ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА





P2 - 9300



Е.Н.Румянцева

# ФОТОННЫЙ ГАЗ В МИРЕ ФРИДМАНА

1975

P2 - 9300

Е.Н.Румянцева

# ФОТОННЫЙ ГАЗ В МИРЕ ФРИДМАНА

*Направлено в ТМФ*

В настоящей работе построена статистическая модель сферического мира Фридмана, геометрические свойства которого определяются фотонным газом. Усреднение операторного тензора энергии-импульса электромагнитного поля производится в соответствии с общими принципами квантовой статистики /1/. В результате здесь показано, что квантовую статистику можно привести в согласие с уравнениями гравитации Эйнштейна. Аналогичные задачи для нейтринного газа и для газа безмассовых скалярных частиц были решены в наших работах /2,3/.

Бивектор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ подчиняется уравнениям Максвелла

$$\nabla^{\alpha} F_{\alpha\beta} = 0 ;$$

$$\nabla_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \nabla_{\beta} F_{\gamma\alpha} + \nabla_{\gamma} F_{\alpha\beta} = 0 , \qquad /1/$$

где $\nabla_{\mu}$ обозначает ковариантную производную.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля выражается через $F_{\mu\nu}$ обычным образом:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} . \qquad /2/$$

Как известно, фотоны ведут себя одинаково в любых мирах, находящихся в конформном соответствии /4/. Два мира находятся в конформном соответствии, если их метрики связаны соотношением $ds'^2 = B^2 ds^2$, где $B$ - скалярная функция.

Для миров, находящихся в конформном соответствии, в координатном базисе имеем

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\,,$$

$$T'_{\mu\nu} = B^{-2} T_{\mu\nu}\,, \qquad /3/$$

где штрихованные величины относятся к миру с метрикой $ds'^2$, а нештрихованные - к миру с метрикой $ds^2$.

Подставляя $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ в /1/, имея в виду, что $A'_\mu = -A_\mu$, получаем

$$\Box A_\alpha - R_\alpha^\beta A_\beta - \nabla_\alpha(\nabla_\beta A^\beta) = 0\,.$$

Рассмотрим теперь статический мир с метрикой

$$ds^2 = dx^{0\,2} - g_{ij}(x^1, x^2, x^3)\, dx^i dx^j\,,$$

$dx^0 = c\,dt$, $c$ - скорость света. Латинские индексы пробегают значения 1,2,3. В кулоновской калибровке $\nabla^\alpha A_\alpha = 0$, $A_0 = 0$ уравнения для вектора-потенциала запишутся в виде [5]

$$-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 A_i}{dt^2} + (\hat{P}^2 A)_i = 0\,, \qquad /4/$$

где вектор $\hat{P}A$ имеет компоненты

$$(\hat{P}A)_i = \frac{1}{2}\, e_{ikj}\, (\partial_\ell A_m - \partial_m A_\ell)\, g^{k\ell} g^{mj}\,.$$

В статическом сферическом мире в бисферических координатах $\xi, \eta, \zeta$, для которых

$$ds^2 = dx^{0\,2} - r^2(\sin^2\zeta\, d\xi^2 + \cos^2\zeta\, d\eta^2 + d\zeta^2)\,, \qquad /5/$$

в работе [6] было получено решение уравнений /4/:

$$A_i = \sqrt{h} \sum_{\epsilon=\pm 1}\ \sum_{p=2}^{\infty}\ \sum_{|m|\le \frac{p}{2}-1}\ \sum_{|n|\le \frac{p}{2}} \left(C_{mn}^{\epsilon p} U_{mn;i}^{\epsilon p} + C_{mn}^{\epsilon p\,+}\, \bar{U}_{mn;i}^{\epsilon p}\right),$$

где $U_{mn;i}^{\epsilon p} = e^{-i\nu_p t}\, a_{mn;i}^{\epsilon p}$; $\bar{U}_{mn;i}^{\epsilon p}$ комплексно сопряжено $U_{mn;i}^{\epsilon p}$; $\nu_p = \frac{c}{r}\,p$; $a_{mn;i}^{\epsilon p}$ есть собственные векторы оператора поляризации $\hat{P}$, $a_{mn;i}^{+1p}$

и $a^{-1p}_{mn;i}$ отвечают собственным значениям $p$ и $-p$ соответственно. Они имеют вид

$$a^{\epsilon p}_{mn;i} = e^{i(m+n)\xi} e^{i(n-m)\eta} a^{\epsilon}_{i}(\zeta),$$

где

$$a^{\epsilon}_{1}(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi p}\{\sqrt{(\ell + m + 1)(\ell - m + 1)}\, Z^{\ell+1}_{mn}(\zeta) -$$

$$- \sqrt{(\ell + n + 1)(\ell - n + 1)}\, Z^{\ell}_{mn}(\zeta)\};$$

$$a^{\epsilon}_{2}(\zeta) = - \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}\pi p}\{\sqrt{(\ell + m + 1)(\ell - m + 1)}\, Z^{\ell+1}_{mn}(\zeta) +$$

$$+ \sqrt{(\ell + n + 1)(\ell - n + 1)}\, Z^{\ell}_{mn}(\zeta)\};$$

$$a^{\epsilon}_{3}(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi p}\{\sqrt{(\ell + m)(\ell + n + 1)}\, Z^{\ell}_{m,\,n-1}(\zeta) -$$

$$- \sqrt{(\ell - n)(\ell - n + 1)}\, Z^{\ell}_{m,\,n+1}(\zeta)\},$$

где

$$\ell = \frac{p}{2} - 1\,; \quad Z^{\ell}_{mn}(\zeta) = P^{\ell}_{mn}(\cos 2\zeta).$$

Компоненты бивектора электромагнитного поля определяются следующими выражениями:

$$F_{i0} = E = \frac{i}{r}\sqrt{h} \sum_{\epsilon pmn} (C^{\epsilon p}_{mn} U^{\epsilon p}_{mn;i} - \overline{C}^{\epsilon p}_{mn} \overline{U}^{\epsilon p}_{mn;i}),$$

$$F_{ik} = e_{ikj} H^{j},$$

где

$$g_{ik} H^{k} = \frac{\sqrt{h}}{r} \sum_{\epsilon pmn} \epsilon p (C^{\epsilon p}_{mn} U^{\epsilon p}_{mn;i} + C^{\epsilon p +}_{mn} \overline{U}^{\epsilon p}_{mn;i}).$$

В соответствии с правилами квантования электромагнитного поля, сформулированными в /6/, операторы рождения и уничтожения фотонов определяются соответственно как $\hat{C}^{\epsilon p +}_{mn} = -\frac{1}{i\sqrt{h}}(U^{\epsilon p}_{mn}, \hat{A})$, $\hat{C}^{\epsilon p}_{mn} = \frac{1}{i\sqrt{h}}(\bar{U}^{\epsilon p}_{mn}, \hat{A})$,

где скобки означают скалярное произведение в пространстве решений уравнений Максвелла.

Функции $U^{\epsilon p}_{mn}$ ортогональны и нормированы

$$(\bar{U}^{\epsilon p}_{mn}, U^{\epsilon' p'}_{m'n'}) = i\delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{pp'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} .$$

Коммутационные соотношения операторов рождения и уничтожения следующие:

$$[\hat{C}^{\epsilon p}_{mn}, \hat{C}^{\epsilon' p' +}_{m'n'}]_- = \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{pp'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} ,$$

$$[\hat{C}^{\epsilon p}_{mn}, \hat{C}^{\epsilon' p'}_{m'n'}]_- = [\hat{C}^{\epsilon p +}_{mn}, \hat{C}^{\epsilon' p' +}_{m'n'}]_- = 0 . \qquad /6/$$

Конформно-инвариантый оператор энергии определяется следующим образом /4/:

$$\hat{H} = \frac{1}{2ih}(A, \hat{K}A) ,$$

где $\hat{K}$ - оператор конформного момента, который равняется в данном случае $ih\frac{\partial}{\partial t}$ .

При этом

$$:\hat{H}: = \sum_{\epsilon pmn} \frac{cph}{r} \hat{C}^{\epsilon p +}_{mn} \hat{C}^{\epsilon p}_{mn} . \qquad /7/$$

Оператор числа частиц равняется

$$:\hat{N}: = \sum_{\epsilon pmn} \hat{C}^{\epsilon p +}_{mn} \hat{C}^{\epsilon p}_{mn} . \qquad /8/$$

Двоеточия означают нормальное произведение операторов рождения и уничтожения фотонов.

Статистическое среднее любого оператора $A$ определяется /1/ следующим образом:

$$\langle A \rangle = \frac{Sp\, A e^{-\frac{\mathcal{H}}{\Theta}}}{Sp\, e^{-\frac{\mathcal{H}}{\Theta}}},$$

где $\hat{\mathcal{H}} = :\hat{H}: - \mu :\hat{N}:$, $\mu$ - химический потенциал, $\Theta$ - глобальная температура газа.

Глобальная температура газа была введена в /7/ при рассмотрении глобального /т.е. в области пространства/ релятивистского распределения Максвелла-Больцмана. В этой работе было показано, что релятивистское распределение Максвелла-Больцмана возможно, если существует вектор Киллинга $\xi^a$ /если $m \neq 0$ / или конформный вектор Киллинга $\xi^a$ /если $m = 0$ /. Локальная температура газа связана с вектором $\xi^a$, входящим в функцию распределения газа

$$T(x) = \frac{c}{k\sqrt{(\xi,\xi)}},$$

где $k$ - постоянная Больцмана. Далее, если $\xi^a(x)$ - конформный вектор Киллинга, то и $\lambda\xi^a(x)$ - конформный вектор Киллинга. Если глобальная температура первого газа равна 1, то глобальная температура второго газа равна $\lambda$.

Следовательно, глобальная температура равна отношению локальных температур $\lambda = \frac{T_2(x)}{T_1(x)}$. Для векторного поля $\frac{\partial}{\partial x^0}$ глобальную температуру газа в мире Фридмана с метрикой $ds'^2 = B^2 ds^2$ мы положим равной локальной температуре в статическом мире, поскольку последняя в этом случае не зависит от $x$. При этом достигается конформная инвариантность статистического усреднения операторов безмассового поля.

Статистические средние произведений операторов рождения и уничтожения частиц, подчиняющихся коммутационным соотношениям /6/, согласно /1/ равняются

$$< \hat{C}^{\epsilon p +}_{mn} \hat{C}^{\epsilon' p'}_{m' n'} > = \Lambda_p \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{pp'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} ,$$

$$< \hat{C}^{\epsilon p}_{mn} \hat{C}^{\epsilon' p'}_{m' n'} > = 0 , \quad < \hat{C}^{\epsilon p +}_{mn} \hat{C}^{\epsilon' p' +}_{m' n'} > = 0 ,$$

где

$$\Lambda_p = \{ \exp \frac{1}{\Theta} [ \frac{cph}{r} - \mu ] - 1 \}^{-1} .$$

Статистические средние от операторов /7/, /8/, как легко подсчитать, равняются

$$<:\hat{N}:> = 2 \sum_{p=2}^{\infty} \Lambda_p (p+1)(p-1),$$

$$<:\hat{H}:> = 2 \sum_{p=2}^{\infty} \Lambda_p \frac{ch}{r} p(p+1)(p-1) .$$

Это есть соответственно число частиц и энергия газа фотонов.

Мы потребуем, чтобы метрика $ds'^2 = B^2 ds^2$, где $ds^2$ определяется /5/, подчинялась уравнениям Эйнштейна

$$R'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R' g'_{\alpha\beta} = - \frac{8\pi\gamma}{c^4} <:T'_{\alpha\beta}:> , \qquad /9/$$

где $<:T'_{\alpha\beta}:>$ - тензор энергии-импульса фотонного газа, равный статистическому среднему оператора тензора энергии-импульса электромагнитного поля.

След тензора энергии-импульса фотонного газа равняется нулю. Поэтому в силу уравнений Эйнштейна /9/ скалярная кривизна $R'$ тоже должна равняться нулю. Если два мира находятся в конформном соответствии, то их скалярные кривизны связаны соотношением $B^3 R' = BR + 6\Box B$. Если метрика $g'_{\alpha\beta} = B^2 g_{\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнениям /9/, то $R' = 0$, и отсюда мы получаем уравнение для $B$:

$$\Box B + \frac{R}{6} B = 0.$$

Мы удовлетворяем этому уравнению без ограничения общности, полагая $B = \cos x^0$.

Таким образом, тензор энергии-импульса электромагнитного поля в мире Фридмана равняется согласно /8/

$$T'_{\mu\nu} = \frac{1}{\cos^2 x^0} T_{\mu\nu}.$$

Отсюда и из уравнений Эйнштейна имеем условия, накладываемые на тензор энергии-импульса фотонного газа в статическом мире

$$\begin{aligned} <:T_{00}:> &= \frac{3c^4}{8\pi\gamma r^2}, \\ <:T_{0k}:> &= 0, \\ <:T_{ik}:> &= \frac{c^4}{8\pi\gamma r^2} g_{ik}. \end{aligned} \qquad /10/$$

Чтобы проверить, удовлетворяются ли эти условия, надо подсчитать среднее от оператора тензора энергии-импульса /2/ фотонного газа. С этой целью вычислим средние $<:H_k H_i:>$, $<:E_k E_i:>$, $<:E_k H_i:>$. Для них оказывается

$$\begin{aligned} <:H_k H_i:> &= \frac{h}{r^2} \sum_{\epsilon p} \Lambda_p p^2 (t^{\epsilon}_{ik} + t^{\epsilon}_{ki}), \\ <:E_k E_i:> &= \frac{h}{r^2} \sum_{\epsilon p} \Lambda_p p^2 (t^{\epsilon}_{ik} + t^{\epsilon}_{ki}), \\ <:E_i H_k:> &= \frac{ih}{r^2} \sum_{\epsilon p} \epsilon p^2 (t^{\epsilon}_{ik} - t^{\epsilon}_{ki}), \end{aligned} \qquad /11/$$

где $t^{\epsilon}_{ik} = \sum_{mn} \bar{H}^{\epsilon p}_{mn;k} H^{\epsilon p}_{mn;i}$. Из /11/ имеем

$$<:F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}:> = <:H_k H^k:> - <:E_k E^k:> = 0,$$

и

$$<:T_{00}:> = <:E_i E^i:>,$$

$$<:T_{0k}:> = \epsilon_{ki\ell} g^{im} g^{\ell n} <:E_n H_m:>,$$

$$<:T_{ik}:> = g_{ki} <:H^\ell H_\ell:> - 2<:H_k H_i:> .$$

Нам необходимо вычислить теперь $t^\ell_{ik}$. Используя соотношения для специальных функций $P^\ell_{mn}(\cos 2\chi)$, приведенных в /8/, получаем следующие результаты:

$$t^\ell_{ik} = \frac{c g_{ik}}{8\pi^2 p^2 r^2} \frac{2}{3} p(p+1)(p-1) .$$

Поэтому средние /11/ принимают вид

$$<:H_k H_i:> = <:E_k E_i:> = \frac{ch}{3\pi^2 r^4} \sum_{p=2}^{\infty} A_p g_{ik} p(p+1)(p-1) ,$$

$$<:E_i H_k:> = 0 .$$

Соответственно средние /10/ равны

$$<:T_{00}:> = \frac{hc}{\pi^2 r^4} \sum_{p=2}^{\infty} A_p p(p+1)(p-1) ,$$

$$<:T_{0k}:> = 0 ,$$

$$<:T_{ik}:> = g_{ik} \frac{hc}{3\pi^2 r^4} \sum_{p=2}^{\infty} A_p p(p-1)(p+1) .$$

Сравнивая эти результаты с условиями /10/, получаем необходимое и достаточное условие выполнения уравнений Эйнштейна, которое единственно и накладывается на радиус мира

$$r^2 = \frac{8h\gamma}{3\pi c^3} \sum_{p=2}^{\infty} A_p (p-1) p(p+1) .$$

В заключение автор выражает благодарность профессору Н.Н.Боголюбову /мл./ за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения.

*Литература*


1. Н.Н.Боголюбов. Лекции по квантовой статистике. Избранные труды, т. 2, Киев, Наукова думка, 1970.
2. Е.Н.Черникова. В сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц", вып. 6, М., Атомиздат, 1975.
3. Е.Н.Румянцева. Препринт ОИЯИ, Р2-9169, Дубна, 1975.
4. А.Б.Пестов, Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-8370, Дубна, 1974.
5. А.Б.Пестов. Препринт ОИЯИ, Р2-8070, Дубна, 1974.
6. А.Б.Пестов. Препринт ОИЯИ, Р2-8418, Дубна, 1974.
7. N.A.Chernikov. Acta Physica Polonica, vol. XXVI (1964).
8. Н.Я.Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. М., Наука, 1965.



Рукопись поступила в издательский отдел
12 ноября 1975 года.