотношение[6] является уравнением для квадрата эффективной электромагнитной константы связи $\bar{\alpha} = \alpha d(x, y; \alpha = e^2)$:

$$\bar{\alpha}(x, y; \alpha) = \bar{\alpha}\left(x/t, y/t; \bar{\alpha}(t, y; \alpha)\right) . \qquad (3)$$

В работе [5] был введен термин *"ренормализационная группа"* и определено понятие *инвариантного заряда* [7].

Подчеркнем здесь, что, в отличие от подхода Гелл-Манна–Лоу, в нашем случае нет какого-либо обращения к упрощениям, обусловленным безмассовостью ультрафиолетовой асимптотики. Однородность массовой шкалы здесь явно нарушается масштабом $m$. Тем не менее симметрия (хотя и несколько более сложного вида), лежащая в основании ренормгруппы, по-прежнему может быть сформулирована как *точная симметрия* решений квантово-полевой задачи[8]. Именно в этом смысле мы и употребляем термин б о г о л ю б о в с к а я р е н о р м г р у п п а.

[5]См. также обзор [7], опубликованный на английском языке в 1956 году.

[6]В безмассовом случае $y = 0$ оно эквивалентно уравнению (4).

[7]В настоящее время это понятие широко известно как эффективная или бегущая константа связи.

[8]См. ниже ур-.е (11).

Дифференцированием функциональных уравнений впервые были получены дифференциальные групповые уравнения в стандартной для теории Ли нелинейной форме
для $\bar{\alpha}$:

$$\frac{\partial\bar{\alpha}(x,y;\alpha)}{\partial\ln x} = \beta\left(\frac{y}{x},\bar{\alpha}(x,y;\alpha)\right) \tag{4}$$

и для пропагатора электрона $s(x,y;\alpha)$:

$$\frac{\partial s(x,y;\alpha)}{\partial\ln x} = \gamma\left(\frac{y}{x},\bar{\alpha}(x,y;\alpha)\right)s(x,y;\alpha)\ , \tag{5}$$

где

$$\beta(y,\alpha) = \frac{\partial\bar{\alpha}(\xi,y;\alpha)}{\partial\xi}\ , \qquad \gamma(y,\alpha) = \frac{\partial s(\xi,y;\alpha)}{\partial\xi} \qquad \text{при}\ \ \xi = 1\ . \tag{6}$$

Тем самым была получена явная реализация дифференциальных уравнений, упомянутых в цитате из статьи [11]. Эти результаты установили концептуальную связь между подходами Штюкельберга–Петермана и Гелл-Манна–Лоу.

## 2.3. Создание метода ренормгруппы

Другое важное достижение работы [5] состояло в формулировке простого алгоритма для улучшения приближенного пертурбативного решения посредством его сочетания с уравнениями Ли [9] :

> *Отсюда[10] следует, что для вычисления функций $\bar{\alpha}$ и $s$ во всей области изменения их аргументов достаточно определить $\bar{\alpha}(\xi,y,\alpha)$ и $s(\xi,y,\alpha)$ лишь в окрестности $\xi = 1$, для чего можно воспользоваться обычной теорией возмущений.*

В последующей публикации [6] этот алгоритм был эффективно использован для анализа УФ– и ИК–асимптотик КЭД в поперечной калибровке. Были получены однопетлевая

$$\bar{\alpha}^{(1)}_{RG}(x,0,\alpha) = \frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{3\pi}\cdot\ln x} \tag{7}$$

[9] В этой цитате из статьи [5] использованы современные обозначения.

[10] Т.е. из формул (4), (5) и (6).



и двухпетлевая

$$\bar{\alpha}^{(2)}_{RG}(x,0,\alpha) = \frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln x+\frac{3\alpha}{4\pi}\ln(1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln x)} \tag{8}$$

УФ–асимптотики фотонного пропагатора, а также найдена ИК–асимптотика пропагатора электрона:

$$s(x,y;\alpha) \approx (p^2/m^2-1)^{-3\alpha/2\pi}\ .$$

В то время эти выражения на однопетлевом уровне уже были известны. Нужно заметить, что в середине пятидесятых проблема УФ–поведения в локальной КТП была весьма актуальной. Существенного прогресса в анализе КЭД на малых расстояниях добились Ландау и его сотрудники [13] путем решения некоторой приближенной версии уравнений Швингера–Дайсона, включающей только двухточечные функции (т.е. одетые пропагаторы) $\Delta_i(...,\alpha)$ и трехточечную функцию $\Gamma(...,\alpha)$ – так называемые "трехгаммные уравнения". Авторы получили асимптотические выражения для пропагаторов КЭД, в которых (говоря на современном языке) были просуммированы лидирующие УФ–логарифмы [11]. Однако подход Ландау не давал рецепта построения следующих приближений.

Ответ на этот вопрос был дан только с помощью нового метода ренормгруппы. Простейшие УФ–асимптотики пропагаторов КЭД, полученные в нашей работе [6], например, выражение (7), в точности соответствовали результатам группы Ландау.

В ренормгрупповом подходе эти результаты получаются выкладкой в несколько строк, для чего нужно подставить однопетлевое приближение теории возмущений

$$\bar{\alpha}^{(1)}_{PTh}(x,0;\alpha) = \alpha+\frac{\alpha^2}{3\pi}\ell+\dots\ , \qquad \ell = \ln x$$

в правую часть первого из уравнений (6) для вычисления генератора $\beta(0,\alpha) = \psi(\alpha) = \alpha^2/3\pi$ и выполнить затем элементарное интегрирование.

Вместе с тем, начиная с двухпетлевого выражения

$$\bar{\alpha}^{(2)}_{PTh}(x,0;\alpha) = \alpha+\frac{\alpha^2}{3\pi}\ell+\frac{\alpha^2}{\pi^2}\left(\frac{\ell^2}{9}+\frac{\ell}{4}\right)+\dots\ ,$$

[11] Эти результаты были получены в произвольной ковариантной калибровке.

приходим ко второму ренормгрупповому приближению (8), соответствующему суммированию следующих за главными УФ–логарифмов. Это показывает, что метод ренормгруппы — регулярная процедура, в рамках которой довольно просто оценить область применимости полученных результатов.

Ренормгрупповое выражение второго порядка (8) для эффективной константы взаимодействия, впервые полученное в работе [6], содержит нетривиальную зависимость вида "логарифм логарифма", и в настоящее время широко известно как двухпетлевая аппроксимация для бегущей константы связи КХД.

Вскоре этот подход был сформулирован [14] для случая КТП с двумя константами связи $g$ и $h$, а именно для модели пион-нуклонных взаимодействия с самодействием пионов [12]. Впервые была получена система двух связанных уравнений:

$$\bar{g}^2\left(x,y;g^2,h\right) = \bar{g}^2\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\bar{g}^2\left(t,y;g^2,h\right),\bar{h}\left(t,y;g^2,h\right)\right) \ ,$$
$$\bar{h}\left(x,y;g^2,h\right) = \bar{h}\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\bar{g}^2\left(t,y;g^2,h\right),\bar{h}\left(t,y;g^2,h\right)\right) \ .$$

Соответствующая система нелинейных дифференциальных уравнений из статьи [14] была использована в работе [15] для УФ–анализа перенормируемой модели пион-нуклонных взаимодействий, основанного на однопетлевых пертурбативных вычислениях.

Таким образом, в работах [5, 6, 14] ренормгрупповой подход был напрямую связан с практическими вычислениями УФ– и ИК–асимптотик. С тех пор эта техника, известная как *ренормгрупповой метод* (РГМ), стала единственным средством для асимптотического анализа в локальной КТП.

## 2.4. Другие ранние приложения РГ

Первое важное теоретическое применение метода ренормгруппы было сделано летом 1955 года в связи с актуальной тогда проблемой так наз. призрачного полюса (также известной как трудность "нуль-заряда"). Это

[12] Существенно, что для перенормируемости юкавского PS-PS $\pi N$–взаимодействия $\sim g$ было необходимо добавить в лагранжиан член пионного самодействия четвертой степени по полю с независимой, т.е. второй, константой связи $h$. В то время это не было осознано в полной мере – ср. данную систему с уравнениями $(4.19)'$-$(4.21)'$ из работы [12], а также с дискуссией в [18].



явление, впервые обнаруженное в КЭД [16, 17], сначала рассматривалось [17] как указание на возможную трудность квантовой электродинамики, а затем[18, 19] – как доказательство несостоятельности всей локальной КТП.

Однако ренормгрупповой анализ проблемы, выполненный в работе [20] на основе уравнения (2), показал, что любые выводы, полученные с помощью вычислений в конечном порядке теории возмущений, не могут рассматриваться как законченное доказательство. Это заключение в точности соответствует тому впечатлению, которое может быть получено из сравнения уравнений (7) и (8). В середине пятидесятых годов этот результат имел большое значение, т.к. он восстанавливал репутацию локальной КТП. Тем не менее в течение следующего десятилетия применимость КТП в физике элементарных частиц оставалась под сомнением в глазах многих теоретиков.

Ренормгрупповой анализ КЭД в общем случае произвольной ковариантной калибровки был выполнен в работе [21]. Проблема здесь заключается в том, что перенормировка заряда связана только с поперечной частью фотонного пропагатора. Поэтому в непоперечной (например, фейнмановской) калибровке преобразование Дайсона имеет более сложный вид. Логунов предложил решить эту проблему, рассматривая калибровочный параметр как вторую константу связи.

Овсянников [22] дал общее решение функциональных РГ–уравнений с учетом массы в следующем виде:

$$\Phi(y,\alpha) = \Phi\left(y/x, \bar{\alpha}(x,y;\alpha)\right) \ ,$$

где $\Phi$ – произвольная функция двух переменных, имеющая по второй из них обратную функцию. При решении он использовал групповые дифференциальные уравнения в форме линейных уравнений в частных производных вида[13]:

$$\left\{x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - \beta(y,\alpha)\frac{\partial}{\partial \alpha}\right\}\bar{\alpha}(x,y,\alpha) = 0 \ .$$

Результаты этого "периода первооткрывателей" были собраны в главе "*Ренормализационная группа*" монографии [23], первое издание которой вышло в 1957 году[14], и очень быстро обрели статус "квантово-полевого фольклора".

[13] Которые в настоящее время известны как уравнения Каллана–Симанзика.

[14] Монография вскоре была переведена на английский и французский [24] языки.

# 3. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ

## 3.1. Квантовая теория поля

Следующее десятилетие принесло затишье, в течение которого не произошло практически никакого существенного прогресса в методе ренормгруппы. Единственным исключением, которое следует здесь упомянуть, явилась статья Вайнберга [25], где была высказана идея *бегущей массы* фермиона. Эта идея, если придерживаться точки зрения работы [21], может быть сформулирована следующим образом: *любой параметр лагранжиана может трактоваться как (обобщенная) константа связи и, таким образом, быть включенным в формализм ренормгруппы.* Оказалось, однако, что результаты, полученные в рамках этого подхода, совпадают с прежними. Например, наиболее известное выражение для бегущей массы фермиона

$$\bar{m}(x,\alpha) = m_\mu \left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}(x,\alpha)}\right)^\nu ,$$

в котором просуммированы главные УФ–логарифмы, было известно для массы электрона в КЭД (с $\nu = 9/4$) с середины 50-х гг. (см. [13] и [6]).

Новые возможности для применения метода ренормгруппы открылись с появлением техники операторного разложения на малых расстояниях[26] (на световом конусе). Идея этого подхода проистекает из того, что РГ–преобразование, рассматриваемое как преобразование Дайсона перенормированной вершинной функции, включает одновременное изменение масштаба всех инвариантных аргументов (обычно – квадратов импульсов) этой функции. Разложение на световом конусе как бы "разделяет переменные", вследствие чего появляется возможность, обращаясь к коэффициентам разложения, изучать физические УФ–асимптотики (когда некоторые из импульсов фиксированы и находятся на массовой поверхности). Прием разделения аргументов функции многих переменных, предложенный Вильсоном, дает возможность исследовать ряд случаев, важных с физической точки зрения.

Конец периода затишья очень четко обозначен 1971 годом, когда метод ренормгруппы был применен в квантовой теории неабелевых калибровочных полей, в которой было открыто знаменитое явление асимптотической свободы [27].



Ренормгрупповое выражение для эффективной константы связи КХД $\bar{\alpha}_s$, вычисленное в однопетлевом приближении

$$\bar{\alpha}_s^{(1)} = \frac{\alpha_s}{1+\beta_1 \ln x} ,$$

благодаря положительности коэффициента $\beta_1$ имеет весьма примечательную УФ–асимптотику. Из этого выражения, в противоположность (7), следует, что эффективная константа КХД убывает с ростом $x$ и в УФ–пределе стремится к нулю. Это открытие, чисто технически ставшее возможным только благодаря методу РГ, является наиболее важным физическим результатом, полученным с помощью ренормгруппового подхода в физике частиц.

## 3.2. Спиновые решетки

Как раз в это же время Вильсону удалось [28] перенести философию ренормгруппы из релятивистской квантовой теории поля в другую область современной теоретической физики, а именно в теорию фазовых переходов в спиновых системах на решетке. Эта новая версия ренормгруппы основывалась на идее Каданова[29] о блочном объединении нескольких близлежащих спинов с одновременной заменой (перенормировкой) константы связи.

Для осуществления этой идеи необходимо произвести усреднéние спинов в каждом блоке. Такая операция, уменьшая число степеней свободы и упрощая рассматриваемую систему, при надлежащей перенормировке константы связи сохраняет в то же время все ее свойства, относящиеся к большим расстояниям. Вместе с тем указанная процедура означает создание некоторой новой теоретической модели для исходной физической системы.

Для того, чтобы после усреднения получилась система, формально подобная исходной, нужно еще пренебречь теми членами нового эффективного гамильтониана, которые не важны для описания инфракрасных свойств. В результате подобной *децимации Каданова–Вильсона* мы приходим к новой модельной системе, характеризующейся некоторыми новыми значениями элементарного масштаба и величины константы связи. Повторяя эту операцию многократно, можно построить упорядоченное дискретное множество моделей. С физической точки зрения переход от одной модели к другой является приближенной и необратимой операцией. Последовательное выполнение двух таких переходов эквивалентно некоторому одному, что и ведет к возникновению групповой структуры в множестве моделей. Однако в этом случае ренормгруппа является приближенной и реализуется как полугруппа.

Эта конструкция, очевидно, никак не связанная с УФ–расходимостями, явилась гораздо более ясной с общефизической точки зрения и поэтому оказалась понятной для весьма широкого круга теоретиков. Благодаря этому в семидесятые годы концепция ренормгруппы и ее алгоритмическая структура довольно быстро и с успехом были перенесены в новые разделы теоретической физики, такие, как физика полимеров [30], теория некогерентного переноса [31] и др.

Помимо конструкций, аналогичных построению Каданова–Вильсона, в ряде случаев была установлена связь с истинной РГ квантово-полевого типа.

## 3.3. Турбулентность

Математической основой для этого послужил формализм функционального интегрирования. Например, классическую проблему турбулентности в формулировке Колмогорова удалось связать с ренормгрупповым подходом посредством следующих шагов [32]:

1. Определяется производящий функционал для корреляционных функций.
2. Функционал записывается в представлении интеграла по путям.
3. Путем преобразования функционального интеграла устанавливается соответствие между классической статистической системой и некоторой *эквивалентной квантовополевой моделью.*
4. Для этой эквивалентной КТП выводятся уравнения Швингера–Дайсона.
5. В рамках фейнмановской диаграммной техники выполняется конечная перенормировка и вводится ренормгрупповой формализм.
6. Для определения фиксированных точек и скейлингового поведения используются стандартные ренормгрупповые уравнения.

С физической точки зрения, ренормгрупповое преобразование в теории турбулентности сводится к изменению масштаба УФ–обрезания по волновому числу.



## 3.4. Пути распространения ренормгруппы

Мы видим, что развитие ренормгруппы в различных областях физики шло по двум направлениям:

- построение для данной физической задачи некоторого множества моделей по прямой аналогии с конструкцией Каданова–Вильсона (усреднение по определенным степеням свободы) – в физике полимеров, теории некогерентного переноса, теории перколяции и некоторых других;
- поиск точной РГ–симметрии в данной теории непосредственно или путем доказательства ее эквивалентности некоторой КТП: например, в теории турбулентности [32, 33], турбулентности в плазме [35], в физике фазовых переходов (на основе модели непрерывного поля спинов).

Какова же природа симметрии, лежащей в основе группы ренормировок?

а) В КТП ренормгрупповая симметрия – это точная симметрия решения, описываемая в исходных понятиях самой теории.

б) В турбулентности и некоторых других областях физики – это симметрия решения эквивалентной квантово-полевой модели.

в) В теориях спиновых решеток, полимеров, некогерентного переноса, перколяции и т.д. (где применяется блоковая идеология Каданова–Вильсона) РГ-преобразования – это операции, включающие переходы между разными вспомогательными моделями (специально сконструированными для этой цели). При этом необходимо определить упорядоченное множество $\mathcal{M}$ моделей $M_i$. РГ-преобразование, связывающее различные модели, имеет вид

$$R(n)M_i = M_{ni} \ .$$

Таким образом, в этом случае РГ-симметрия осуществляется только в множестве $\mathcal{M}$ в целом.

Имеется и чисто математическое различие между упомянутыми реализациями группы перенормировок. В теории поля РГ – это точная непрерывная группа симметрии. С другой стороны, в теории критических явлений, полимеров и иных подобных случаях (когда необходима операция усреднения) мы имеем приближенную дискретную полугруппу. Необходимо заметить, что в теории динамического хаоса, где также иногда применяются идеи и терминология ренормгруппы (см., например,

[36]), функциональные итерации вообще не образуют какой-либо группы. Иногда в указанных областях теоретической физики исследователи применяют совершенно иную терминологию. Используются такие выражения, как "ренормгруппа реального пространства", "Вильсоновская РГ", "РГ Монте-Карло" или "РГ хаоса".

Тем не менее, положительный ответ на вопрос –

Существуют ли разные группы ренормировок? –

подразумевает не более того, что уже только что было сказано о различиях между случаями (а), (б) с одной стороны и (в) – с другой.

## 3.5. Два лица ренормгруппы в КТП

Как было упомянуто выше, инвариантность относительно РГ-преобразований, т.е. ренорминвариантность – очень существенное понятие перенормированной квантовой теории поля. Оно подразумевает, что любые физические результаты не зависят ни от выбора схемы перенормировки, ни от точки вычитания. Последнее как раз соответствует симметрии, наличие которой отражает ренормгруппа. РГ–преобразования в КТП могут рассматриваться двумя разными способами.

Существование виртуальных состояний и виртуальных процессов – отличительная черта квантовой теории поля. Например, в КЭД могут происходить виртуальные превращения фотона в электрон-позитронную пару и обратные им. Такой процесс поляризации вакуума ведет к понятию эффективного заряда. В классической теории электромагнетизма пробный электрический заряд, помещенный в поляризуемую среду, притягивает находящиеся поблизости заряды противоположного знака, что ведет к его частичной экранировке. В квантовой электродинамике поляризуемой средой служит вакуум, т.е. само межчастичное пространство. Заряд электрона экранируется вакуумными флюктуациями электромагнитного поля. В 1933 году Дирак впервые показал[37], что заряд электрона в импульсном представлении зависит от $Q^2$ согласно формуле:

$$e(Q^2,\Lambda^2) = e_0\left\{1 + \frac{\alpha_0}{6\pi}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2} + \ldots\right\}\ , \tag{9}$$

где $e_0 = \sqrt{\alpha_0}$ – затравочный (голый) заряд, а $\Lambda$ – импульс обрезания.

Первая попытка применения идей ренормгруппы к этой проблеме была предпринята Штюкельбергом и Петерманом [11]. В их пионерской работе РГ-преобразования были введены несколько формально, в рамках



процедуры устранения расходимостей, результат которой содержит конечный произвол. Именно эта "степень свободы" в конечных перенормированных выражениях была использована в работах [5, 6]. Грубо говоря, полученный нами результат соответствует замене параметра ($\Lambda \to \mu$), описывающего степень свободы, так что вместо (9) получается "конечное представление"

$$e(Q^2,\mu^2) = e_\mu\left\{1 + \frac{\alpha_\mu}{6\pi}\ln\frac{Q^2}{\mu^2} + \ldots\right\}\ , \tag{10}$$

где $e_\mu = \sqrt{\alpha_\mu}$ – физический заряд электрона, измеряемый при $Q^2 = \mu^2$. Таким образом, ренормгрупповая симметрия здесь выражается в терминах масштаба энергии и точки перенормировки $\mu$.

Гелл-Манн и Лоу использовали другое представление. В их статье поведение КЭД на малых расстояниях анализируется в терминах параметра $\Lambda$. При таком подходе заряд электрона представлен сингулярным выражением (9).

Приведем простую физическую картину (которую можно извлечь из Нобелевской лекции Вильсона), иллюстрирующую этот подход. Представим себе электрон конечного размера, распределенный в малом объеме с радиусом $R_\Lambda = \frac{\hbar}{c\Lambda}$, $\ln(\Lambda^2/m_e^2) \gg 1$. Электрический заряд такого нелокального электрона будем считать зависящим от импульса обрезания так, чтобы эта зависимость учитывала эффекты поляризации вакуума, имеющие место на расстояниях от центра электрона меньших, чем $R_\Lambda$. Таким образом, мы получаем множество моделей с нелокальным электроном, имеющим заряд $e_i = \sqrt{\alpha_i}$, соответствующий разным значениям параметра обрезания $\Lambda_i$.

Здесь $\alpha_i$ зависит от $R_i$, а эффекты поляризации вакуума в исключенном объеме $R_i^3$ должны быть вычтены. В этой картине РГ-преобразование можно представить себе как переход от одного значения радиуса $R_i = \frac{\hbar}{c\Lambda_i}$ к другому $R_j$, сопровождаемый одновременным изменением эффективного заряда электрона

$$e_i \equiv e(\Lambda_i) \to e_j = e_i\left(1 + \frac{\alpha_i}{6\pi}\ln\frac{\Lambda_j^2}{\Lambda_i^2} + \ldots\right),$$

которое можно определить с помощью уравнения (9). Иными словами, РГ здесь выступает как симметрия операций в пространстве нелокальных моделей КЭД, построенных таким образом, что на больших расстояниях каждая модель эквивалентна реальной локальной теории. Правильно будет сказать, что в этих двух подходах группы ренормировок отличаются одна от другой.

## 3.6. Функциональная автомодельность

Попытка проанализировать соотношение между этими формулировками на некоторой общей и простой основе была предпринята около десяти лет назад [38]. В этой работе (см. также наши обзорные статьи [39, 40, 41]) было показано, что все указанные реализации ренормгруппы можно рассмотреть единым образом, используя лишь общие понятия математической физики.

В общем случае симметрию, лежащую в основе ренормгруппы, удобно обсуждать с помощью непрерывного однопараметрического преобразования двух величин $x$ и $g$, записанного в виде:

$$R_t : \{x \to x' = x/t,\ g \to g' = \bar{g}(t,g)\} \ . \tag{11}$$

Здесь $x$ – основная переменная, над которой производится масштабное преобразование, а $g$ – некоторая физическая величина, подвергающаяся более сложному функциональному преобразованию. Для того, чтобы образовать группу, преобразования $R_t$ должны подчиняться закону умножения

$$R_t R_\tau = R_{t\tau} \ ,$$

который ведет к функциональному уравнению для $\bar{g}$:

$$\bar{g}(x,g) = \bar{g}\left(x/t, \bar{g}(t,g)\right) \ . \tag{12}$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и функциональное уравнение (3) для эффективной константы связи в КТП в безмассовом случае, т.е. при $y = 0$. Оно также полностью эквивалентно функциональному уравнению Гелл-Манна–Лоу (1). Таким образом, ясно, что содержание ренормгруппового функционального уравнения сводится просто к групповому закону умножения.

В физических задачах второй аргумент $g$ преобразования обычно представляет собой граничное значение некоторой динамической функции, т.е. некоторого решения исследуемой задачи. Это означает, что симметрия, лежащая в основе ренормгруппового подхода, является симметрией решения (но не уравнения), описывающего данную физическую



систему, которая включает в себя преобразование параметров, содержащихся в граничных условиях.

Рассмотрим для иллюстрации некоторое решение $f(x)$, определяемое граничным условием $f(x_0) = f_0$. Включим в число аргументов функции $f$ и граничные параметры: $f(x) = f(x, x_0, f_0)$. РГ-преобразование в этом случае соответствует изменению способа параметризации решения, скажем, от $\{x_0, f_0\}$ к $\{x_1, f_1\}$. Иначе говоря, значение аргумента $x$, при котором задано граничное условие, не обязательно равно $x_0$ (т.е. можно использовать и другую точку $x_i$). Предположим теперь, что функция $f$ представима в виде $F(x/x_0, f_0)$ с условием $F(1,\gamma) = \gamma$. Равенство

$$F\left(x/x_0, f_0\right) = F\left(x/x_i, f_i\right)$$

отражает тот факт, что сама функция не модифицируется при таком изменении граничного условия [15]. Обозначая $f_1 = F(x_1/x_0, f_0)$, $\xi = x/x_0$ и $t = x_1/x_0$, получаем: $F(\xi, f_0) = F(\xi/t, F(t, f_0))$, что эквивалентно уравнению (12). Групповую операцию теперь можно определить по аналогии с (11):

$$R_t \ : \ \{\ \xi \to \xi/t\ ,\quad f_0 \to f_1 = F(t, f_0)\ \}\ .$$

Таким образом, в простейшем случае группу ренормировок можно определить как непрерывную однопараметрическую группу преобразований некоторого решения физической задачи, фиксированного своим граничным значением. РГ-преобразование затрагивает параметры граничного условия и соответветствует изменению способа его введения *для одного и того же решения*.

Частные случаи преобразований такого рода известны уже давно. Предположим, что функция $F$ является степенной по первому аргументу, т.е. $F(z,f) = fz^k$, где $k$ – некоторое число. В таком случае групповое преобразование принимает вид

$$P_t \ : \ \{\ z \to z' = z/t\ ,\quad f \to f' = ft^k\ \}\ ,$$

хорошо известный в математической физике как преобразование *автомодельности*. Преобразование $P_t$ может быть охарактеризовано как *преобразование степенной автомодельности*, а более общий случай $R_t$ соответствует преобразованию *функциональной автомодельности* (ФАМ) [38].

[15] Как, например, в случае $F(x,\gamma) = \Phi(\ln x + \gamma)$.

# 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теперь мы можем ответить на вопрос о физическом содержании симметрии, лежащей в основе функциональной автомодельности и ренормгруппы. Рассмотрим случай, когда РГ эквивалентна ФАМ. Как уже было сказано, она не является симметрией физической системы или уравнений данной задачи, а представляет собой симметрию решения, рассматриваемого как функция существенных физических переменных и подходящих краевых значений. Такая симметрия может быть, в частности, определена как свойство инвариантности физической величины, описываемой этим решением, относительно способа задания краевых условий. Изменение этого способа является групповой операцией, и, в этом смысле, групповое свойство может рассматриваться как свойство транзитивности таких изменений.

Заметим, что важным свойством рассматриваемых физических систем является однородность. Однако однородность может быть нарушена дискретным образом. Представим себе, что такая дискретная неоднородность связана с каким-то выделенным значением переменной $x$, скажем, $x = y$. В таком случае РГ-преобразование с каноническим параметром $t$ будет иметь вид:

$$R_t \ : \ \{ \ x' = x/t \ , \ \ y' = y/t \ , \ \ g' = \bar{g}(t, y; g) \ \} \ .$$

Закон группового умножения дает в точности функциональное уравнение (3).

Симметрия, связанная с функциональной автомодельностью, – очень простое, часто встречающееся свойство физических явлений. Его легко "открыть" во многих самых разных задачах теоретической физики: в классической механике, теории переноса, классической гидродинамике и т.д. – см., например, работы [42, 40, 41, 43].

Недавно появились интересные попытки [45, 46] использования РГ–идеологии в классической математической физике, в частности, для решения нелинейных дифференциальных уравнений. В этих работах обсуждается возможность создания регулярного метода отыскания особого класса симметрий уравнений современной математической физики – симметрий ренормгруппового типа. Последние определяются как симметрии решений относительно преобразований, вовлекающих не только (и даже не столько) естественные переменные задачи, присутствующие в уравнениях, но и параметры, входящие в решения как через уравнения,



так и через краевые условия (см. также [47, 48]).

Как известно, современный групповой анализ[49, 50], восходящий к работам Мариуса Софуса Ли[51], имеет целью обнаружение симметрии дифференциальных уравнений (ДУ). В постановку Ли не входит близкая задача изучения симметрии решений этих уравнений. В стороне от магистрального направления как классического, так и современного группового анализа остается также исследование симметрии решений относительно преобразований, затрагивающих не только переменные, наличествующие в уравнениях, но и параметры, входящие в решения, в том числе через краевые условия.

Из изложенного ясно, что именно симметрии, вовлекающие в групповые преобразования параметры системы, привлекли внимание в 50-х гг. в связи с открытием ренормализационной группы в квантовой теории поля. Именно такие симметрии, родственные симметрии фукциональной автомодельности, естественно именовать ренормгрупповыми или РГ-симметриями. Как уже было сказано, они присущи многим задачам современной математической и теоретической физики, поэтому представляет существенный интерес создание на базе современного группового анализа регулярного метода обнаружения РГ-симметрий для различных классов математических задач, в том числе и тех, формулировка которых выходит за рамки систем конечного числа дифференциальных уравнений с частными производными.

Актуальность поиска РГ-симметрий связана с эффективностью метода РГ, позволяющего улучшать аппроксимационные свойства приближенных решений задач, обладающих указанной симметрией и, в частности, восстанавливать правильную структуру поведения решения в окрестности сингулярности, как правило, нарушаемую приближением.

В задачах, описываемых на языке ДУ, регулярный алгоритм нахождения РГ–симметрий может быть построен [48, 52] путем комбинирования лиева анализа с методом инвариантного погружения Амбарцумяна[53]. В тех случаях, когда погружение краевой задачи для ДУ приводит к интегральной формулировке, к групповому анализу предъявляется требование расширения его алгоритмов на интегродифференциальные системы уравнений. С учетом того, что в реализации подобного расширения области применимости установившихся методов группового анализа в последнее время также наметился некоторый прогресс (см., напр., [54, 55, 56]), можно сказать, что указанный путь комбинирования оказывается достаточно конструктивным и для интегродифференциальных уравнений. Напомним, что в физических целях первое погружение было выполнено[53] именно для интегрального уравнения переноса излучения.

В то же время погружение задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений возвращает нас к истокам теории этих уравнений - поскольку оно осуществляется в рамках известной теоремы о существовании производных по начальным значениям от решений системы. Именно здесь оказывается плодотворной трактовка параметров (подобных константе связи) в качестве новых переменных, вовлеченных в групповые преобразования и/или процедуру погружения.

Дифференциальная формулировка РГ-симметрии использует инфинитезимальный оператор (касательное векторное поле), в общем случае совмещающий в себе симметрию исходной задачи с симметрией ее решения (приближенной или точной), учитывающей краевые данные. Алгоритмически процедура инвариантного погружения содержит операцию включения этих данных в число переменных, участвующих в групповых преобразованиях. Здесь объектом лиева анализа становится система уравнений, состоящая из исходной системы и соответствующих ей и краевой задаче уравнений погружения. Последние строятся как на основе собственно уравнений, так и с помощью краевых условий. С точки зрения группового анализа объединение исходной системы с уравнениями погружения модифицирует дифференциальное многообразие (и, как правило, весьма существенно). Группа симметрии объединенной системы отыскивается обычными приемами лиевого анализа и его современных модификаций с помощью решения определяющего уравнения для координат инфинитезимального оператора, отвечающего условию инвариантности этого нового многообразия. Собственно ренормгруппа может быть получена надлежащим сужением полученной группы на решении, представление которого может быть самым разнообразным: в виде точного интегрального или алгебраического выражения, в виде отрезка ряда теории возмущений или иной приближенной формулы, в виде функционального интеграла и т.д.

Автор благодарен Б.В.Медведеву и В.В.Пустовалову за полезные замечения.



# Литература


[1] Боголюбов Н.Н. *Доклады АН СССР*, **81** (1951), 757, 1015.

[2] Боголюбов Н.Н. и Ширков Д.В. "Вопросы квантовой теории поля.I", *Успехи Физ: Наук* **55**, (февраль 1955), 149-214.

[3] Боголюбов Н.Н. и Ширков Д.В. "Вопросы квантовой теории поля.II", *ibid.* **57**, (сентябрь 1955), 3-92.

[4] Боголюбов Н.Н. и Ширков Д.В. *Введение в теорию квантованных полей*, М., Гостехиздат, 1957.

[5] Боголюбов Н.Н. и Ширков Д.В., "О ренормализационной группе в квантовой электродинамике", *Доклады АН СССР*, **103** (1955) 203-206.

[6] Боголюбов Н.Н. и Ширков Д.В. "Приложение ренормализационной группы к улучшению формул теории возмущений", *Доклады АН СССР*, **103** (1955) 391-4.

[7] Bogoliubov N.N. and Shirkov D.V. "Charge Renormalization Group in Quantum Field Theory", *Nuovo Cim.* **3** (1956) 845-637

[8] Stueckelberg E.C.G. and Green J., *Helv. Phys. Acta*, **24** (1951) 153.

[9] Боголюбов Н.Н., Парасюк О.С. *Доклады АН СССР*, **100** (1955) 256, 429;

[10] Bogoliubov N.N., Parasiuk O.S. *Acta Mathematica*, **97** (1957), 227.

[11] Stueckelberg E.C.G. and Petermann A. "La normalisation des constantes dans la theorie des quanta". *Helv. Phys. Acta*, **26** (1953) 499-520.

[12] Gell-Mann M. and Low F. "Quantum Electrodynamics at Small Distances", *Phys. Rev.* **95** (1954) 1300-12.

[13] Ландау Л.Д., Абрикосов А.А. и Халатников И.М. *Доклады АН СССР*, **95** (1954) 497-9; 773-6; 1117-20; **96** (1954) 261-4; *Nuovo Cim.* Supp.3, 80-104.

[14] Ширков Д.В. "Ренормализационная группа с двумя константами связи в теории псевдоскалярных мезонов", *ДАН СССР*, **105** (1955) 972-5.

[15] Гинзбург И.Ф. *ibid.*, **110** (1956) 535.

[16] Фрадкин Е.С. *ЖЭТФ* **28** (1955) 750.

[17] Ландау Л.Д. и Померанчук И.Я. *ДАН СССР*, **102** (1955) 489.

[18] Landau L.D. "*On the Quantum Theory of Fields*". In: *Niels Bohr and the Development of Physics*, eds. W.Pauli et al., Pergamon, London, 1955, pp 52-69.

[19] Померанчук И.Я. *ДАН СССР*, **103** (1955) 1005; **105** (1955) 461; Nuovo Cim. **10** (1956) 1186.

[20] Боголюбов Н.Н. и Ширков Д.В. "Модель типа Ли в квантовой электродинамике", *ДАН СССР* **105** (1955) 685-8.

[21] Логунов А.А. *ЖЭТФ*, **30** (1956) 793-4.

[22] Овсянников Л.В. *Доклады АН СССР*, **109** (1956) 1112-5.

[23] Боголюбов Н.Н. и Ширков Д.В. "*Введение в Теорию Квантованных Полей*", Наука. М., издания 1957, 1973, 1976 и 1984 гг.

[24] Bogoliubov N. and Shirkov D. *Introduction to the theory of Quantized Fields*; Two American editions 1959 and 1980, Wiley-Interscience, N.Y.; Bogolioubov N.N., Chirkov D.V. "Introduction à la Theorie des Champes Quantique, Paris, Dunod, 1960.

[25] Weinberg S. *Phys.Rev.*, **D8** (1973) 3497.

[26] Wilson K. *Phys.Rev.* **179** (1969) 1499-1515;

[27] Gross D. and Wilczek F. *Phys.Rev.*, **D8** (1973) 3633;
Politzer H. *Phys.Rev.Lett.* **30** (1973) 1346.

[28] Wilson K. "RG and Critical Phenomena" *Phys.Rev.*, **B4** (1971) 3174-83.

[29] Kadanoff L. *Physica* **2** (1966) 263.

[30] De Gennes P.G. *Phys.Lett.*, **38A** (1972) 339;
de Cloiseaux J. *J.Physique (Paris)*, **36** (1975) 281.

[31] Bell T.L. et al. "RG Approach to Noncoherent Radiative Transfer" *Phys.Rev.*, **A17** (1978) 1049-57; Chapline G.F. *Phys.Rev.*. **A21** (1980) 1263.

[32] DeDominicis C. *Phys.Rev.*, **A19** (1979) 419-22.

[33] Адамян Л., Васильев А., Гнатич М. *ТМФ*, **58** (1984) 72; **65** (1985) 196; см. также
Vasiliev A.N. "Quantum Field Renormalization Group in the Theory of turbulence and in Magnetic Hydrodynamics" in [34] , pp.146-159.



[34] "Renormalization Group", Proceedings of 1986 Dubna Conf., Eds. D.V.Shirkov, D.I. Kazakov and A.A. Vladimirov, World Scientific, Singapore, 1988.

[35] Pelletier G. *Plasma Phys.*, **24** (1980) 421.

[36] Chirikov B.V. and Shepelansky D.L., "Chaos Border and Statistical Anomalies", in [34], pp 221-250.

[37] Dirac P.A.M. in *Theorie du Positron* (7-eme Conseil du Physique Solvay: Structure et propriete de noyaux atomiques, Octobre 1933), Gauthier-Villars, Paris,1934, pp.203-230.

[38] Ширков Д.В. "Ренормгруппа, Принцип Инвариантности и Функциональная Автомодельность", *ДАН СССР*, **263** (1982) 64-7.

[39] Shirkov D.V. In *Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, Ed. Sagdeev R.Z., Harwood Acad.Publ., N.Y. 1984, v.**3**, pp 1637-47.

[40] Ширков Д.В. "Ренормгруппа в современной физике" в сб. Трудов Совещания *Ренормгруппа-86*, ред. Ширков Д.В. и др., Изд. ОИЯИ., Дубна 1987, сс 9-33;
Shirkov D.V. "Renormalization Group in Modern Physics", *Int.J.Mod.Phys.* **A3** (1988) 1321-41.

[41] Shirkov D.V. "Renormalization Group in Different Fields of Theoretical Physics", KEK Report 91-13, Feb. 1992.

[42] Мнацаканян М.А. *ДАН СССР*, **262** (1982) 856.

[43] Shirkov D.V. "Several Topics on Renorm-Group Theory". In [44] , pp 1-10.

[44] "Renormalization Group '91". Proceedings of 1991 Dubna Conf., Eds. D.V.Shirkov, V.B.Priezzhev, World Scientific, Singapore, 1992.

[45] Ковалев В.Ф., Пустовалов В.В. "Сильная нелинейность и генерация высших гармоник в неоднородной плазме", Препринт No 78, ФИАН СССР, 1987.

[46] Ковалев В.Ф., Пустовалов В.В. "Функциональная автомодельность в одной задаче теории плазмы с электронной нелинейностью", ТМФ **81** (1989), No 1(10), 69-85.

[47] Goldenfeld N., Martin O. and Oono Y. "Intermediate Asymptotics and Renormalization Group Theory" *J.Sci.Comput.(USA)*, **4** (1990) 355-72.

[48] Kovalev V.F., Krivenko S.V. and Pustovalov V.V. "The RG method based on group analysis", in [44].

[49] Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, М., Наука, 1978.

[50] Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в мат. физике*, М., Наука, 1983.

[51] Sophus Lie. *Gesammelte Abhandlungen.* Leipzig–Oslo, Bd.5, 1924; Bd 6, 1927.

[52] Ковалев В.Ф., Кривенко С.В. и Пустовалов В.В. "Симметрия Ли и группа на решении краевой задачи", *Дифференциальные Уравнения*, **30** No 10, (1994).

[53] Амбарцумян В.А. *Астр.Журнал*, **19** No 5, 30 (1942); *ДАН СССР* **38** No 8, 257 (1943); *Изв. АН Арм. ССР*, естеств. науки, No 1-2, стр 37; см также *Научные труды* , том 1, 1960, Изд. АН Арм.ССР.

[54] Григорьев, Ю.С. Мелешко С.В. "Групповой анализ интегродифференциального уравнения Больцмана, *ДАН СССР* (1987) **297** 323.

[55] Фущич В.И., Штелень В.М. и Серов Н.И. *Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики* Киев: Наукова Думка, 1989 (гл. 5, с. 275-278)

[56] Ковалев В.Ф., Кривенко С.В. и Пустовалов В.В. "Групповой анализ кинетического уравнения Власова", *Дифф. Уравнения* **29** (1993) 1804-1817; 1971-1983.

**Рукопись поступила в издательский отдел
3 августа 1994 года.**