ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 9338

Э.Вицорек, Б.Гейер, В.А.Матвеев, Д.Робашик

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНФОРМНОЙ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ

1975

P2 - 9338

Э.Вицорек, Б.Гейер,* В.А.Матвеев, Д.Робашик

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНФОРМНОЙ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ

Направлено в "Reports on Mathematical Physics"

*Университет им. Карла Маркса, Лейпциг, ГДР.

1. *Введение*

Широко распространено мнение, что конформная симметрия является возможной асимптотической симметрией сильных взаимодействий /1/. В связи с этим представляет интерес изучение локальной квантовой теории поля, обладающей свойством инвариантности при бесконечно малых конформных преобразованиях. Рассмотрим для простоты скалярную теорию поля, заданную набором функций Вайтмана:

$$W_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)|0\rangle, \; n = 1,2,3,\ldots \qquad /1.1/$$

Требование конформной инвариантности означает

$$\langle 0|U\phi(x_1)U^{-1}\ldots U\phi(x_n)U^{-1}|0\rangle = \langle 0|\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)|0\rangle, \qquad /1.2/$$

где $U = 1 + \epsilon^{AB} J_{AB}$ и J_{AB} являются генераторами конформной группы. Напомним, что конформная группа содержит, кроме преобразований группы Пуанкаре, также масштабные преобразования $x'^{\mu} = \lambda x^{\mu}$ и специальные преобразования $x'^{\mu} = (x^{\mu} + c^{\mu}x^2)/(1+2cx+c^2x^2)$. Известно, что двух- и трехточечные функции определяются полностью требованиями конформной инвариантности:

$$\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = c\,\frac{1}{(x_1-x_2)^{2d}}, \qquad /1.3/$$

$$\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)|0\rangle = c'\,\frac{1}{[(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2]^{d/2}}, \qquad /1.4/$$

где d - размерность скалярного поля ϕ и c, c′ - произвольные константы.

Эти выражения имеют правильные аналитические свойства, которыми должны обладать функции Вайтмана вследствие свойств спектральности и причинности. Функции Вайтмана высшего порядка, начиная с четырехточечной функции, не определяются полностью исходя лишь из одной конформной инвариантности. В частности, четырехточечные функции вычисляются с точностью до произвольной функции $g(A,B)$ двух гармонических переменных A и B : [2]

$$<0|\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0> = [(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2]^{-d} g(A,B),$$

$$A = \frac{(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2}{(x_1-x_3)^2(x_2-x_4)^2},$$

$$B = \frac{(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2}{(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2}. \qquad /1.5/$$

Задача сводится, таким образом, к определению функции $g(A,B)$. При этом обычно исходят из известных двух- и трехточечных функций, используя разложение по скелетным диаграммам или условие зашнуровки для нахождения четырехточечной функции [3]. В нашей работе проблема изучается с другой точки зрения. Здесь рассматриваются аналитические свойства для функции $g(A,B)$, следующие только из общих требований причинности и спектральности.

2. *Общие свойства четырехточечных функций, следующие из аксиом Вайтмана*

Для описания допустимого класса функций $g(A,B)$ используем аксиомы Вайтмана и их следствия для четырехточечной функции. Кратко перечислим основные требования этих аксиом:

а/ пуанкаре-инвариантность

$$W_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = W(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = W(\xi_i\,\xi_j),$$

$$\xi_i = x_i - x_{i+1}, \quad i=1,2,3; \qquad /2.1/$$

б/ спектральность

$$\tilde{W}_4(q_1,q_2,q_3)=0, \quad \text{if} \quad q_i \not\subset V_+, \qquad /2.2/$$

$$\tilde{W}_4(q_1,q_2,q_3) = \int e^{i(q_1\xi_1+q_2\xi_2+q_3\xi_3)} W(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3; \qquad /2.3/$$

в/ локальность

$$W_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=W_4^{\pi}(x_1,x_2,x_3,x_4)=W_4(x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},x_{i_4}) \qquad /2.4/$$

для пространственноподобных расстояний между аргументами полей, которые переставлены.

Вследствие условия спектральности функция $W(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ является граничным значением /сходимость в S'/ функции

$$W(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \lim_{\eta_i\to 0^+} W(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3), \qquad /2.5/$$

голоморфной в передней трубе.

$$T_3 = \{\zeta_i = \xi_i - i\eta_i, \quad \eta_i \in V_+, \quad i=1,2,3\}. \qquad /2.6/$$

Эту область голоморфности можно расширить. Главный результат теоремы Боргмана-Холла-Вайтмана заключается в том, что функция $W(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ имеет однозначное аналитическое продолжение в так называемую расширенную трубу T_3', которая определяется объединением:

$$T_3' = \bigcup_{\Lambda\in L_+(C)} \Lambda T_3, \qquad /2.7/$$

где $L_+(C)$- преобразования комплексной группы Лоренца. Область голоморфности T_3' функции $W(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ и область голоморфности T_3' функции $W^{\pi}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ /π означает перестановку в аргументах функции Вайтмана/ имеют непустое сечение /точки Йоста/, так что $W(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ и $W^{\pi}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ являются различными граничными значениями одной голоморфной функции. С учетом конформной инвариантности эта голоморфная функция имеет общий вид:

$$W(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = [(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)^2\,\zeta_2^2]^{-d}\,g(A,B), \qquad /2.8/$$

$$A = \frac{\zeta_1^2\zeta_3^2}{(\zeta_1+\zeta_2)^2(\zeta_2+\zeta_3)^2}, \quad B = \frac{(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)^2\,\zeta_2^2}{\zeta_1^2\zeta_3^2}. \qquad /2.9/$$

Вследствие известного поведения рационального множителя в /2.8/ свойства аналитичности для $W(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ переносятся на свойства аналитичности функции $g(A,B)$ от комплексных переменных A и B. Эта проблема изучается в следующем параграфе. Учитывая равенство /2.4/, находим, что соответствующие функции $g(A,B)$ и $g^{\pi}(A,B)$ связаны в пересечении их областей голоморфности /а следовательно, при аналитическом продолжении, во всей области голоморфности/ соотношением, которое в случае тождественных скалярных полей имеет вид

$$g(A,B) = g(A^{-1},AB) = (AB)^d\,g(B^{-1},A^{-1}) = B^d\,g(AB,B^{-1}). \qquad /2.10/$$

3. Аналитические свойства функции $g(A,B)$

Изучим аналитические свойства функции гармонических переменных A и B. Исходной точкой являются аналитические свойства четырехточечной функции.

Из лоренц-инвариантности следует, что $W(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ - функция шести независимых скалярных произведений $\zeta_i\,\zeta_j$. К сожалению, аналитические свойства четырехточечной функции, как функции переменных $\zeta_i\,\zeta_j$, очень сложны и, кроме того, известны только в простой области голоморфности. Однако, если учесть, что функция $g(A,B)$ зависит лишь от двух переменных A и B, полная информация о свойствах четырехточечной функции не является необходимой. Поэтому достаточно рассмотреть псевдоточечную функцию

$$\hat{W}_3(\zeta_1,\zeta_2) = W(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)\big|_{\zeta_3=\zeta_1}. \qquad /3.1/$$

Основная область аналитичности функции $\hat{W}_3(\zeta_1,\zeta_2)$ та же, что и у обычной трехточечной функции[5,6]. Таким образом, свойства трехточечной функции могут быть использованы для изучения аналитичности функции $\hat{W}_3(\zeta_1,\zeta_2)$. В начале работы мы рассматриваем задачу расширения области голоморфности для $W(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ с помощью известных масштабных преобразований, а затем учитываем свойства локальности для дальнейшего расширения области голоморфности для функции $g(A,B)$.

а/ Расширение области голоморфности при комплексных масштабных преобразованиях

Точно так же, как и в случае комплексных преобразований группы Лоренца, можно расширить область голоморфности с помощью комплексных масштабных преобразований.

Пусть функция $f(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ голоморфна в T_3 и обладает масштабной инвариантностью

$$f(\lambda\zeta_1,\lambda\zeta_2,\lambda\zeta_3) = \lambda^d f(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3), \quad \zeta_i \in T_3. \qquad /3.2/$$

Тогда правая сторона /3.2/ является аналитической функцией от переменной λ и ее можно продолжить в область комплексных значений переменной λ. Левая сторона определяется как аналитическая функция для значений переменных, не лежащих в передней трубе T_3. Так находится одно из возможных расширений области голоморфности. В общем случае такое расширение ведет к функции, определенной на многообразии Римана в зависимости от значений размерности d. Оно отличается от расширения, полученного при комплексных преобразованиях Лоренца, дающего однозначное продолжение. Это находится в соответствии с тем, что комплексные преобразования Лоренца не имеют сингулярных преобразований. Отметим, однако, что ограничение $-\pi < \arg\lambda < \pi$ приводит к однолистному продолжению. Однозначность можно доказать, если рассмотреть продолжение к точке ζ, исходя из двух различных точек, $\zeta^{(1)}$ и $\zeta^{(2)}$, которые лежат в трубе T_3.

$$\zeta = \lambda_1 \zeta^{(1)} = \lambda \zeta^{(2)}, \quad -\pi < \arg\lambda_1, \ \arg\lambda_2 < \pi . \qquad /3.3/$$

Продолжение не зависит от пути, если найдется непрерывная кривая, которая связывает точки $\zeta^{(1)}$ и $\zeta^{(2)}$ и лежит полностью в трубе T_3. Такая кривая дается выражением $\lambda(t)\zeta^{(1)}$, где

$$\lambda(t)\zeta^{(1)} = (1-t)\zeta^{(1)} + t\lambda_2^{-1}\lambda_1\zeta^{(1)}, \quad 0 \le t \le 1. \qquad /3.4/$$

Так как это выпуклая кривая и T_3 является выпуклым многообразием, то она должна полностью лежать в трубе T_3. Четырехточечная функция удовлетворяет равенству

$$W(\lambda\zeta_1, \lambda\zeta_2, \lambda\zeta_3) = \lambda^{-4d} W(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \qquad /3.5/$$

тогда как функция $g(A,B)$ является масштабно-инвариантной:

$$g(\lambda\zeta_1, \lambda\zeta_2, \lambda\zeta_3) = g(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3). \qquad /3.6/$$

Это свойство упрощает обсуждение области голоморфности функции $g(A,B)$:

$$g(A,B) = W(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)^{2d} \zeta_2^{2d}, \qquad /3.7/$$

так как $\lambda\zeta_i$ вместе с переменной ζ_i лежит в области голоморфности $g(A,B)$.

б/ Аналитические свойства функции $g(A,B)$, следующие из свойств трехточечной функции W_3 и масштабной инвариантности

Здесь мы изучаем основную область голоморфности функции

$$\hat{W}_3(\zeta_1, \zeta_2) = [(2\zeta_1 + \zeta_2)^2 \zeta_2^2]^{-d} \hat{g}(\zeta_1, \zeta_2). \qquad /3.8/$$

Если причинность не учитывается, функция $\hat{W}_3$ имеет ту же самую основную область голоморфности, как обычная трехточечная функция Вайтмана. Эта область изучена Челленом и Вайтманом /6/. Вместо переменных ζ_i используются переменные

$$z_1 = \zeta_1^2, \quad z_2 = \zeta_2^2, \quad z_3 = (\zeta_1 + \zeta_2)^2. \qquad /3.9/$$

Границы основной области голоморфности для трехточечной функции даются:

1/ разрезами $\quad z_i = r, \quad 0 \le r \le \infty, \qquad /3.10/$

2/ F-кривой $\quad (\operatorname{Im} z_1 \ \operatorname{Im} z_2 \ge 0),$

$$z_3 = z_1 + z_2 + r + \frac{z_1 z_2}{r}, \quad 0 \le r \le \infty, \qquad /3.11/$$

3/ S-кривой $\quad (\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 \le 0),$

$$z_3 = (1-k)z_1 + (1 - \frac{1}{k})z_2, \quad 0 \le k \le \infty . \qquad /3.12/$$

Для простоты область голоморфности рассматривается в z_3-плоскости для фиксированных переменных z_1 и z_2. Тогда область голоморфности лежит с правой стороны /или сверху/ F-кривой или с левой стороны S-кривой. Гармонические переменные A и B выражаются через переменные z_i следующим образом:

$$A = \frac{z_1^2}{z_2^2}, \quad B = \frac{(2z_1 + 2z_3 - z_2)z_2}{z_1^2}. \qquad /3.13/$$

Так как

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{\sqrt{A}}{1 + \sqrt{A} - \sqrt{(1+\sqrt{A})^2 - AB}}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{A}, \qquad /3.14/$$

то для заданных A и B можно определить только отношения z_1/z_2 и z_1/z_3. Поэтому всегда можно выбрать $\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 \le 0$. Тогда $g(A,B)$, как функция переменных z_i, аналитична слева от S-кривой и неаналитична справа от нее /рис. 1/.

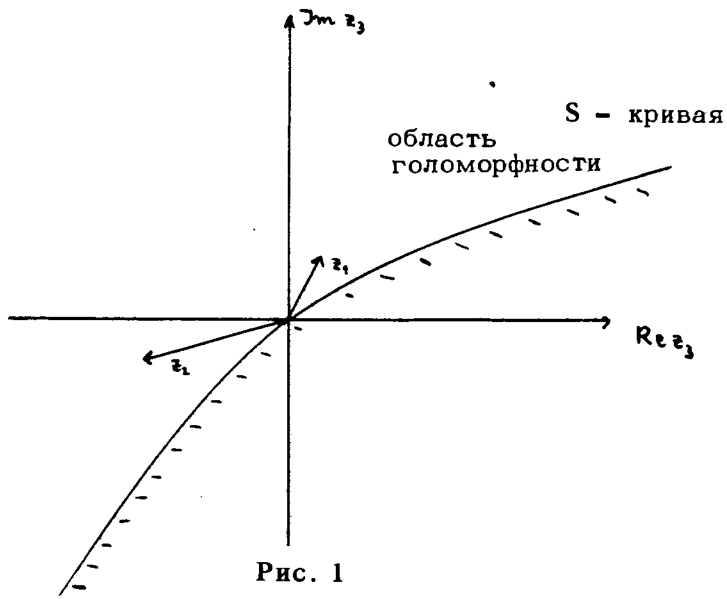

Рис. 1

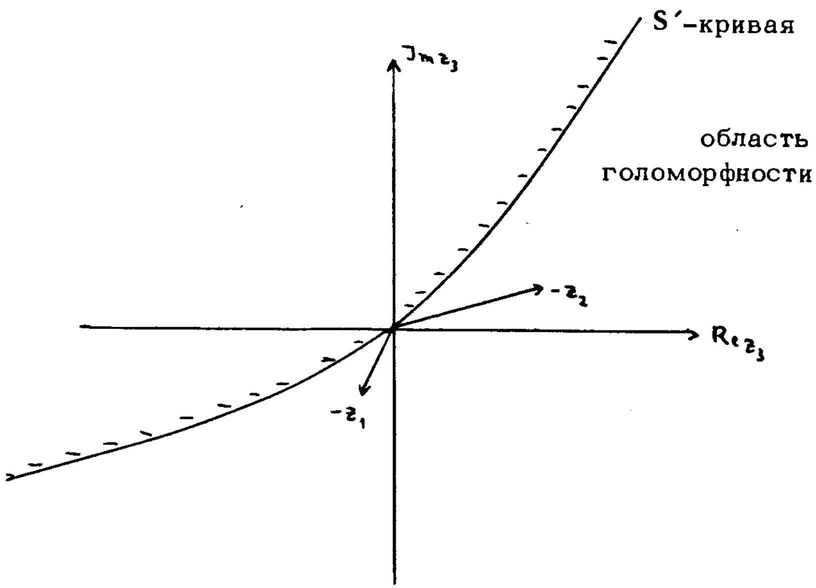

Рис. 2

Масштабная инвариантность /3.6/ для функции $\hat{g}(\zeta_1 \zeta_2)$ показывает, что точки ζ_1, ζ_2 и $\lambda\zeta_1, \lambda\zeta_2$ лежат внутри области голоморфности и дополнительные точки ветвления не возникают.

Используем комплексное масштабное преобразование $\zeta'_i = i\,\zeta_i$ или $z'_i = -z_i$, которое соответствует повороту S-кривой на угол π /рис. 2/. Теперь область аналитичности лежит слева от S-кривой. С другой стороны, прямое применение результатов Челлена и Вайтмана приводит к аналитичности слева от кривой S′:

$$S': \quad z_3 = (1-k)\,z'_1 + \left(1-\frac{1}{k}\right) z'_2 \,, \qquad 0 \le k \le \infty \,, \qquad /3.15/$$

которая может быть получена из S-кривой вращением. Это означает, что функция $g(z_i)$ голоморфна для всех значений z_i, которые не лежат на S-кривой /3.12/ и которые отличаются от нуля и бесконечности.

В переменных A и B находим: $g(A, B)$- голоморфная функция для всех значений A и B, которые не лежат на поверхности Φ,

$$\Phi: \quad B = (1-s)\left(1-\frac{1}{sA}\right), \qquad 0 \le s = (1-k)^2 \le \infty \,, \qquad /3.16/$$

и не относятся к множеству

$$A = 0, \; A = \infty \quad \text{/для всех B/}, \qquad /3.17/$$

$$B = 0, \; B = \infty \quad \text{/для всех A/}. \qquad /3.18/$$

в/ Расширение области голоморфности вследствие причинности

Рассмотрим теперь следствия причинности при дальнейшем расширении области голоморфности. Важные следствия причинности выражаются функциональными соотношениями:

$$g(A, B) = g(A^{-1}, AB) = (AB)^d\, g(B^{-1}, A^{-1}) = B^d\, g(AB, B^{-1}) \,. \qquad /2.1O/$$

Эти соотношения позволяют найти аналитическое продолжение функции $g(A, B)$ в более широкую область голоморфности. Аналитические свойства множителя $(AB)^d$, B^d

известны и не меняют область голоморфности для функции $g(A,B)$. Так что нужно рассматривать только поверхности неаналитичности для функций $g(A,B)$, $g(A^{-1}, AB)$, $g(B^{-1}, A^{-1})$, $g(AB, B^{-1})$, а именно:

$$\Phi_1 : \quad B = (1-s_1)(1-(s_1 A)^{-1}), \qquad /3.19/$$

$$\Phi_2 : \quad B = (1-s_2)(A^{-1} - s_2^{-1}), \qquad /3.20/$$

$$\Phi_3 : \quad B^{-1} = (1-s_3)(1-(s_3 AB)^{-1}), \qquad /3.21/$$

$$\Phi_4 : \quad A^{-1} = (1-s_4)(1-s_4^{-1} B). \qquad /3.22/$$

Ясно, что граница области голоморфности для функции $g(A,B)$ определяется сечением этих четырех поверхностей. Сначала найдем сечение двух таких поверхностей. При этом получим соответствующие области неаналитичности:

$$A = a_i a_j , \quad B = (1-a_i^{-1})(1-a_j^{-1}), \qquad /3.23/$$

$$a_1 = \frac{1}{s_1}, \quad a_2 = s_2, \quad a_3 = 1-\frac{1}{s_3}, \quad a_4 = \frac{1}{1-s_4}, \qquad /3.24/$$

$$0 \le s_i \le \infty .$$

Сечение всех поверхностей можно найти, используя равенство величин a_i для допустимых значений s_i. Для этого нужно одновременно удовлетворить уравнениям

$$s_2 = \frac{1}{s_1}, \quad s_3 = \frac{s_1}{s_1 - 1}, \quad s_4 = 1 - s_1, \quad 0 \le s_i \le \infty . \qquad /3.25/$$

Значениями величин s_1, которые удовлетворяют этим уравнениям, являются $s_1 = 0, 1, \infty$. Соответствующие значения для величин s_2, s_3, s_4 следуют из уравнений /3.25/, все они приводят к $A = 0, \infty, B = 0, \infty$. Таким образом, функция $g(A,B)$ голоморфна в комплексных A - и B - плоскостях, за исключением множества точек $A = 0, \infty$ /для всех B/ и $B = 0, \infty$/для всех A/. Эту область голоморфности расширить далее уже нельзя, так как исключенные точки соответствуют световым конусам $(x_i - x_j)^2 = 0$.

4. Заключение

На основе известных структур конформной четырехточечной функции рассмотрены аналитические свойства функции $g(A,B)$

$$\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle = [(x_1-x_4)^2 (x_2-x_3)^2]^{-d} g(A,B) \qquad /4.1/$$

как функции гармонических переменных A и B. Эта структура и аналитические свойства функции Вайтмана ведут к тому, что функция $g(A,B)$ голоморфна в комплексных A - и B - плоскостях за исключением множества

$$\begin{array}{llll} A = 0 & \text{и} & A = \infty & \text{/для всех } B/, \\ B = 0 & \text{и} & B = \infty & \text{/для всех } A/. \end{array} \qquad /4.2/$$

Другие условия, например свойства разложения на пучки для функций Вайтмана или различные динамические предположения, ограничивают далее функциональную структуру функции $g(A,B)$. Наши исследования определяют область голоморфности четырехточечной функции также в переменных ζ_i. Функция $W(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ голоморфна за исключением множества точек

$$\zeta_i^2 = 0, \quad (\zeta_i + \zeta_j)^2 = 0, \quad (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)^2 = 0.$$

Особое представление конформной четырехточечной функции дано Симанзиком [7] и Тодоровым [1]:

$$W_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = W_2(x_1, x_2) W_2(x_3, x_4) + W_2(x_1, x_3) W_2(x_2, x_4)$$
$$+ W_2(x_1, x_4) W_2(x_2, x_3) + W_4^T(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad /4.3/$$

$$W_4^T(x_1, x_2, x_3, x_4) = [(x_1-x_2)^2 (x_1-x_3)^2 (x_1-x_4)^2 (x_2-x_3)^2 \times$$
$$\times (x_2-x_4)^2 (x_3-x_4)^2]^{-\frac{d}{3}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\sigma_1 \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\sigma_2 [K(\sigma_1, \sigma_2) \times$$
$$\times \Gamma(\tfrac{d}{3} + \sigma_1) \Gamma(\tfrac{d}{3} + \sigma_2) . \Gamma(\tfrac{d}{3} - \sigma_1 - \sigma_2) A^{\sigma_1} B^{-\sigma_2}]. \qquad /4.4/$$

Это выражение обладает, однако, весьма специальными свойствами при разложении на пучки. Кроме того, на ядро $K(\sigma_1, \sigma_2)$ следует наложить ограничения, чтобы обеспечить требуемые аналитические свойства четырехточечной функции. Важным при этих рассмотрениях оказывается учет условия причинности. Для тождественных скалярных полей это можно сделать при помощи соотношения /2.10/. Для различных полей подобные соотношения отсутствуют и учесть влияние причинности труднее. Несмотря на это, имеется возможность обобщить рассмотрение также на этот случай.

Литература

1. *See e.g.: I.T.Todorov. Conformal invariant quantum field theory, and G.Mack. Conformal invariance and short distance behaviour in quamtum field theory, in: Lecture Notes in Physics, Vo. 17, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1972); I.T.Todorov. CERN preprint TH 1697 (1973); S.Ferrara, R.Gatto, A.F.Grillo. Conformal Algebra in Space-Time and Operator Product Expansions. Springer Tracts of Modern Physics, Vo. 67, Berlin-Heidelberg-New York (1973).*
2. *S.Ferrara, A.F.Grillo, R.Gatto. Ann.Phys. (N.Y.), 76, 161 (1973); I.T.Todorov. CERN preprint, TH 1697 (1973).*
3. *A.A.Migdal. Phys.Lett., 37B, 386 (1971); G.Mack, I.T.Todorov. Phys.Rev., D8, 1764 (1973); C.G.Gallan. Phys.Rev., D2, 1541 (1970); K.Symanzik. Commun. Math.Phys., 18, 227 (1970).*
4. *See e.g.: R.F.Streater, A.S.Wightman. PCT, Spin and Statistics and All That, New York, W.A.Benjamin, 1964;*
   Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, И.Т.Тодоров. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. Москва, Наука, 1969.
5. *G.Kallen. Nucl.Phys., 25, 568 (1961).*
6. *G.Kallen, A.S.Wightman. Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. 1, No. 6 (1958).*
7. *K.Symanzik. Lett. Nuovo Cim., 3, 734 (1972).*

Рукопись поступила в издательский отдел
25 ноября 1975 года.