94-109

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-94-109

Р.М.Ямалеев

ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРОВАННАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ТРЕХМЕРНОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1994

Динамические уравнения Гамильтона формулируются в четномерном фазовом пространстве, где каждой пространственной координате строго соответствует координата импульсного пространства. В этом смысле фазовое пространство гамильтоновой динамики является двумерным. Й.Намбу [1] (1973) предложил аналоги уравнений Гамильтона в трехмерном фазовом пространстве. Он показал, что такое обобщение возможно, если ввести две функции Гамильтона. Уравнениям Намбу за последнее время были посвящены несколько десятков работ (см., например, [2]—[6] и ссылки в них).

В настоящей работе мы предлагаем один из способов деформации ньютоновой механики. Существенно, что эта механика реализуется в трехмерном фазовом пространстве. Уравнения движения предлагаемой механики соотносятся с уравнениями Намбу, как уравнения Ньютона соотносятся с уравнениями Гамильтона. При устремлении к нулю параметра деформации наши уравнения сводятся к уравнениям Ньютона, таким образом устанавливается соответствие с механикой Ньютона.

1. МОДЕЛЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРОВАННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Модель гармонического осциллятора в классической и квантовой механике используется как своего рода эталонная модель, на которой испытываются новые принципы. Геометрически осцилляторное движение изображается как движение точки по окружности на фазовой плоскости. С точностью до нормировочных множителей, имеющих физическую размерность, уравнения Гамильтона сводятся к формулам дифференцирования тригонометрических функций. Уравнение движения осциллятора

$$\frac{d}{dt}p = -m\omega^2 x, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}x = \frac{p}{m} \tag{2}$$

в безразмерных единицах принимает вид

$$\frac{d}{d\phi}\frac{p}{m\rho\omega} = -\frac{x}{\rho}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{d\phi}\frac{x}{\rho} = \frac{p}{m\rho\omega}. \tag{4}$$

Здесь m — масса, ω — частота, ρ — амплитуда колебания осциллятора,

$$\phi = \omega dt.$$

Очевидно, решениями (3)—(4) являются тригонометрические функции

$$\frac{p}{m\rho\omega} = \alpha\cos\omega t, \tag{5}$$

$$\frac{x}{\rho} = \alpha\sin\omega t, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2\rho^2}}, \tag{6}$$

(простоты ради мы ограничились начальными условиями $p(0) = m\rho\omega\,\alpha$, $x(0) = 0$). Таким образом, уравнения движения (1)—(2) сводятся к формулам дифференцирования тригонометрических функций $\cos\phi$, $\sin\phi$, а выражение для энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2} \tag{7}$$

после деления на E сводится к известному тригонометрическому соотношению

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1. \tag{8}$$

Под эллиптической деформацией осциллятора мы понимаем замену решений (1)—(2), выраженных функциями $\cos\phi$, $\sin\phi$, на соответствующие эллиптические функции Якоби $cn\,(\phi, k)$, $sn\,(\phi, k)$, где k — параметр деформации. Формулы дифференцирования теперь принимают вид [7]

$$\frac{d}{d\phi}cn\,(\phi, k) = -sn\,(\phi, k)\,dn\,(\phi, k), \tag{9}$$

$$\frac{d}{d\phi}sn\,(\phi, k) = dn\,(\phi, k)\,cn\,(\phi, k), \tag{10}$$

$$\frac{d}{d\phi}dn\,(\phi, k) = -k^2 sn\,(\phi, k)\,cn(\phi, k), \tag{11}$$

а вместо (8) имеем два соотношения

$$cn^2(\phi, k) + sn^2(\phi, k) = 1, \tag{12}$$

$$dn^2(\phi, k) + k^2 sn^2(\phi, k) = 1. \tag{13}$$

Уравнения (9)—(11) показывают, что в эллиптически деформированной модели необходимо ввести еще одну фазовую координату, которую мы будем обозначать через q. Прежде всего необходимо установить размерность новой физической координаты. Перепишем (9)—(11) в обозначениях трехмерного фазового пространства

$$\frac{d}{\omega dt}\frac{p}{m\rho\omega} = -\frac{x}{\rho}\frac{q}{Q},$$
$$\frac{d}{\omega dt}\frac{x}{\rho} = \frac{p}{m\omega\rho}\frac{q}{Q},$$
$$\frac{d}{\omega dt}\frac{q}{Q} = -\frac{m\rho^2}{Q}\frac{x}{\rho}\frac{p}{m\omega\rho}. \tag{14}$$

Здесь мы выбрали

$$[q] = [Q] = [m\rho^2],$$

и поэтому безразмерная величина

$$k^2 = \frac{m\rho^2}{Q}$$

играет роль параметра деформации. Однако это еще недостаточное обоснование выбора размерности q, поскольку размерности q и Q могут быть изменены, например, умножением и делением системы (14) на размерную константу ω^2. В этом случае

$$[q] = [Q] = [E],$$

где $[E]$ имеет размерность энергии. Как мы убедимся ниже, этот выбор размерности q является наиболее удачным.

2. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ МЕХАНИКИ НЬЮТОНА И ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НАМБУ

Чтобы обобщить результаты предыдущего параграфа, необходимо решить по крайней мере две задачи: а) ввести потенциальную функцию; б) получить интегралы движения. Поскольку процесс деформации мы проводим на базе известного гамильтониана

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \tag{15}$$

то для заданного потенциала $V(x)$ должен быть дан рецепт написания второй функции Гамильтона. Обозначим ее через N. Деформированная механика содержит новую фундаментальную константу. Обозначим ее μ. Если присвоить этой константе размерность энергии, то уравнениям эллиптического осциллятора можно придать следующий вид:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx}\frac{q}{\mu},$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}\frac{q}{\mu}, \tag{16}$$
$$\frac{dq}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx}\frac{p}{m},$$
$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \tag{17}$$

Как видно, фазовые координаты p и q, а также параметры m и μ входят в уравнения (16) симметричным способом.

Находим два интеграла движения:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x),$$
$$N = \frac{q^2}{2\mu} + V(x). \tag{18}$$

Используя данные функции в качестве необходимых нам двух функций Гамильтона, перепишем систему (16) в виде

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dx}\frac{dN}{dq},$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp}\frac{dN}{dq},$$
$$\frac{dq}{dt} = -\frac{dH}{dp}\frac{dN}{dx}. \tag{19}$$

Полученные уравнения являются аналогом уравнений движения Гамильтона для деформированной механики Ньютона. Заметим, что возможность привести уравнения движения к данному виду была заложена в определении размерности новой фундаментальной константы μ. Систему (19) нетрудно обобщить для случая, когда H и N являются функциями от x, p, q. В результате получим

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dH}{dq}\frac{dN}{dx} - \frac{dH}{dx}\frac{dN}{dq},$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp}\frac{dN}{dq} - \frac{dH}{dq}\frac{dN}{dp}, \tag{20}$$
$$\frac{dq}{dt} = \frac{dH}{dx}\frac{dN}{dp} - \frac{dH}{dp}\frac{dN}{dx}. \tag{21}$$

— известные уравнения Намбу в трехмерном фазовом пространстве.

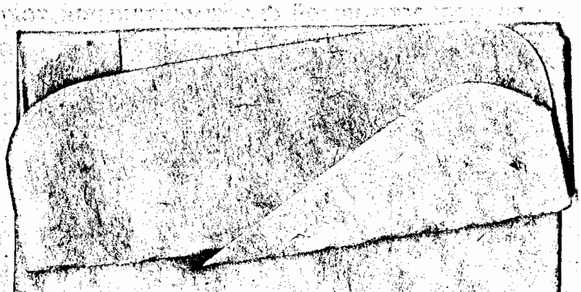
В традиционной классической механике если потенциал не имеет явной зависимости от времени, то функция Гамильтона представляет собой полную энергию системы. В случае динамических уравнений Намбу само понятие полной энергии остается неопределенным. В деформированной механике для конечных значений μ первый интеграл, по форме совпадающий с обычным определением гамильтониана, не выражает формулу для полной энергии системы. Однако в этой механике концептуально можно ввести понятие работы силы, а значит и энергии. Выражение для полной энрегии можно получить, пользуясь уравнениями движения. В данной работе мы приводим это выражение без доказательства. Оно имеет вид

$$E_{\mathrm{total}} = \frac{2}{\mu}\left(\frac{p^2}{2m} + V\right)\left(\frac{q^2}{2\mu} + V\right).$$

Нетрудно видеть, что при $\mu \to \infty$ это выражение переходит в обычное определение энергии в ньютоновой механике для потенциалов, не зависящих от времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nambu Y. — Phys. Rev. D7, 1973, No.8, p.2405.
2. Estabrook F.B. — Phys. Rev. D8, 1973, p.2740.
3. Bayen F., Flato M. — Phys. Rev. D11, 1975, p.3049.
4. Flato M., Lichnerowicz A., Sternheimer D. — J. Math. Phys., 1976, 17, p.1754.
5. Ruggeri G.J. — Int. J. Theor. Phys., 1975, 12, p.287; Lett. Nuovo Cimento, 1976, 17, p.169; Acta Cient. Venez., 1981, 32, p.203.
6. Sucre M.G., Kalnay A.J. — Int. J. Theor. Phys., 1975, 12, p.149.
7. Ахиезер Н.И. — Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, М., 1948.



Рукопись поступила 21 декабря 1993 года.