объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-94-226

В.К.Мельников

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ИСТОЧНИКОМ

Направлено в «Bulletin of the Techn. University of Istanbul»

1994

Нелинейное уравнение Шредингера имеет обширную область применения. Еще более обширную область применения имеет нелинейное уравнение Шредингера с источником [1]. Однако приближенные методы интегрирования, применявшиеся до сих пор к исследованию нелинейного уравнения Шредингера с источником, оставляют чувство неудовлетворенности. Причин для этого несколько, но наиболее важной, пожалуй, является то обстоятельство, что нелинейное уравнение Шредингера без источника допускает интегрирование с помощью метода обратной задачи рассеяния [2], а многочисленные попытки применить этот метод к исследованию нелинейного уравнения Шредингера с источником до недавнего времени давали только приближенные результаты. И это несмотря на то, что уже сравнительно давно подмечена нетривиальная аналогия между методом Фурье и методом обратной задачи рассеяния [3,4]. Намеченное этими работами направление плодотворно развивается и в настоящее время [5,6]. Однако более успешным оказался подход, примененный ранее в работах [7—10] к исследованию уравнения Кортевега — де Вриса с источником. Ключевым моментом в этом подходе является представление источника в виде интеграла Фурье по собственным функциям так называемого порождающего оператора. Применительно к случаю нелинейного уравнения Шредингера это значит, что метод обратной задачи рассеяния позволяет проинтегрировать нелинейное уравнение Шредингера с источником, если источник представлен в виде интеграла Фурье от некоторых билинейных форм, образованных собственными функциями соответствующего оператора Дирака.

Более точно, в настоящей работе показано, что метод обратной задачи рассеяния применим для исследования следующей системы уравнений:

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial t} + 2|u|^2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\mathrm{i}\sum_{n=1}^{N} [\varphi_n(x,t)\,p_n(x,t) - \overline{\psi}_n(x,t)\,\overline{q}_n(x,t)] + 2\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} [C(t,\zeta)\,\varphi^2(x,t,\zeta) - D(t,\zeta)\,\varphi(x,t,\zeta)\,\overline{\psi}(x,t,\zeta) - \overline{C}(t,\zeta)\,\overline{\psi}^2(x,t,\zeta)]\,d\zeta, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} + u\psi_n - \mathrm{i}\eta_n\varphi_n = \frac{\partial\psi_n}{\partial x} - \overline{u}\varphi_n + \mathrm{i}\eta_n\psi_n = 0,\ n = 1,\ldots,N, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial x} + uq_n - \mathrm{i}\eta_n p_n = \frac{\partial q_n}{\partial x} - \overline{u}p_n + \mathrm{i}\eta_n q_n = 0,\ \ n = 1,\ldots,N, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + u\psi - \mathrm{i}\zeta\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial x} - \overline{u}\varphi + \mathrm{i}\zeta\psi = 0,\ \ \zeta\in(-\infty,\infty), \tag{4}$$

где черта означает комплексное сопряжение, функция $C = C(t,\zeta)$ может принимать комплексные значения, а функция $D = D(t,\zeta)$ принимает только вещественные значения. При этом нас будет интересовать случай, когда функция $u = u(x,t)$ убывает достаточно быстро при $x \to \pm\infty$. Именно, мы будем предполагать, что функция $u = u(x,t)$ при любом $t \geq 0$ удовлетворяет условию

$$\sum_{r=0}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^r u(x,t)}{\partial x^r}\right| dx < \infty. \tag{5}$$

В соответствии с неравенством (5) мы будем считать, что решения $\varphi_n = \varphi_n(x,t)$, $\psi_n = \psi_n(x,t)$ и $p_n = p_n(x,t)$, $q_n = q_n(x,t)$ соответственно систем (2) и (3) при любом $t \geq 0$ и $n = 1,\ldots,N$ удовлетворяют требованиям

$$|\varphi_n(x,t)| + |\psi_n(x,t)| \to \infty, \qquad \text{если } x \to \pm\infty,$$

$$|p_n(x,t)| + |q_n(x,t)| \to 0, \qquad \text{если } x \to \pm\infty. \tag{6}$$

Отсюда, в частности, следует, что точки $\eta = \eta_n$ являются точками дискретного спектра оператора L вида

$$L = \Lambda\partial + U, \qquad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{7}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\,(1,-1), \qquad U = \begin{vmatrix} 0 & u \\ \overline{u} & 0 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

При этом оказалось, что точки $\eta = \eta_n$ дискретного спектра оператора L вида (7), (8) зависят от времени. В случае, когда собственные значения являются простыми, эта зависимость имеет вид

$$\mathrm{i}\,\frac{d\eta_n}{dt} = W_n, \qquad n = 1,\ldots,N, \tag{9}$$

где величины W_n определяются посредством равенства

$$W_n = \varphi_n(x,t)\,q_n(x,t) - \psi_n(x,t)\,p_n(x,t) \tag{10}$$

и в силу уравнений (2), (3) не зависят от x. Далее, мы предположим, что решение $\varphi = \varphi(x,t,\zeta)$, $\psi = \psi(x,t,\zeta)$ системы (4) при любом $t \geq 0$ и $\zeta \in (-\infty,\infty)$ обладает асимптотикой вида

$$\varphi \sim a(t,\zeta)\,\exp(\mathrm{i}\zeta x),$$
$$\psi \sim b(t,\zeta)\,\exp(-\mathrm{i}\zeta x), \quad x\to-\infty, \tag{11}$$

где функции $a = a(t,\zeta)$ и $b = b(t,\zeta)$ принимают, вообще говоря, комплексные значения. Единственные ограничения, которые нужно наложить на функции a, b и на входящие в правую чать уравнения (1) функции C, D, сводятся к требованиям их непрерывности и дифференцируемости по ζ и достаточно быстрого убывания при $\zeta\to\pm\infty$. Это требования должны, во-первых, обеспечить нам возможность использования функций a, b, C и D в интегралах типа Коши, а во-вторых, они должны гарантировать нам, что в правой части уравнения (1) стоит функция абсолютно интегрируемая по x на всей вещественной оси.

Здесь нелишне отметить, что квадратичная форма $K = C\varphi^2 - D\varphi\overline{\psi} - \overline{C}\overline{\psi}^2$ при допускаемой системой (4) замене решения φ,ψ на решение φ', ψ' посредством равенств

$$\varphi = \mu\varphi' - \nu\overline{\psi}', \qquad \psi = \mu\psi' + \nu\overline{\varphi}' \tag{12}$$

принимает вид $K = C'\varphi'^2 - D'\varphi'\overline{\psi}' - \overline{C}'\overline{\psi}'^2$, где $C' = C\mu^2 - D\mu\overline{\nu} - \overline{C}\overline{\nu}^2$, $D' = 2C\mu\nu + D(|\mu|^2 - |\nu|^2) + 2\overline{C}\overline{\mu}\,\overline{\nu}$. Отсюда следует, что, полагая

$$\mu = [D \pm (D^2 + 4|C|^2)^{1/2}]\lambda, \qquad \nu = 2\overline{C}\,\overline{\lambda},$$

где λ — произвольная комплексная величина, мы получим равенство $C' = 0$. Наоборот, полагая

$$\mu = D\rho, \qquad \nu = [2|C| \pm (D^2 + 4|C|^2)^{1/2}]\,\frac{|C|}{C}\,\overline{\rho},$$

где ρ — произвольная комплексная величина, мы получим равенство $D' = 0$. Очевидно, что в силу (11) и (12) решение $\varphi' = \varphi'(x,t,\zeta)$, $\psi' = \psi'(x,t,\zeta)$ системы (4) при $x\to-\infty$ обладает асимптотикой

$$\varphi' \sim \frac{\overline{\mu}a + \nu\overline{b}}{|\mu|^2 + |\nu|^2}\exp(\mathrm{i}\zeta x), \qquad \psi' \sim \frac{\overline{\mu}b - \nu\overline{a}}{|\mu|^2 + |\nu|^2}\exp(-\mathrm{i}\zeta x).$$

Таким образом, соответствующий выбор решения системы (4) позволяет существенно упростить выражение, стоящее под интегралом в правой части уравнения (1). Однако, учитывая то обстоятельство, что в теории интеграла Фурье базис выбирается на основе своих собственных критериев, мы всюду в дальнейшем будем рассматривать уравнение (1) в его наиболее общем виде.

В настоящей работе мы получим эволюционные уравнения для всех данных рассеяния оператора L вида (7), (8) с потенциалом $u = u(x,t)$, удовлетворяющим системе (1)—(4). Это позволит нам с помощью метода обратной задачи рассеяния по любой функции $u_0 = u_0(x)$, удовлетворяющей условию (5), построить решение задачи Коши для системы (1)—(4). Центральным моментом при нахождении эволюционных уравнений для данных рассеяния оператора L является использование так называемых определяющих соотношений. Эти соотношения играют ту же роль, что операторное представление Лакса в случае нелинейного уравнения Шредингера без источника. Для изучения нескольких частных случаев рассматриваемой здесь системы (1)—(4) определяющие соотношения уже использовались ранее [11,12].

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Определяющие соотношения для системы (1)—(4) строятся следующим образом. Для любого $\eta\in(-\infty,\infty)$ рассмотрим линейную систему уравнений

$$(L - \mathrm{i}\eta)f_0 = 0, \qquad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \widetilde{\Psi}_n f_0, \qquad n = 1,\dots,2N, \tag{13}$$

относительно неизвестных величин $f_0, f_1, \dots, f_{2N}$. При этом мы предполагаем, что f_0 является квадратной матрицей второго порядка, а величины $\Psi_1 = \Psi_1(x), \dots, \Psi_{2N} = \Psi_{2N}(x)$ являются векторами-столбцами с двумя компонентами каждый. Здесь, как и всюду в дальнейшем, знак тильда «~» означает транспонирование, т.е., в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке. Отсюда следует, что величины $f_1, \dots, f_{2N}$ являются векторами-строками с двумя компонентами каждый. Пусть, далее, двухкомпонентный вектор-строка $F = F(x,\zeta,\eta)$ связан с двухкомпонентным вектором-столбцом $\Psi = \Psi(x,\zeta)$ посредством соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,\zeta,\eta) = \widetilde{\Psi}(x,\zeta)\,f_0(x,\eta), \ \zeta,\eta\in(-\infty,\infty). \tag{14}$$

Возьмем, наконец, оператор A вида [2]

$$A = -\mathrm{i}\,(2\Lambda\partial^2 + U\partial + \partial\cdot U + \Lambda U^2). \tag{15}$$

С помощью решения $f_0, f_1, \dots, f_{2N}$ системы (13) и удовлетворяющего соотношению (14) вектора F при любом $\eta\in(-\infty,\infty)$ определим величины $g_0, g_1, \dots, g_{2N}$ и G посредством равенств

$$g_0=\frac{\partial f_0}{\partial t}+Af_0+\sum_{n=1}^{2N}\Phi_n f_n+\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x,\zeta)\,F(x,\zeta,\eta)\,d\zeta,$$

$$g_n=\widetilde{\Psi}_n(x)\,\Lambda f_0(x,\eta)-\mathrm{i}(\eta-\eta_n)\,f_n(x,\eta),\quad n=1,\dots,2N,$$

$$G=\widetilde{\Psi}\,(x,\zeta)\,\Lambda f_0(x,\eta)+\mathrm{i}(\zeta-\eta)\,F(x,\zeta,\eta),\quad \zeta\in(-\infty,\infty),\tag{16}$$

где $\Phi_1=\Phi_1(x),\dots,\Phi_{2N}=\Phi_{2N}(x)$ и $\Phi=\Phi\,(x,\zeta)$ являются двухкомпонентными векторами-столбцами. Из этих равенств следует, что g_0 является квадратной матрицей второго порядка, а $g_1,\dots,g_{2N}$ и G являются двухкомпонентными векторами-строками.

Выясним теперь, каким требованиям должны удовлетворять матрица U и векторы $\Phi_1,\dots,\Phi_{2N},\Phi,\Psi_1,\dots,\Psi_{2N},\Psi$ для того, чтобы определенные посредством (13)—(16) матрица g_0 и векторы $g_1,\dots,g_{2N},G$ при любом $\eta\in(-\infty,\infty)$ удовлетворяли соотношениям

$$(L-\mathrm{i}\eta)\,g_0=\sum_{n=1}^{2N}\Phi_n g_n+\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\,(x,\zeta)\,G(x,\zeta,\eta)\,d\zeta,$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial x}\equiv 0,\quad n=1,\dots,2N,\quad \frac{\partial G}{\partial x}\equiv 0,\quad \zeta\in(-\infty,\infty).\tag{17}$$

С помощью несложных вычислений нетрудно убедиться, что для справедливости соотношений (17) необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\frac{\partial L}{\partial t}+[A,L]=\sum_{n=1}^{2N}[\Lambda,\Phi_n\widetilde{\Psi}_n]+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}[\Lambda,\Phi\,(x,\zeta)\,\widetilde{\Psi}\,(x,\zeta)]\,d\zeta,\tag{18}$$

$$(L-\mathrm{i}\eta_n)\,\Phi_n=(\widetilde{L}-\mathrm{i}\eta_n)\,\Psi_n=0,\qquad n=1,\dots,2N,\tag{19}$$

$$(L-\mathrm{i}\zeta)\,\Phi=(\widetilde{L}-\mathrm{i}\zeta)\,\Psi=0,\qquad \zeta\in(-\infty,\infty),\tag{20}$$

где

$$\widetilde{L}=-\Lambda\partial+\widetilde{U}.\tag{21}$$

Предположим теперь, что величины $\eta_1,\dots,\eta_{2N}$ удовлетворяют условию

$$\eta_{N+n}=\overline{\eta}_n,\qquad n=1,\dots,N,\tag{22}$$

и положим при $n=1,\dots,N$

$$\Phi_n=\begin{vmatrix}\varphi_n(x)\\ \psi_n(x)\end{vmatrix},\qquad \Psi_n=\begin{vmatrix}q_n(x)\\ p_n(x)\end{vmatrix},\tag{23}$$

где компоненты φ_n,ψ_n и p_n,q_n удовлетворяют соответственно системам (2) и (3). Далее, с учетом равенств (22) и (23) полагаем при $n=1,\dots,N$

$$\Phi_{N+n}=\begin{vmatrix}-\overline{\psi}_n(x)\\ \overline{\varphi}_n(x)\end{vmatrix},\qquad \Psi_{N+n}=\begin{vmatrix}-\overline{p}_n(x)\\ \overline{q}_n(x)\end{vmatrix}.\tag{24}$$

Нетрудно видеть, что определенные таким образом векторы Φ_n и Ψ_n в силу (7), (8) и (21) удовлетворяют уравнениям (19) при $n=1,\dots,2N$. Кроме того, в силу (23) и (24) выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{2N}[\Lambda,\Phi_n\widetilde{\Psi}_n]=\begin{vmatrix}0 & P\\ \overline{P} & 0\end{vmatrix},\tag{25}$$

где

$$P=2\sum_{n=1}^{N}[\varphi_n(x)\,p_n(x)-\overline{\psi}_n(x)\,\overline{q}_n(x)].\tag{26}$$

Наконец, положим при $\zeta\in(-\infty,\infty)$

$$\Phi=\begin{vmatrix}\varphi & -\overline{\psi}\\ \psi & \overline{\varphi}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_{11}\\ c_{12}\end{vmatrix},\qquad \Psi=\begin{vmatrix}\psi & \overline{\varphi}\\ \varphi & -\overline{\psi}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_{21}\\ c_{22}\end{vmatrix},\tag{27}$$

где $\varphi=\varphi\,(x,\zeta),\psi=\psi\,(x,\zeta)$ — решение системы (4), а величины $c_{\alpha\beta}$ не зависят от x, $\alpha,\beta=1,2$. Очевидно, что так определенные векторы Φ и Ψ удовлетворяют уравнениям (20) при любом $\zeta\in(-\infty,\infty)$. Согласно (27) справедливо равенство

$$[\Lambda,\Phi\widetilde{\Psi}]=2\begin{vmatrix}0 & Q\\ R & 0\end{vmatrix},$$

где

$$Q=c_{11}c_{21}\varphi^2-(c_{11}c_{22}+c_{12}c_{21})\,\varphi\overline{\psi}+c_{12}c_{22}\overline{\psi}^2,$$

$$R=-c_{12}c_{22}\overline{\varphi}^2-(c_{11}c_{22}+c_{12}c_{21})\,\overline{\varphi}\psi-c_{11}c_{21}\psi^2.$$

Предположим теперь, что величины $c_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta=1,2$, удовлетворяют условиям

$$c_{11}c_{21}+\overline{c}_{12}\overline{c}_{22}=0,\qquad c_{11}c_{22}+c_{12}c_{21}=\overline{c}_{11}\overline{c}_{22}+\overline{c}_{12}\overline{c}_{21}.\tag{28}$$

В соответствии с этими условиями положим

$$C=c_{11}c_{21},\qquad D=c_{11}c_{22}+c_{12}c_{21}.\tag{29}$$

Из условий (28) следует, что между величинами Q и R имеется связь $R = \overline{Q}$, т.е. выполняется равенство

$$[\Lambda, \Phi\widetilde{\Psi}] = 2 \begin{vmatrix} 0 & Q \\ \overline{Q} & 0 \end{vmatrix}, \tag{30}$$

где на основе равенств (29) имеем

$$Q = C\varphi^2 - D\varphi\overline{\psi} - \overline{C}\overline{\psi}^2. \tag{31}$$

Воспользуемся теперь вытекающим из (7), (8) и (15) равенством

$$[A, L] \doteq -\mathrm{i}\Lambda \left(2U^3 + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

С помощью (25), (26), (30) и (31) получаем, что равенство (18) эквивалентно уравнению (1). Таким образом, мы убедились, что равенства (18)—(20) эквивалентны системе уравнений (1)—(4), т.е. система (1)—(4) является необходимым и достаточным условием для справедливости соотношений (17). Замечательной особенностью соотношений (17) является то обстоятельство, что с их помощью удается получить эволюционные уравнения для всех данных рассеяния оператора L вида (7), (8), необходимых для решения обратной задачи рассеяния. Поэтому они и называются определяющими соотношениями. Достигается это следующим образом.

2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ В СЛУЧАЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

В том случае, когда потенциал $u = u(x, t)$ при любом $t \geq 0$ удовлетворяет условию (5), определяющие соотношения (17) могут быть существенно упрощены. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнение

$$(L - \mathrm{i}\eta) f_0 = 0. \tag{32}$$

При любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ уравнение (32) имеет решения f_0^- и f_0^+, обладающие асимптотиками

$$\begin{aligned} f_0^- &\sim \exp(\mathrm{i}\eta\Lambda x), && \text{если } x \to -\infty, \\ f_0^+ &\sim \exp(\mathrm{i}\eta\Lambda x), && \text{если } x \to \infty. \end{aligned} \tag{33}$$

Положим

$$f_0^- = \begin{vmatrix} \varphi_1^- & \varphi_2^- \\ \psi_1^- & \psi_2^- \end{vmatrix}, \qquad f_0^+ = \begin{vmatrix} \varphi_1^+ & \varphi_2^+ \\ \psi_1^+ & \psi_2^+ \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Как известно, решения $\varphi_1^- = \varphi_1^-(x, \eta)$, $\psi_1^- = \psi_1^-(x, \eta)$ и $\varphi_2^+ = \varphi_2^+(x, \eta)$, $\psi_2^+ = \psi_2^+(x, \eta)$ допускают аналитическое продолжение по параметру η в нижнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,\eta < 0$. При этом в замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\,\eta \leq 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} [\varphi_1^-(x, \eta) \exp(-\mathrm{i}\eta x)] &= \lim_{x\to\infty} [\psi_2^+(x, \eta) \exp(\mathrm{i}\eta x)] = 1, \\ \lim_{x\to-\infty} [\psi_1^-(x, \eta) \exp(-\mathrm{i}\eta x)] &= \lim_{x\to\infty} [\varphi_2^+(x, \eta) \exp(\mathrm{i}\eta x)] = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Таким образом, при любом η, принадлежащем нижней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\eta < 0$, решение φ_1^-, ψ_1^- экспоненциально убывает при $x \to -\infty$, а решение φ_2^+, ψ_2^+ экспоненциально убывает при $x \to \infty$. Далее, известно, что решения $\varphi_2^- = \varphi_2^-(x, \eta)$, $\psi_2^- = \psi_2^-(x, \eta)$ и $\varphi_1^+ = \varphi_1^+(x, \eta)$, $\psi_1^+ = \psi_1^+(x, \eta)$ допускают аналитическое продолжение по параметру η в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,\eta > 0$. При этом в замкнутой полуплоскости $\mathrm{Im}\,\eta \geq 0$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} [\varphi_2^-(x, \eta) \exp(\mathrm{i}\eta x)] &= \lim_{x\to\infty} [\psi_1^+(x, \eta) \exp(-\mathrm{i}\eta x)] = 0, \\ \lim_{x\to-\infty} [\psi_2^-(x, \eta) \exp(\mathrm{i}\eta x)] &= \lim_{x\to\infty} [\varphi_1^+(x, \eta) \exp(-\mathrm{i}\eta x)] = 1. \end{aligned} \tag{36}$$

Отсюда следует, что при любом η, принадлежащем верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\eta > 0$, решение φ_2^-, ψ_2^- экспоненциально убывает при $x \to -\infty$, а решение φ_1^+, ψ_1^+ экспоненциально убывает при $x \to \infty$.

При любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ имеет место равенство

$$f_0^+(x, \eta) = f_0^-(x, \eta)\, S(\eta), \tag{37}$$

где элементы $S_{\alpha\beta}(\eta)$ матрицы $S(\eta)$ не зависят от x, $\alpha, \beta = 1, 2$. С помощью (33), (34) и (37) легко находим, что при любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} S_{11}(\eta) &= \varphi_1^+(x, \eta)\, \psi_2^-(x, \eta) - \psi_1^+(x, \eta)\, \varphi_2^-(x, \eta), \\ S_{12}(\eta) &= \varphi_2^+(x, \eta)\, \psi_2^-(x, \eta) - \psi_2^+(x, \eta)\, \varphi_2^-(x, \eta), \\ S_{21}(\eta) &= \varphi_1^-(x, \eta)\, \psi_1^+(x, \eta) - \psi_1^-(x, \eta)\, \varphi_1^+(x, \eta), \\ S_{22}(\eta) &= \varphi_1^-(x, \eta)\, \psi_2^+(x, \eta) - \psi_1^-(x, \eta)\, \varphi_2^+(x, \eta). \end{aligned} \tag{38}$$

Нетрудно убедиться, что при любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ выполняются соотношения

$$\varphi_1^-(x,\eta) = \overline{\psi}_2^-(x,\eta), \qquad \psi_1^-(x,\eta) = -\overline{\varphi}_2^-(x,\eta),$$

$$\varphi_1^+(x,\eta) = \overline{\psi}_2^+(x,\eta), \qquad \psi_1^+(x,\eta) = -\overline{\varphi}_2^+(x,\eta). \tag{39}$$

В силу (39) из равенств (38) следует, что при любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ имеет место связь

$$S_{22}(\eta) = \overline{S}_{11}(\eta), \qquad S_{21}(\eta) = -\overline{S}_{12}(\eta). \tag{40}$$

Из сказанного выше следует, что в соответствии с равенствами (38) функция $S_{11}(\eta)$ допускает аналитическое продолжение по η в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$, а функция $S_{22}(\eta)$ допускает аналитическое продолжение по η в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\eta < 0$. Более того, при любом η, принадлежащем нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta < 0$, справедливы равенства

$$\psi_2^-(x,\overline{\eta}) = \overline{\varphi}_1^-(x,\eta), \qquad \varphi_2^-(x,\overline{\eta}) = -\overline{\psi}_1^-(x,\eta),$$

$$\varphi_1^+(x,\overline{\eta}) = \overline{\psi}_2^+(x,\eta), \qquad \psi_1^+(x,\overline{\eta}) = -\overline{\varphi}_2^+(x,\eta). \tag{41}$$

Согласно (38) и (41) при любом η, принадлежащем верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$, выполняется соотношение

$$S_{22}(\overline{\eta}) = \overline{S}_{11}(\eta), \qquad \operatorname{Im}\eta > 0. \tag{42}$$

Нулям $\eta = \eta_n$ функции $S_{11}(\eta)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$ соответствуют точки дискретного спектра оператора L, так как на основе (38) при $\eta = \eta_n$ имеют место равенства

$$\varphi_1^+(x,\eta_n) = B_n\varphi_2^-(x,\eta_n), \qquad \psi_1^+(x,\eta_n) = B_n\psi_2^-(x,\eta_n), \tag{43}$$

где величины B_n не зависят от x. С учетом (36) получаем, что левые и правые части равенств (43) убывают экспоненциально при $x \to \pm\infty$. Аналогичным образом, нулям $\eta = \widehat{\eta}_n$ функции $S_{22}(\eta)$ в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta < 0$ также соответствуют точки дискретного спектра оператора L, поскольку в силу (38) при $\eta = \widehat{\eta}_n$ справедливы равенства

$$\varphi_2^+(x,\widehat{\eta}_n) = \widehat{B}_n\varphi_1^-(x,\widehat{\eta}_n), \qquad \psi_2^+(x,\widehat{\eta}_n) = \widehat{B}_n\psi_1^-(x,\widehat{\eta}_n), \tag{44}$$

где величины $\widehat{B}_n$ не зависят от x. В соответствии с (35) получаем, что левые и правые части равенств (44) экспоненциально убывают при $x \to \pm\infty$. При этом согласно (42) каждому нулю $\eta = \eta_n$ функции $S_{11}(\eta)$, лежащему в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$, соответствует лежащий в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta < 0$ нуль $\eta = \widehat{\eta}_n$ функции $S_{22}(\eta)$, такой, что $\widehat{\eta}_n = \overline{\eta}_n$. Кроме того, на основе равенств (41), (43) и (44) находим, что между величинами B_n и $\widehat{B}_n$ имеется связь $\widehat{B}_n = -\overline{B}_n$.

С помощью приведенных выше вспомогательных фактов мы в состоянии произвести объявленные ранее упрощения определяющих соотношений (17). С этой целью возьмем лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$ точки $\eta = \eta_n$ дискретного спектра оператора L вида (7), (8), $n = 1,\ldots,N$, т.е. нули функции $S_{11}(\eta)$, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$, и, следуя (23) и (24), положим при $n = 1,\ldots,N$

$$\Phi_n = \begin{vmatrix} \varphi_n(x) \\ \psi_n(x) \end{vmatrix}, \qquad \Psi_n = \begin{vmatrix} q_n(x) \\ p_n(x) \end{vmatrix} = c_n \begin{vmatrix} \psi_1^+(x,\eta_n) \\ \varphi_1^+(x,\eta_n) \end{vmatrix},$$

$$\Phi_{N+n} = \begin{vmatrix} -\overline{\psi}_n(x) \\ \overline{\varphi}_n(x) \end{vmatrix}, \quad \Psi_{N+n} = \begin{vmatrix} -\overline{p}_n(x) \\ \overline{q}_n(x) \end{vmatrix} = \overline{c}_n \begin{vmatrix} -\overline{\varphi}_1^+(x,\eta_n) \\ \overline{\psi}_1^+(x,\eta_n) \end{vmatrix}, \tag{45}$$

где величины c_n не зависят от x, $n = 1,\ldots,N$, а решение $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ системы (2) в соответствии с требованиями (6) удовлетворяет условию

$$\varphi_n(x)\,\psi_1^+(x,\eta_n) - \psi_n(x)\,\varphi_1^+(x,\eta_n) \equiv 1, \qquad n = 1,\ldots,N. \tag{46}$$

Далее, с учетом (13) положим при $\eta \in (-\infty, \infty)$ и $n = 1,\ldots,2N$

$$f_n^- = \int_{-\infty}^{x} \widetilde{\Psi}_n(z)\, f_0^-(z,\eta)\,dz, \qquad f_n^+ = -\int_{x}^{\infty} \widetilde{\Psi}_n(z)\, f_0^+(z,\eta)\,dz. \tag{47}$$

В силу (34)—(36) и (45) из равенств (47) вытекает, что при любом $n = 1,\ldots,2N$ первая компонента вектора f_n^- и последняя компонента вектора f_n^+ допускают аналитическое продолжение по η в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\eta < 0$, а последняя компонента вектора f_n^- и первая компонента вектора f_n^+ допускают аналитическое продолжение по η в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$. Наконец, при любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ положим

$$\Phi = f_0^-(x,\eta)\,\alpha, \qquad \Psi = \sigma f_0^-(x,\eta)\,\beta, \tag{48}$$

где α и β — двухкомпонентные векторы-столбцы с не зависящими от x компонентами α_1, α_2 и β_1, β_2 соответственно, а матрица σ имеет вид

$$\sigma = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{49}$$

С помощью несложных вычислений, основанных на (11) и (49), нетрудно убедиться, что равенства (27) и (48) определяют совпадающие величины, если выполняются условия

$$\alpha_1 = c_{11}a - c_{12}\bar{b}, \qquad \alpha_2 = c_{11}b + c_{12}\bar{a},$$
$$\beta_1 = c_{21}a - c_{22}\bar{b}, \qquad \beta_2 = c_{21}b + c_{22}\bar{a}. \tag{50}$$

Возьмем теперь двухкомпонентные векторы-столбцы F_- и F_+ вида

$$F_- = \frac{i}{\zeta - \eta}\,\tilde{\Psi}(x,\zeta)\,\Lambda f_0^-(x,\eta),$$
$$F_+ = \frac{i}{\zeta - \eta}\,\tilde{\Psi}(x,\zeta)\,\Lambda f_0^+(x,\eta). \tag{51}$$

Нетрудно видеть, что первая компонента вектора F_- и последняя компонента вектора F_+ при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ определены как аналитические функции параметра η в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta < 0$, а последняя компонента вектора F_- и первая компонента вектора F_+ при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ определены как аналитические функции параметра η в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$. Все они также определены и при любом вещественном $\eta \neq \zeta$. Однако в точке $\eta = \zeta$ они все имеют особенности. На основе (48) легко убедиться, что при любом вещественном $\eta \neq \zeta$ выполняются аналогичные (14) равенства

$$\frac{\partial}{\partial x} F_-(x,\zeta,\eta) = \tilde{\Psi}(x,\zeta)\, f_0^-(x,\eta),$$
$$\frac{\partial}{\partial x} F_+(x,\zeta,\eta) = \tilde{\Psi}(x,\zeta)\, f_0^+(x,\eta). \tag{52}$$

Далее, в соответствии с равенствами (16) и с учетом (52) положим

$$g_0^- = \frac{\partial f_0^-}{\partial t} + A f_0^- + \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n f_n^- + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,\zeta)\, F_-(x,\zeta,\eta)\, d\zeta,$$
$$g_0^+ = \frac{\partial f_0^+}{\partial t} + A f_0^+ + \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n f_n^+ + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,\zeta)\, F_+(x,\zeta,\eta)\, d\zeta, \tag{53}$$

$$g_n^- = \tilde{\Psi}_n(x)\,\Lambda f_0^-(x,\eta) - i(\eta - \eta_n)\, f_n^-(x,\eta), \qquad n = 1,\ldots, 2N,$$
$$g_n^+ = \tilde{\Psi}_n(x)\,\Lambda f_0^+(x,\eta) - i(\eta - \eta_n)\, f_n^+(x,\eta), \qquad n = 1,\ldots, 2N, \tag{54}$$

$$G_- = \tilde{\Psi}(x,\zeta)\,\Lambda f_0^-(x,\eta) + i(\zeta - \eta)\, F_-(x,\zeta,\eta), \qquad \zeta \in (-\infty, \infty),$$
$$G_+ = \tilde{\Psi}(x,\zeta)\,\Lambda f_0^+(x,\eta) + i(\zeta - \eta)\, F_+(x,\zeta,\eta), \qquad \zeta \in (-\infty, \infty). \tag{55}$$

При этом мы предполагаем, что $\eta_{N+n} = \bar{\eta}_n$, $n = 1,\ldots, N$. Из равенства (53) следует, что первый столбец матрицы g_0^- и последний столбец матрицы g_0^+ определены как аналитические функции параметра η в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta < 0$, а последний столбец матрицы g_0^- и первый столбец матрицы g_0^+ определены как аналитические функции параметра η в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$. По непрерывности все эти величины могут быть определены и при любых вещественных значениях параметра η. С помощью несложных вычислений легко находим, что при любых вещественных значениях параметра η справедливы равенства

$$g_0^- = \frac{\partial f_0^-}{\partial t} + A f_0^- + \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n f_n^- + \fint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,\zeta)\, F_-(x,\zeta,\eta)\, d\zeta +$$
$$+ \pi\, \Phi(x,\eta)\, \tilde{\Psi}(x,\eta)\, \Lambda f_0^-(x,\eta)\, \Lambda,$$
$$g_0^+ = \frac{\partial f_0^+}{\partial t} + A f_0^+ + \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n f_n^+ + \fint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,\zeta)\, F_+(x,\zeta,\eta)\, d\zeta -$$
$$- \pi\, \Phi(x,\eta)\, \tilde{\Psi}(x,\eta)\, \Lambda f_0^+(x,\eta)\, \Lambda, \tag{56}$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения. Далее, согласно (45), (47) и (54) получаем, что при любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ и $n = 1,\ldots, 2N$ справедливы асимптотики

$$\|f_n^-(x,\eta)\| + \|g_n^-(x,\eta)\| \to 0, \qquad \text{если } x \to -\infty,$$
$$\|f_n^+(x,\eta)\| + \|g_n^+(x,\eta)\| \to 0, \qquad \text{если } x \to \infty.$$

Отсюда в соответствии с равенствами $\dfrac{\partial g_n^-}{\partial x} = \dfrac{\partial g_n^+}{\partial x} \equiv 0$ следует, что при любых $x, \eta \in (-\infty, \infty)$ выполняются тождества

$$g_1^- = \ldots = g_{2N}^- = g_1^+ = \ldots = g_{2N}^+ \equiv 0. \tag{57}$$

Наконец, с учетом равенств (51) получаем, что определенные посредством (55) величины G_- и G_+ при любых $x, \zeta, \eta \in (-\infty, \infty)$ равны тождественно нулю, т.е.

$$G_-(x, \zeta, \eta) = G_+(x, \zeta, \eta) \equiv 0. \tag{58}$$

На основе (17) это значит, что задаваемые с помощью равенств (56) матрицы g_0^- и g_0^+ при любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют условиям

$$(L - \mathrm{i}\,\eta)\, g_0^- = (L - \mathrm{i}\,\eta)\, g_0^+ = 0. \tag{59}$$

Таким образом, мы видим, что в случае быстроубывающего потенциала $u = u\,(x, t)$ определяющие соотношения (17) принимают максимально простой вид, определяемый равенствами (57)—(59).

3. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ S-МАТРИЦЫ

На основе равенств (15), (33) и (56) из уравнений (59) следует, что при любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ имеют место соотношения вида

$$g_0^-(x, \eta) = f_0^-(x, \eta)\, (2\,\mathrm{i}\eta^2\Lambda + C^-),$$

$$g_0^+(x, \eta) = f_0^+(x, \eta)\, (2\,\mathrm{i}\eta^2\Lambda + C^+), \tag{60}$$

где матрицы C^- и C^+ не зависят от x. Определим их. В силу (7), (8), (33) и (49) из уравнения (32) вытекают равенства

$$[f_0^-(x, \eta)]^{-1} = \Lambda\sigma \tilde{f}_0^-(x, \eta)\, \sigma\Lambda,$$

$$[f_0^+(x, \eta)]^{-1} = \Lambda\sigma \tilde{f}_0^+(x, \eta)\, \sigma\Lambda. \tag{61}$$

Далее, согласно (48) и (51) получаем равенство

$$I^-(x, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\,(x, \zeta)\, F_-(x, \zeta, \eta)\, d\zeta =$$

$$= \mathrm{i} \fint_{-\infty}^{\infty} f_0^-(x, \zeta)\, \alpha(\zeta)\, \tilde{\beta}(\zeta)\, \tilde{f}_0^-(x, \zeta)\, \sigma\Lambda f_0^-(x, \eta)\, \frac{d\zeta}{\zeta - \eta}.$$

С учетом (61) отсюда следует равенство

$$I^-(x, \eta) = f_0^-(x, \eta)\, J^-(x, \eta),$$

где

$$J^-(x, \eta) = \mathrm{i} \fint_{-\infty}^{\infty} [f_0^-(x, \eta)]^{-1} f_0^-(x, \zeta)\;\; \alpha(\zeta)\, \tilde{\beta}(\zeta)\, \sigma\Lambda \times$$

$$\times [f_0^{-1}(x, \zeta)]^{-1} f_0^-(x, \eta)\, \frac{d\zeta}{\zeta - \eta}.$$

С помощью несложных вычислений на основе (33) находим, что определенная выше матрица $J^-(x, \eta)$ при $x \to -\infty$ имеет предел $J_0^-(\eta)$, т.е.

$$J_0^-(\eta) = \lim_{x \to -\infty} J^-(x, \eta).$$

При этом выполняется равенство

$$J_0^-(\eta) = \begin{vmatrix} J_{11}^-(\eta) & J_{12}^-(\eta) \\ J_{21}^-(\eta) & J_{22}^-(\eta) \end{vmatrix},$$

где

$$J_{11}^-(\eta) = \mathrm{i} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_1(\zeta)\, \beta_2(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta, \qquad J_{12}^-(\eta) = -\,\pi\, \alpha_1(\eta)\, \beta_1(\eta),$$

$$J_{21}^-(\eta) = -\,\pi\, \alpha_2(\eta)\, \beta_2(\eta), \qquad J_{22}^-(\eta) = -\,\mathrm{i} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_2(\zeta)\, \beta_1(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta.$$

С другой стороны, в силу (48) и (61) справедливо равенство

$$\tilde{\Psi}(x, \eta)\, \Lambda f_0^-(x, \eta) = \tilde{\beta}(\eta)\, \sigma\Lambda,$$

т.е. имеем равенство

$$\Phi\,(x, \eta)\, \tilde{\Psi}(x, \eta)\, \Lambda f_0^-(x, \eta)\, \Lambda = f_0^-(x, \eta)\;\, \alpha(\eta)\, \tilde{\beta}(\eta)\, \sigma.$$

Таким образом, в соответствии со сказанным выше получаем, что при $x \to -\infty$ имеет место асимптотика

$$\fint_{-\infty}^{\infty} \Phi\,(x, \zeta)\, F_-(x, \zeta, \eta)\, d\zeta + \pi\Phi\,(x, \eta)\, \tilde{\Psi}(x, \eta)\, \Lambda f_0^-(x, \eta)\, \Lambda \sim$$

$$\sim f_0^-(x, \eta)\, \mathrm{diag}\,(J_1^-, J_2^-), \tag{62}$$

где

$$J_1^- = \mathrm{i} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_1(\zeta)\, \beta_2(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta + \pi\alpha_1(\eta)\, \beta_2(\eta),$$

$$J_2^- = -\,\mathrm{i} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_2(\zeta)\, \beta_1(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta + \pi\alpha_2(\eta)\, \beta_1(\eta). \tag{63}$$

Кроме того, согласно (36), (43) и (46) нетрудно убедиться, что при $x \to -\infty$ справедливы асимптотики

$$B_n \varphi_n(x) \exp(-i\eta_n x) \to 1, \qquad \psi_n(x) \exp(-i\eta_n x) \to 0, \tag{64}$$

а при $x \to \infty$ выполняются асимптотики

$$\varphi_n(x) \exp(i\eta_n x) \to 0, \qquad \psi_n(x) \exp(i\eta_n x) \to -1. \tag{65}$$

Далее, с учетом (33), (36), (43), (45), (47) и (64) легко находим, что при $n = 1,\dots, N$ и $x \to -\infty$ имеют место асимптотики

$$\Phi_n(x) f_n^-(x,\eta) \sim i \frac{c_n}{\eta - \eta_n} \exp(i\eta x) M_1,$$

$$\Phi_{N+n}(x) f_{N+n}^-(x,\eta) \sim i \frac{\bar{c}_n}{\eta - \bar{\eta}_n} \exp(-i\eta x) M_2, \tag{66}$$

где $M_1 = \operatorname{diag}(-1, 0)$, $M_2 = \operatorname{diag}(0, 1)$. Таким образом, с помощью (5), (56), (62) и (66) получаем, что входящая в первое из равенств (60) матрица C^- имеет вид

$$C^- = \operatorname{diag}\left(J_1^- - i\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\eta - \eta_n},\ J_2^- + i\sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{c}_n}{\eta - \bar{\eta}_n}\right), \tag{67}$$

где величины J_1^- и J_2^- были определены ранее посредством равенств (63).

Для того, чтобы определить входящую во второе из равенств (60) матрицу C^+, поступим несколько иначе. На основе (37) и (48) справедливы равенства

$$\Phi = f_0^+(x,\eta)\, v, \qquad \Psi = \sigma f_0^+(x,\eta)\, w, \tag{68}$$

где v и w — двухкомпонентные векторы-столбцы с не зависящими от x компонентами v_1, v_2 и w_1, w_2, соответственно. При этом справедливы равенства

$$v = S^{-1}\alpha, \qquad w = S^{-1}\beta. \tag{69}$$

В силу (51) и (68) выполняется равенство

$$I^+(x,\eta) = \fint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,\zeta)\, F_+(x,\zeta,\eta)\, d\zeta =$$

$$= i \fint_{-\infty}^{\infty} f_0^+(x,\zeta)\, v(\zeta)\, \widetilde{w}(\zeta)\, \widetilde{f}_0^+(x,\zeta)\, \sigma\Lambda\, f_0^+(x,\eta) \frac{d\zeta}{\zeta - \eta}.$$

В соответствии с равенством (61) отсюда следует равенство

$$I^+(x,\eta) = f_0^+(x,\eta)\, J^+(x,\eta),$$

где

$$J^+(x,\eta) = i \fint_{-\infty}^{\infty} [f_0^+(x,\eta)]^{-1} f_0^+(x,\zeta)\, v(\zeta)\, \widetilde{w}(\zeta)\, \sigma\Lambda \times$$

$$\times [f_0^+(x,\zeta)]^{-1} f_0^+(x,\eta) \frac{d\zeta}{\zeta - \eta}.$$

Согласно (33) в результате несложных вычислений получаем, что определенная таким образом матрица $J^+(x,\eta)$ при $x \to \infty$ имеет предел $J_0^+(\eta)$, т.е.

$$J_0^+(\eta) = \lim_{x\to\infty} J^+(x,\eta).$$

При этом имеет место равенство

$$J_0^+(\eta) = \begin{vmatrix} J_{11}^+(\eta) & J_{12}^+(\eta) \\ J_{21}^+(\eta) & J_{22}^+(\eta) \end{vmatrix},$$

где

$$J_{11}^+(\eta) = i \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{v_1(\zeta)\, w_2(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta, \qquad J_{12}^+(\eta) = \pi v_1(\eta)\, w_1(\eta),$$

$$J_{21}^+(\eta) = \pi v_2(\eta)\, w_2(\eta), \qquad J_{22}^+(\eta) = -i \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{v_2(\zeta)\, w_1(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta.$$

Далее, с учетом (61) и (68) получаем равенство

$$\widetilde{\Psi}(x,\eta)\, \Lambda f_0^+(x,\eta) = \widetilde{w}(\eta)\, \sigma\Lambda,$$

т.е. имеем равенство

$$\Phi(x,\eta)\, \widetilde{\Psi}(x,\eta)\, \Lambda f_0^+(x,\eta)\, \Lambda = f_0^+(x,\eta)\, v(\eta)\, \widetilde{w}(\eta)\, \sigma.$$

Таким образом, с помощью приведенных выше равенств убеждаемся, что при $x \to \infty$ выполняется асимптотика

$$\fint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,\zeta)\, F_+(x,\zeta,\eta)\, d\zeta - \pi\Phi(x,\eta)\, \widetilde{\Psi}(x,\eta)\, \Lambda f_0^+(x,\eta)\, \Lambda \sim$$

$$\sim f_0^+(x,\eta) \operatorname{diag}(J_1^+, J_2^+), \tag{70}$$

где

$$J_1^+ = \mathrm{i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{v_1(\zeta)\, w_2(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta - \pi v_1(\eta)\, w_2(\eta),$$

$$J_2^+ = -\mathrm{i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{v_2(\zeta) w_1(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta - \pi v_2(\eta)\, w_1(\eta). \tag{71}$$

С другой стороны, на основе (33), (36), (45), (47) и (65) легко находим, что при $n = 1,\ldots, N$ и $x \to \infty$ справедливы асимптотики

$$\Phi_n(x) f_n^+(x, \eta) \sim -\mathrm{i} \frac{c_n}{\eta - \eta_n} \exp(-\mathrm{i}\eta x)\, M_2,$$

$$\Phi_{N+n}(x) f_{N+n}^+(x, \eta) \sim -\mathrm{i} \frac{\bar{c}_n}{\eta - \bar{\eta}_n} \exp(\mathrm{i}\eta x)\, M_1, \tag{72}$$

где $M_1 = \mathrm{diag}\,(-1, 0)$, $M_2 = \mathrm{diag}\,(0, 1)$. Таким образом, в силу (5), (56), (70) и (72) получаем, что входящая во второе из равенств (60) матрица C^+ имеет вид

$$C^+ = \mathrm{diag} \left(J_1^+ + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{c}_n}{\eta - \bar{\eta}_n},\; J_2^+ - \mathrm{i} \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\eta - \eta_n} \right), \tag{73}$$

где величины J_1^+ и J_2^+ уже определены ранее посредством равенств (71).

Для любого $\eta \in (-\infty, \infty)$ определим матрицу G_0 с помощью равенства

$$G_0 = g_0^+(x, \eta) - g_0^-(x, \eta)\, S(\eta). \tag{74}$$

Согласно (37) и (60) справедливо равенство

$$G_0 = f_0^-(x, \eta)\, \{-2\mathrm{i}\eta^2 [\Lambda, S(\eta)] - C^-(\eta)\, S(\eta) + S(\eta)\, C^+(\eta)\}. \tag{75}$$

С другой стороны, в соответствии с равенствами (37) и (56) легко находим, что

$$g_0^+(x, \eta) = g_0^-(x, \eta)\, S(\eta) + f_0^-(x, \eta) \frac{\partial S(\eta)}{\partial t} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n(x)\, [f_n^+(x, \eta) - f_n^-(x, \eta)\, S(\eta)] +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, \zeta)\, [F_+(x, \zeta, \eta) - F_-(x, \zeta, \eta)\, S(\eta)]\, d\zeta -$$

$$- \pi \Phi(x, \eta)\, \widetilde{\Psi}(x, \eta)\, \Lambda f_0^-(x, \eta)\, [\Lambda S(\eta) + S(\eta)\Lambda].$$

С учетом (37), (45), (47) и (51) убеждаемся в справедливости тождеств

$$f_n^+(x, \eta) - f_n^-(x, \eta)\, S(\eta) \equiv 0, \qquad x, \eta \in (-\infty, \infty), \qquad n = 1,\ldots, 2N,$$

$$F_+(x, \zeta, \eta) - F_-(x, \zeta, \eta)\, S(\eta) \equiv 0, \qquad x, \zeta, \eta \in (-\infty, \infty).$$

Отсюда следует равенство

$$g_0^+(x, \eta) = g_0^-(x, \eta)\, S(\eta) + f_0^-(x, \eta) \frac{\partial S(\eta)}{\partial t} -$$

$$- \pi \Phi(x, \eta)\, \widetilde{\Psi}(x, \eta)\, \Lambda f_0^-(x, \eta)\, [\Lambda S(\eta) + S(\eta)\Lambda].$$

На основе этого равенства в силу (48) и (61) получаем, что определенная посредством (74) величина G_0 допускает представление

$$G_0 = f_0^-(x, \eta) \left\{ \frac{\partial S(\eta)}{\partial t} - \pi\alpha(\eta)\, \widetilde{\beta}(\eta)\, \sigma\, [S(\eta) + \Lambda S(\eta)\, \Lambda] \right\}.$$

Сравнивая это равенство с полученным ранее выражением (75) для G_0, немедленно получаем эволюционное уравнение для матрицы $S(\eta)$ в виде

$$\frac{\partial S(\eta)}{\partial t} + 2\mathrm{i}\eta^2 [\Lambda, S(\eta)] = S(\eta)\, C^+(\eta) - C^-(\eta)\, S(\eta) +$$

$$+ \pi\alpha(\eta)\, \widetilde{\beta}(\eta)\, \sigma\, [S(\eta) + \Lambda S(\eta)\, \Lambda]. \tag{76}$$

С помощью (67) и (73) система (76) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial S_{11}(\eta)}{\partial t} = \left[2\pi\alpha_1(\eta)\, \beta_2(\eta) + J_1^+(\eta) - J_1^-(\eta) + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{c_n}{\eta - \eta_n} + \frac{\bar{c}_n}{\eta - \bar{\eta}_n} \right) \right] S_{11}(\eta),$$

$$\frac{\partial S_{12}(\eta)}{\partial t} + 4\mathrm{i}\eta^2 S_{12}(\eta) = [J_2^+(\eta) - J_1^-(\eta)]\, S_{12}(\eta) + 2\pi\alpha_1(\eta)\, \beta_1(\eta)\, S_{22}(\eta),$$

$$\frac{\partial S_{21}(\eta)}{\partial t} - 4\mathrm{i}\eta^2 S_{21}(\eta) = 2\pi\alpha_2(\eta)\, \beta_2(\eta)\, S_{11}(\eta) + [J_1^+(\eta) - J_2^-(\eta)]\, S_{21}(\eta),$$

$$\frac{\partial S_{22}(\eta)}{\partial t} = \Bigg[2\pi\alpha_2(\eta)\, \beta_1(\eta) + J_2^+(\eta) - J_2^-(\eta) -$$

$$- \mathrm{i} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{c_n}{\eta - \eta_n} + \frac{\bar{c}_n}{\eta - \bar{\eta}_n} \right) \Bigg] S_{22}(\eta). \tag{77}$$

При этом величины J_1^-, J_2^- и J_1^+, J_2^+ определяются соответственно равенствами (63) и (71), а величины $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ находятся согласно равенствам (29) и (50). Существенным недостатком системы (77) является то обстоятельство, что в соответствии с равенствами (69) и (71) величины J_1^+ и J_2^+ сами зависят весьма сложным образом от элементов S-матрицы. Однако этот недостаток легко устраняется, если мы воспользуемся вытекающими из системы (77) эволюционными уравнениями для коэффициентов отражения R_1 и R_2 вида

$$R_1(\eta) = \frac{S_{21}(\eta)}{S_{11}(\eta)}, \qquad R_2(\eta) = \frac{S_{12}(\eta)}{S_{22}(\eta)}. \tag{78}$$

С учетом (77) и (78) нетрудно убедиться, что интересующие нас уравнения имеют вид

$$\frac{\partial R_1(\eta)}{\partial t} = \left[4i\eta^2 - 2\pi\alpha_1(\eta)\beta_2(\eta) + J_1^-(\eta) - J_2^-(\eta) - \right.$$
$$\left. - i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_n}{\eta-\eta_n} + \frac{\bar c_n}{\eta - \bar\eta_n}\right)\right] R_1(\eta) + 2\pi\alpha_2(\eta)\beta_2(\eta),$$
$$\frac{\partial R_2(\eta)}{\partial t} = \left[-4i\eta^2 - 2\pi\alpha_2(\eta)\beta_1(\eta) - J_1^-(\eta) + J_2^-(\eta) + \right.$$
$$\left. + i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_n}{\eta-\eta_n} + \frac{\bar c_n}{\eta - \bar\eta_n}\right)\right] R_2(\eta) + 2\pi\alpha_1(\eta)\beta_1(\eta). \tag{79}$$

На основе уравнений (79) получаем, что безотражательный потенциал ($R_1 = R_2 \equiv 0$) в процессе эволюции остается безотражательным только в случае, когда выполняются условия

$$\alpha_1(\eta)\beta_1(\eta) = \alpha_2(\eta)\beta_2(\eta) \equiv 0. \tag{80}$$

Далее, в силу (63) убеждаемся, что

$$J_1^-(\eta) - J_2^-(\eta) - 2\pi\alpha_1(\eta)\beta_2(\eta) = i\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{h(\zeta)}{\zeta-\eta}\,d\zeta - \pi h(\eta),$$

$$J_1^-(\eta) - J_2^-(\eta) + 2\pi\alpha_2(\eta)\beta_1(\eta) = i\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{h(\zeta)}{\zeta-\eta}\,d\zeta + \pi h(\eta), \tag{81}$$

где

$$h(\eta) = \alpha_1(\eta)\beta_2(\eta) + \alpha_2'(\eta)\beta_1(\eta). \tag{82}$$

Наконец, с помощью (28), (29), (50) и (82) получаем равенства

$$h = 2Cab + D(|a|^2 - |b|^2) + 2\bar C\bar a\bar b,$$
$$\alpha_1\beta_1 = Ca^2 - Da\bar b - \bar C\,\bar b^2, \qquad \alpha_2\beta_2 = Cb^2 + D\bar a b - \bar C\bar a^2. \tag{83}$$

Отсюда следует, что выполняется условие

$$\alpha_1(\eta)\beta_1(\eta) + \bar\alpha_2(\eta)\bar\beta_2(\eta) \equiv 0. \tag{84}$$

Таким образом, согласно (81), (83) и (84) уравнения (79) принимают свой окончательный вид

$$\frac{\partial R_1(\eta)}{\partial t} = \left[4i\eta^2 + i\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{h(\zeta)}{\zeta-\eta}\,d\zeta - \pi h(\eta) - \right.$$
$$\left. - i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_n}{\eta-\eta_n} + \frac{\bar c_n}{\eta - \bar\eta_n}\right)\right] R_1(\eta) + 2\pi\gamma(\eta),$$
$$\frac{\partial R_2(\eta)}{\partial t} = \left[-4i\eta^2 - i\fint_{-\infty}^{\infty}\frac{h(\zeta)}{\zeta-\eta}\,d\zeta - \pi h(\eta) + \right.$$
$$\left. + i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_n}{\eta-\eta_n} + \frac{\bar c_n}{\eta - \bar\eta_n}\right)\right] R_2(\eta) - 2\pi\bar\gamma(\eta), \tag{85}$$

где

$$\gamma = Cb^2 + D\bar a b - \bar C\bar a^2. \tag{86}$$

Из равенств (83) и (86) следует, что коэффициенты системы (85) содержат только известные функции C, D, входящие в правую часть уравнения (1), и величины a, b, определяющие асимптотику (11). Как уже было замечено в самом начале статьи, коэффициенты C, D, входящие в уравнение (1), и величины a, b, определяющие асимптотику (11), при замене (12), вообще говоря, меняются. Однако, как нетрудно убедиться, определенные посредством (83) и (86) величины h и γ при замене (12) не меняются, т.е. являются инвариантами этих преобразований. Далее, из уравнений (85) следует, что равенство $R_1 + \bar R_2 = 0$ будет выполняться при всех $t > 0$, если оно выполняется при $t = 0$. Этот факт в силу (78) находится в полном соответствии с равенством (40). Наконец, с учетом (83) и (86) условие (80) принимает вид $\gamma(\eta) \equiv 0$.

Теперь мы в состоянии проинтегрировать исходную систему (77). Делается это так. Согласно (63) и (71) справедливы равенства

$$2\pi\alpha_1(\eta)\beta_2(\eta) + J_1^+(\eta) - J_1^-(\eta) = \pi H_1(\eta) - \mathrm{i} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta,$$

$$2\pi\alpha_2(\eta)\beta_1(\eta) + J_2^+(\eta) - J_2^-(\eta) = \pi H_2(\eta) - \mathrm{i} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{H_2(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta, \qquad (87)$$

где

$$H_1 = \alpha_1\beta_2 - v_1 w_2, \qquad H_2 = \alpha_2\beta_1 - v_2 w_1.$$

Далее, с учетом (69) и (78) находим, что выполняются равенства

$$H_1 = H_2 = (1 - R_1R_2)^{-1}\,[R_1\alpha_1\beta_1 - R_1R_2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + R_2\alpha_2\beta_2].$$

Отсюда на основе равенств (82), (83) и (86) следует, что функция $H = H_1 = H_2$ имеет вид

$$H = -(1 - R_1R_2)^{-1}(R_1\bar{\gamma} - R_2\gamma + R_1R_2 h). \qquad (88)$$

Таким образом, полученная нами выше фукнция $H = H(\eta)$ в соответствии с уравнениями (85) определена при любом $\eta \in (-\infty, \infty)$ и $t \geq 0$. С помощью равенств (87) первое и последнее уравнения системы (77) могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial S_{11}(\eta)}{\partial t} = \left[\pi H(\eta) - \mathrm{i}\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta + \mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_n}{\eta - \bar{\eta}_n} + \frac{\bar{c}_n}{\eta - \bar{\eta}_n}\right)\right] S_{11}(\eta),$$

$$\frac{\partial S_{22}(\eta)}{\partial t} = \left[\pi H(\eta) + \mathrm{i}\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta - \mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_n}{\eta - \eta_n} + \frac{\bar{c}_n}{\eta - \bar{\eta}_n}\right)\right] S_{22}(\eta), \qquad (89)$$

где функция H определена посредством равенства (88). Определим теперь в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$ функцию $K^+ = K^+(\eta)$, а в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta < 0$ функцию $K^- = K^-(\eta)$ соответственно с помощью равенств

$$K^+(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta, \qquad K^-(\eta) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta. \qquad (90)$$

В силу (88) в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$ выполняется соотношение

$$K^-(\bar{\eta}) = -\bar{K}^+(\eta), \qquad \operatorname{Im}\eta > 0.$$

Кроме того, при вещественных значениях параметра η справедливы равенства

$$K^+(\eta) = \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta + \mathrm{i}\pi H(\eta),$$

$$K^-(\eta) = -\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta + \mathrm{i}\pi H(\eta).$$

Отсюда следует, что решение системы (89) допускает представление

$$S_{11}(\eta) = S_1(\eta)\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{\eta - \eta_n}{\eta - \bar{\eta}_n}\right)^{r_n},$$

$$S_{22}(\eta) = S_2(\eta)\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{\eta - \bar{\eta}_n}{\eta - \eta_n}\right)^{r_n}, \qquad (91)$$

где r_n — кратность нуля $\eta = \eta_n$ функции $S_{11}(\eta)$, эволюция точек дискретного спектра оператора L подчиняется условиям

$$\frac{d\eta_n}{dt} + \mathrm{i}\frac{c_n}{r_n} = 0, \qquad n = 1, \ldots, N, \qquad (92)$$

а функции S_1 и S_2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial S_1(\eta)}{\partial t} + \mathrm{i}\, K^+(\eta)\, S_1(\eta) = \frac{\partial S_2(\eta)}{\partial t} + \mathrm{i}\, K^-(\eta)\, S_2(\eta) = 0. \qquad (93)$$

Согласно (90), (91) и (93) получаем, что функция $S_1(\eta)$ зависит аналитически от параметра η в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$, а функция $S_2(\eta)$ зависит аналитически от параметра η в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta < 0$. Кроме того, справедливы неравенства

$$S_1(\eta_n) \neq 0, \qquad S_2(\bar{\eta}_n) \neq 0, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Далее, с учетом (10), (45) и (46) получаем, что при $r_n = 1$ уравнения (8) и (92) совпадают между собой. Наконец, отметим, что на основе (92) точки $\eta = \eta_n$ дискретного спектра оператора L могут попадать на вещественную ось. Как уже отмечалось ранее [12], это приводит к уничтожению соответствующего солитона. Если в дальнейшем попавшее на вещественную ось собственное значение покидает ее, это приводит к тому, что исчезнувший солитон появляется вновь.

4. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НОРМИРОВОЧНЫХ КОНСТАНТ B_n И $\hat{B}_n$

Пусть σ_r^- и σ_r^+ — векторы-столбцы, образованные соответственно элементами r-го столбца матриц f_0^- и f_0^+ вида (34), $r = 1, 2$. Пусть, далее, τ_r^- и τ_r^+ — векторы-столбцы, образованные соответственно элементами r-го столбца матриц g_0^- и g_0^+ вида (53), $r = 1, 2$. Пусть, наконец, $\eta = \eta_m$ — нули функции $S_{11}(\eta)$, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$, $m = 1,\ldots, N$. В соответствии с равенствами (43) и (44) положим при $m = 1,\ldots, N$

$$G_m = \tau_1^+(x, \eta_m) - B_m \tau_2^-(x, \eta_m),$$
$$\hat{G}_m = \tau_2^+(x, \bar{\eta}_m) - \hat{B}_m \tau_1^-(x, \bar{\eta}_m). \tag{94}$$

С помощью равенств (63) и (71) нетрудно убедиться, что определяемые этими равенствами функции J_1^- и J_2^+ допускают аналитическое продолжение по параметру η в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\eta < 0$, а функции J_2^- и J_1^+ допускают аналитическое продолжение по параметру η в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$. При этом справедливы равенства

$$J_1^-(\eta) = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_1(\zeta)\,\beta_2(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta, \qquad \operatorname{Im}\eta < 0,$$

$$J_2^-(\eta) = -i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_2(\zeta)\,\beta_1(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta, \qquad \operatorname{Im}\eta > 0,$$

$$J_1^+(\eta) = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_1(\zeta)\, w_2(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta, \qquad \operatorname{Im}\eta > 0,$$

$$J_2^+(\eta) = -i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_2(\zeta)\, w_1(\zeta)}{\zeta - \eta}\, d\zeta, \qquad \operatorname{Im}\eta < 0. \tag{95}$$

Отсюда в силу (60), (67) и (73) следуют равенства

$$\tau_1^+(x, \eta_m) = \left[2i\,\eta_m^2 + J_1^+(\eta_m) + i\sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{c}_n}{\eta_m - \bar{\eta}_n}\right] \sigma_1^+(x, \eta_m),$$

$$\tau_2^-(x, \eta_m) = \left[-2i\,\eta_m^2 + J_2^-(\eta_m) + i\sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{c}_n}{\eta_m - \bar{\eta}_n}\right] \sigma_2^-(x, \eta_m),$$

$$\tau_2^+(x, \bar{\eta}_m) = \left[-2i\,\bar{\eta}_m^2 + J_2^+(\bar{\eta}_m) - i\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\bar{\eta}_m - \eta_n}\right] \sigma_2^+(x, \bar{\eta}_m),$$

$$\tau_1^-(x, \bar{\eta}_m) = \left[2i\,\bar{\eta}_m^2 + J_1^-(\bar{\eta}_m) - i\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\bar{\eta}_m - \eta_n}\right] \sigma_1^-(x, \bar{\eta}_m).$$

В соответствии с этими равенствами на основе (43) и (44) получаем, что определенные посредством (94) величины G_m и $\hat{G}_m$ при $m = 1,\ldots, N$ допускают представление

$$G_m = [4i\,\eta_m^2 + J_1^+(\eta_m) - J_2^-(\eta_m)]\, B_m \sigma_2^-(x, \eta_m),$$

$$\hat{G}_m = -[4i\,\bar{\eta}_m^2 + J_1^-(\bar{\eta}_m) - J_2^+(\bar{\eta}_m)]\, \hat{B}_m \sigma_1^-(x, \bar{\eta}_m). \tag{96}$$

Согласно (69), (78), (83), (86) и (95) справедливы равенства

$$J_1^+(\eta_m) - J_2^-(\eta_m) = i\int_{-\infty}^{\infty} [h(\zeta) - H(\zeta)]\, \frac{d\zeta}{\zeta - \eta_m},$$

$$J_1^-(\bar{\eta}_m) - J_2^+(\bar{\eta}_m) = i\int_{-\infty}^{\infty} [h(\zeta) - H(\zeta)]\, \frac{d\zeta}{\zeta - \bar{\eta}_m}, \tag{97}$$

где величины h и H определены соответственно с помощью равенств (82) и (88), т.е. имеем равенство

$$h - H = (1 - R_1 R_2)^{-1} (h + R_1\bar{\gamma} - R_2\gamma). \tag{98}$$

С другой стороны, в силу (43), (44) и (92) имеют место равенства

$$\frac{\partial \sigma_1^+(x, \eta_m)}{\partial t} = B_m \frac{\partial \sigma_2^-(x, \eta_m)}{\partial t} + \frac{\partial B_m}{\partial t} \sigma_2^-(x, \eta_m) + i\,\frac{c_m}{r_m}\chi_m(x),$$

$$\frac{\partial \sigma_2^+(x, \bar{\eta}_m)}{\partial t} = \hat{B}_m \frac{\partial \sigma_1^-(x, \bar{\eta}_m)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t} \sigma_1^-(x, \bar{\eta}_m) - i\,\frac{\bar{c}_m}{\bar{r}_m}\hat{\chi}_m(x),$$

где

$$\chi_m = \frac{\partial}{\partial \eta}\, [\sigma_1^+(x, \eta) - B_m \sigma_2^-(x, \eta)]\Big|_{\eta=\eta_m},$$

$$\hat{\chi}_m = \frac{\partial}{\partial \eta}\, [\sigma_2^+(x, \eta) - \hat{B}_m \sigma_1^-(x, \eta)]\Big|_{\eta=\bar{\eta}_m}. \tag{99}$$

С помощью этих равенств на основе (43), (44), (47), (51) и (53) находим, что имеют место соотношения

$$\tau_1^+(x,\eta_m) = B_m\tau_2^-(x,\eta_m) + \frac{\partial B_m}{\partial t}\sigma_2^-(x,\eta_m) +$$
$$+ \mathrm{i}\frac{c_m}{r_m}\chi_m(x) - B_m\sum_{n=1}^{2N}\Phi_n(x)\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Psi}_n(z)\,\sigma_2^-(z,\eta_m)\,dz,$$
$$\tau_2^+(x,\overline{\eta}_m) = \widehat{B}_m\tau_1^-(x,\overline{\eta}_m) + \frac{\partial \widehat{B}_m}{\partial t}\sigma_1^-(x,\overline{\eta}_m) -$$
$$- \mathrm{i}\frac{\overline{c}_m}{r_m}\widehat{\chi}_m(x) - \widehat{B}_m\sum_{n=1}^{2N}\Phi_n(x)\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Psi}_n(z)\,\sigma_1^-(z,\overline{\eta}_m)\,dz. \qquad (100)$$

Далее, согласно (45) при $m = 1,\ldots, N$ выполняются равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Psi}_n(z)\,\sigma_2^-(z,\eta_m)\,dz = 0, \qquad \text{если } n \neq m,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Psi}_n(z)\,\sigma_1^-(z,\overline{\eta}_m)\,dz = 0, \qquad \text{если } n \neq N+m.$$

Кроме того, в соответствии с (38) и (45) при $m = 1,\ldots, N$ справедливы равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Psi}_m(z)\,\sigma_2^-(z,\eta_m)\,dz = \mathrm{i}c_mS_{11}'(\eta_m),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Psi}_{N+m}(z)\,\sigma_1^-(z,\overline{\eta}_m)\,dz = -\mathrm{i}\overline{c}_mS_{22}'(\overline{\eta}_m),$$

где штрихом обозначено дифференцирование по параметру η. С учетом этих равенств соотношения (100) принимают вид

$$\tau_1^+(x,\eta_m) = B_m\tau_2^-(x,\eta_m) + \frac{\partial B_m}{\partial t}\sigma_2^-(x,\eta_m) +$$
$$+ \mathrm{i}\frac{c_m}{r_m}[\chi_m(x) - r_mB_mS_{11}'(\eta_m)\,\Phi_m(x)],$$
$$\tau_2^+(x,\overline{\eta}_m) = \widehat{B}_m\tau_1^-(x,\overline{\eta}_m) + \frac{\partial \widehat{B}_m}{\partial t}\sigma_1^-(x,\overline{\eta}_m) -$$
$$- \mathrm{i}\frac{\overline{c}_m}{r_m}[\widehat{\chi}_m(x) - r_m\widehat{B}_mS_{22}'(\overline{\eta}_m)\,\Phi_{N+m}(x)].$$

Определенные посредством (99) величины $\chi_m(x)$ и $\widehat{\chi}_m(x)$ в силу (41), (45) и (46) допускают представление

$$\chi_m(x) = a_m\Phi_m(x) + b_m\sigma_1^+(x,\eta_m),$$
$$\widehat{\chi}_m(x) = \widehat{a}_m\Phi_{N+m}(x) + \widehat{b}_m\sigma_2^+(x,\overline{\eta}_m),$$

где величины a_m, b_m и $\widehat{a}_m$, $\widehat{b}_m$ не зависят от x. С помощью (35), (36), (41), (64), (65) и (99) легко находим, что

$$a_m = B_mS_{11}'(\eta_m), \qquad \widehat{a}_m = \widehat{B}_mS_{22}'(\overline{\eta}_m),$$

а b_m и $\widehat{b}_m$ — произвольные величины, удовлетворяющие условию $\widehat{b}_m = \overline{b}_m$, $m = 1,\ldots, N$. На основе равенств (91) отсюда следует, что определенные посредством (94) величины G_m и $\widehat{G}_m$ могут быть представлены в виде

$$G_m = \left(\frac{\partial B_m}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}}{r_m}b_mc_mB_m\right)\sigma_2^-(x,\eta_m),$$
$$\widehat{G}_m = \left(\frac{\partial \widehat{B}_m}{\partial t} - \frac{\mathrm{i}}{r_m}\widehat{b}_m\overline{c}_m\widehat{B}_m\right)\sigma_1^-(x,\overline{\eta}_m).$$

Сравнивая эти равенства с равенствами (96), непосредственно получаем, что эволюционные уравнения для нормировочных констант B_m и $\widehat{B}_m$ имеют вид

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} - \mathrm{i}\left[4\eta_m^2 + K(\eta_m) - \frac{c_m}{r_m}b_m\right]B_m = 0,$$
$$\frac{\partial \widehat{B}_m}{\partial t} + \mathrm{i}\left[4\overline{\eta}_m^2 + K(\overline{\eta}_m) - \frac{\overline{c}_m}{r_m}\widehat{b}_m\right]\widehat{B}_m = 0, \qquad (101)$$

где величина $K = K(\eta)$ согласно равенствам (97) при $\operatorname{Im}\eta \neq 0$ допускает представление

$$K(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}[h(\zeta) - H(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta - \eta}. \qquad (102)$$

В соответствии с равенством $\widehat{b}_m = \overline{b}_m$ на основе (98) и (102) система уравнений (101) обладает инвариантным многообразием $\widehat{B}_m = -\overline{B}_m$, $m = 1,\ldots, N$. Таким образом, нами найдены эволюционные уравнения для всех данных рассеяния оператора L вида (7), (8) и, следовательно, для получения решения системы (1)—(4) мы можем воспользоваться методом обратной задачи рассеяния.

В заключение нелишне отметить, что в том случае, когда собственное значение $\eta = \eta_n$ — простое, т.е. $r_n = 1$, уравнение (92) может быть получено непосредственно. Действительно, пусть $\alpha_n = \alpha_n(x)$ — собственная функция оператора L, отвечающая собственному значению $\eta = \eta_n$, т.е.

$$(L - i\eta_n)\,\alpha_n = 0, \qquad 0 < \int_{-\infty}^{\infty} ||\alpha_n(x)||\,dx < \infty. \tag{103}$$

Продифференцируем это равенство по t. В результате получим соотношение

$$(L - i\eta_n)\,\gamma_n = \left(i\frac{d\eta_n}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}\right)\alpha_n,$$

где $\gamma_n = \dfrac{\partial \alpha_n}{\partial t}$. Отсюда следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{\beta}_n \wedge \gamma_n) = \widetilde{\beta}_n\left(i\frac{d\eta_n}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}\right)\alpha_n,$$

где $\beta_n = \sigma\alpha_n$, причем матрица σ определена посредством (49). Таким образом, находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\beta}_n(x)\left(i\frac{d\eta_n}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}\right)\alpha_n(x)\,dx = 0.$$

В силу (18) это значит, что справедливо соотношение

$$i\frac{d\eta_n}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\beta}_n(x)\,\alpha_n(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\beta}_n(x)\,[A, L]\,\alpha_n(x)\,dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{2N}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\beta}_n(x)\,[\Lambda, \Phi_m(x)\,\widetilde{\Psi}_m(x)]\,\alpha_n(x)\,dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\beta}_n(x)\int_{-\infty}^{\infty}[\Lambda, \Phi(x,\zeta)\,\widetilde{\Psi}(x,\zeta)]\,d\zeta\,\alpha_n(x)\,dx. \tag{104}$$

Согласно (103) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\beta}_n(x)\,[A, L]\,\alpha_n(x)\,dx = 0.$$

Далее, на основе (19) и (103) справедливы равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{\beta}_n \wedge \Phi_m) = i\,(\eta_m - \eta_n)\,\widetilde{\beta}_n\Phi_m,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{\Psi}_m \wedge \alpha_n) = -\,i\,(\eta_m - \eta_n)\,\widetilde{\Psi}_m\alpha_n.$$

Отсюда следует, что при $n \neq m$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\beta}_n(x)\,[\Lambda, \Phi_m(x)\,\widetilde{\Psi}_m(x)]\,\alpha_n(x)\,dx = 0, \qquad n \neq m.$$

Наконец, с учетом (20) и (103) получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial x}[\widetilde{\beta}_n(x)\wedge\Phi(x,\zeta)] = i(\zeta - \eta_n)\,\widetilde{\beta}_n(x)\,\Phi(x,\zeta),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\widetilde{\Psi}(x,\zeta)\wedge\alpha_n(x)] = -\,i(\zeta - \eta_n)\,\widetilde{\Psi}(x,\zeta)\,\alpha_n(x).$$

С помощью этих равенств убеждаемся, что при любом вещественном ζ имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\beta}_n(x)\,[\Lambda, \Phi(x,\zeta)\,\widetilde{\Psi}(x,\zeta)]\,\alpha_n(x)\,dx = 0.$$

В соответствии с приведенными выше равенствами соотношение (104) принимает вид

$$i\frac{d\eta_n}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\beta}_n(x)\,\alpha_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\beta}_n(x)\,[\Lambda, \Phi_n(x)\,\widetilde{\Psi}_n(x)]\,\alpha_n(x)\,dx. \tag{105}$$

Воспользуемся теперь вытекающим из (6) и (23) равенством $\Psi_n = \widehat{c}_n\beta_n$, где величина $\widehat{c}_n$ не зависит от x. На его основе согласно (10) и (23) находим, что

$$\widetilde{\beta}_n\wedge\Phi_n\widetilde{\Psi}_n\alpha_n = \widetilde{\Psi}_n\wedge\Phi_n\widetilde{\beta}_n\alpha_n = W_n\widetilde{\beta}_n\alpha_n,$$

$$\widetilde{\beta}_n\Phi_n\widetilde{\Psi}_n\wedge\alpha_n = \widetilde{\Psi}_n\Phi_n\widetilde{\beta}_n\wedge\alpha_n \equiv 0.$$

Отсюда следует, что соотношение (105) принимает свой окончательный вид

$$\left(i\frac{d\eta_n}{dt} - W_n\right)\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\beta}_n(x)\,\alpha_n(x)\,dx = 0. \tag{106}$$

В том случае, когда собственное значение $\eta = \eta_n$ — простое, интеграл в этом равенстве отличен от нуля. Таким образом, в этом случае должно выполняться равенство: $i\dfrac{d\eta_n}{dt} = W_n$ в полном соответствии с уравнением (92). Однако в случае, когда кратность собственного значения $\eta = \eta_n$ больше единицы, т.е. $r_n > 1$, интеграл в равенстве (106) равен нулю и, следовательно, стоящий перед интегралом сомножитель может быть отличен от нуля. Чтобы в этом случае найти закон эволюции соответствующего собственного значения, нужны дополнительные соображения.

Здесь также уместно отметить, что содержащееся в работе [6] утверждение о неприменимости классического метода обратной задачи рассеяния к интегрированию нелинейного уравнения Шредингера с источником, как мы видим, не соответствует действительности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kumar A. — Phys. Rep., 1990, v.187, №2, p.63.
2. Захаров В.Е., Шабат А.Б. — ЖЭТФ, 1971, т.61, вып.1, с.118.
3. Ablowitz M.J. et al. — Stud. Appl. Math., 1974, v.53, №4, p.249.
4. Kaup D.J., Newell A.C. — Adv. Math., 1979, v.31, №1, p.67.
5. Leon J., Latifi A. — J. Phys. A: Math. Gen., 1990, v.23, №8, p.1385.
6. Latifi A., Leon J. — Preprint PM/90-02, Montpellier, 1990.
7. Мельников В.К. — Препринт ОИЯИ Р2-88-668, Дубна, 1988.
8. Мельников В.К. — Препринт ОИЯИ Р2-89-781, Дубна, 1989.
9. Mel'nikov V.K. — Inverse Problems, 1990, v.6, №2, p.233.
10. Mel'nikov V.K. — Inverse Problems, 1990, v.6, №5, p.809.
11. Мельников В.К. — Препринт ОИЯИ Р2-88-728, Дубна, 1988.
12. Мельников В.К. — Препринт ОИЯИ Р2-90-448, Дубна, 1990.

Мельников В.К. Р2-94-226

Метод интегрирования
нелинейного уравнения Шредингера с источником

Показано, что нелинейное уравнение Шредингера с источником допускает исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Дирака, если источник представлен в виде интеграла Фурье по собственным функциям так называемого порождающего оператора. Найдены условия, при выполнении которых нелинейное уравнение Шредингера с источником имеет чисто солитонное решение. Полученные результаты находятся в тесной связи с рядом проблем физики плазмы и физики твердого тела.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P2-94-226

The Method of Integration
of the Nonlinear Schroedinger Equation with a Source

It is shown that the nonlinear Schroedinger equation with a source can be investigated by the inverse scattering method for the Dirac operator if the source is represented as the Fourier integral over the eigenfunctions of the so-called generating operator. The conditions are found under which the nonlinear Schroedinger equation with a source has a pure soliton solution. The obtained results are relevant to some problems of plasma physics and solid state physics.

The investigation has been performed at Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994