93-330

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2-93-330

В.В.Папоян*, В.Н.Первушин

КВАНТОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ ЙОРДАНА — БРАНСА — ДИККЕ И ПРОБЛЕМА «НАБЛЮДАЕМОГО ВРЕМЕНИ»

Направлено в журнал «Астрофизика» НАН Армении

*Ереванский государственный университет

1993

ВВЕДЕНИЕ

Исследование эволюции Вселенной спустя несколько мгновений после ее рождения, по-видимому, невозможно без понимания вопросов, что такое квантовая теория гравитации и каковы трудности и границы применимости ее понятий, в частности, «волновой функции» и «времени эволюции» в эпоху, когда еще несправедливы квазиклассическое и классическое приближения.

В общепринятой в настоящее время схеме квантования Уиллера — Де Витта [1,2] волновая функция Вселенной интерпретируется как стационарное состояние с нулевым собственным значением эйнштейновского оператора энергии

$$H\Psi = 0. \tag{1}$$

Это уравнение возникает как условие связи первого рода на физические состояния теории, проквантованной в расширенном фазовом пространстве. В таком подходе, который будем называть редукцией квантованной теории (РКТ), время эволюции появляется только на квазиклассической стадии расширения, как локальный параметр квазиклассического приближения [2].

В работе одного из авторов (В.Н.П.) [3] рассматривалась возможность введения квантового (глобального) времени, как времени спектрального представления волновой функции Вселенной, в альтернативном подходе квантования редуцированной теории (КРТ), когда вначале разрешаются все связи на классическом уровне и строится редуцированное фазовое пространство, а затем проводится схема квантования оставшихся после редукции степеней свободы.

В работах [3,4] были получены волновые функции фридмановской Вселенной в простейших случаях «радиации» и «пыли» и показано, что КРТ-подход удовлетворяет принципу соответствия классической теории, а время квантового наблюдателя для неподвижной пыли совпадает с собственным временем Фридмана (аналогично случаю релятивистской частицы в покое).

В настоящей работе мы рассматриваем квантование однородной космологической модели в теории Йордана — Бранса — Дикке с целью найти редуцированную волновую функцию Вселенной и изучить вопрос о влиянии дополнительных степеней свободы на квантовую эволюцию Вселенной.

Раздел 1 посвящен детальной постановке вопроса о квантовании и его интерпретации на примере релятивистской частицы. В разделе 2 рассматривается однородная космологическая модель скалярно-тензорной теории гравитации.

1. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Обсудим используемый метод квантования на простом примере релятивистской частицы, описываемой действием, инвариантным относительно репараметризации времени

$$W_1 = \int_0^T d\tau\, [\dot X_0 P_0 + \dot X_i P_i - \alpha H]; \quad \dot X = \frac{dX}{d\tau}; \tag{2}$$

$$H = \frac{1}{2}(\omega^2 - P_0^2); \quad \omega = \sqrt{m^2 + P_i^2}. \tag{3}$$

Спектральное представление волновой функции в квантовой теории (2) хорошо известно:

$$\Psi(X_0, X_i) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \left[a^{(+)}_{P}\, e^{iX_jP_j - iX_0P_0} + a^{(-)}_{-P}\, e^{-iX_jP_j + iX_0P_0}\right], \tag{4}$$

где $a^{(+)}$, $a^{(-)}$ есть коэффициенты разложения волновой функции по явным решениям уравнения связи с различными знаками

$$H = 0 \mapsto P_0 = \mp\omega, \tag{5}$$

а показатели экспонент совпадают с действием, взятым на этих явных решениях

$$W_1^{\mathrm{Red}} = \int_0^T d\tau\, [\dot X_i P_i \mp \dot X_0 \omega] \equiv X_i P_i \mp X_0 \omega \tag{6}$$

(с точностью до замены переменных $(P_i \to -P_i)$ в последнем слагаемом). Выражение (6) будем называть редуцированным действием. Формальное квантование (6) ведет к волновой функции (4).

Мы видим, что после редукции осталось четыре независимых степени свободы, одна из которых отождествляется со временем спектрального представления (или временем внешнего наблюдателя) T_Q,

$$T_Q(X_0) = X_0. \tag{7}$$

В общепринятой интерпретации такое отождествление играет роль калибровки, а с энергией частицы связывается не собственное значение исходного гамильтониана H, а коэффициент перед X_0 в редуцированном действии (6).

В релятивистской квантовой механике даже частица в покое, $P_i = 0$, обладает волновой функцией с нетривиальной эволюцией во времени

$$\Psi(X_0) = a_0^{(+)} e^{-iX_0 m} + a_0^{(-)} e^{+iX_0 m}. \tag{8}$$

В этом случае редуцированное действие в точности совпадает с собственным временем частицы T_F, умноженным на m,

$$dT_F = m\alpha\, d\tau \equiv \alpha\, dt. \tag{9}$$

Для частицы в движении можно получить выражение для собственного времени, опираясь на исходные классические уравнения теории (2)

$$\frac{m dX_0}{\alpha\, dt} = \pm\omega \quad \models \quad dT_F = \frac{m}{\omega}\, dX_0. \tag{10}$$

Как и следовало ожидать, эти два времени связаны между собой преобразованием Лоренца

$$X_0 = \frac{\omega}{m} T_F = \frac{T_F}{\sqrt{1 - v_i^2}}; \quad v_i = \frac{P_i}{\omega}. \tag{11}$$

Главной проблемой при квантовании систем, инвариантных относительно репараметризации времени, является выбор времени, или выбор калибровки. На рассмотренном примере можно видеть, что это выбор резко ограничивается принципом «наблюдаемости», согласно которому в качестве времени можно использовать только инварианты группы репараметризации. Таких инвариантов два: время как интервал (9) (T_F, т.е. время сопутствующего наблюдателя), и время как редуцированное действие (6) (или время спектрального представления T_Q — время внешнего наблюдателя).

В классической релятивистской теории эти времена эквивалентны в силу эквивалентности инерциальных систем отсчета.

В квантовой релятивистской теории волновая функция выражается исключительно через время внешнего наблюдателя. Другими словами, построение волновой функции ведет к выделенности времени T_Q (как действия), которое не совпадает с собственным временем.

В работах [3,4] было показано, что квантование редуцированных однородных космологических моделей в теории гравитации Эйнштейна также

ведет к двум различным временам T_F и T_Q, которые совпадают для классического случая Вселенной, заполненной неподвижной пылью, точно так же, как они совпадают для релятивистской частицы в покое.

Эти совпадения дают основание надеяться на плодотворность как КРТ-метода, так и аналогии квантовой Вселенной с релятивистской квантовой частицей для более общих теорий.

2. ОДНОРОДНАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ТЕОРИИ ЙОРДАНА — БРАНСА — ДИККЕ

Рассмотрим скалярно-тензорную теорию гравитации [5,6]

$$W = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{e^{\sigma}}{12\kappa^2} (\mathbb{R} - \zeta\, \sigma_{,\mu}\sigma^{,\mu}) + \Lambda_M \right], \tag{12}$$

где $\mathbb{R}$ — 4-мерная скалярная кривизна, σ — логарифм скалярного поля, ζ — безразмерная константа связи, которая по современным данным имеет значение $\zeta \geq 250$ [7]

$$12\kappa^2 = 16\pi G;$$

G — ньютоновская постоянная, выделенная в виде фактора для удобства, Λ_M — плотность функции Лагранжа вещества и негравитационных полей.

Геометрия изотропной космологической модели задается метрикой Робертсона — Уокера

$$ds^2 = (dT_F)^2 - a^2(T_F) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2/r_0^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) \right], \tag{13}$$

где r_0 определяется a_0 — величиной масштабного фактора в современную эпоху,

$$dT_F = \alpha\, dt \quad (\alpha = \sqrt{g_{00}}) \tag{14}$$

есть интервал собственного времени, инвариантный относительно преобразования группы репараметризации времени

$$t \to t'(t). \tag{15}$$

После интегрирования по трехмерному пространству

$$\int d^3x \sqrt{-g} = \alpha a^3 \int \frac{d^3x r^2 \sin\vartheta}{\sqrt{1 - kr^2/r_0^2}} \equiv \alpha a^3 V_3(r_0). \tag{16}$$

Действие (12) принимает вид

$$W = V_3(r_0)\int_0^T dt\left\{\frac{e^{\sigma}}{2x^2}\left[e^{-\sigma}\partial_0\left(e^{\sigma}\frac{a^2\partial_0 a}{\alpha}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \partial_0\sigma\,\frac{a^2\partial_0 a}{\alpha} - \frac{a(\partial_0 a)^2}{\alpha} - \frac{\alpha\, ka}{r_0^2} + \frac{\zeta\, a^3(\partial_0\sigma)^2}{6}\right] + \alpha\, a^3\Lambda_M\right\}. \qquad (17)$$

Для последующего квантования удобно записать это действие в формализме 1-го порядка, сделав конформное преобразование

$$a = R\,e^{-\sigma/2} \equiv e^{\mu}\,e^{-\sigma/2};$$

$$dt = d\tau\, e^{-\sigma/2}. \qquad (18)$$

После чего вместо (17) получим выражение

$$W_1 = V_3(r_0)\int_0^T d\tau\left\{\frac{d\mu}{d\tau}P_{(\mu)} + \frac{d\sigma}{d\tau}P_{(\sigma)} - \alpha H - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left[P_{(\mu)} + \frac{6}{3+2\zeta}P_{(\sigma)}\right]\right\}, \qquad (19)$$

где

$$H = R^3\left[-\frac{1}{2}\frac{\kappa^2 P^2_{(\mu)}}{R^6} + \frac{1}{2}\frac{12\,\kappa^2}{(3+2\zeta)}\frac{P^2_{(\sigma)}}{R^6} + \frac{k}{2R^2 r_0^2\kappa^2} + \Lambda_M\, e^{-2\sigma}\right], \qquad (20)$$

есть гамильтониан теории, $P_{(\mu)}$, $P_{(\sigma)}$ — канонически сопряженные импульсы полей μ и σ, соответственно.

В радиационно-доминантную эпоху

$$\Lambda_M(R,\sigma) = \frac{\varepsilon\, e^2\sigma}{R^4} \qquad (21)$$

гамильтониан (20) не зависит от σ и $P_{(\sigma)}$ сохраняется

$$\{P_{(\sigma)}, H\} = \frac{\partial H}{\partial\sigma} = 0. \qquad (22)$$

Очевидно, $P_{(\sigma)} = \text{const}$, также и в отсутствие радиации и вещества $\Lambda_M = 0$.

Проведем квантование модели (19), (20) методом редуцированного фазового пространства для случая $P_{(\sigma)} = \text{const}$. Рассмотрим действие (19) на явных решениях уравнения связи

$$H = 0 \;\mapsto\; P_{(\mu)} = \mp F(R, P_{(\sigma)}), \qquad (23)$$

где

$$F(R^2) = [AR^4 + BR^2 + C]^{1/2}, \qquad (24)$$

$$A = \frac{k}{r_0^2\kappa^4},\quad B = \frac{2\varepsilon}{\kappa^2},\quad C = \frac{12}{3+2\zeta}P^2_{(\sigma)}. \qquad (25)$$

Подставив это решение в (19), получим редуцированное действие

$$W_{\pm}^{Red} = V_3(r_0)P_{(\sigma)}\cdot\sigma \mp W^H(P_{(\sigma)}, R), \qquad (26)$$

$$W^H(P_{(\sigma)}, R) = \frac{V_3(r_0)}{2}\left[C\int_0^{R^2}\frac{dx}{xF(x)} + \frac{B}{2}\int_0^{R^2}\frac{dx}{F(x)}\right], \qquad (27)$$

$$W^H(P_{(\sigma)}, R) \equiv E_Q T_Q. \qquad (28)$$

С точки зрения «внешнего наблюдателя», рассматриваемая система с сохраняющимся импульсом $P_{(\sigma)}$ имеет энергетический спектр E_Q и время T_Q в качестве параметра спектрального представления

$$\Psi_{(\sigma)} = \int dP\left[a^{(+)}_{(P)}\, e^{iV_3 P\sigma - iE_Q T_Q(R)} + a^{(-)}_{(-P)}\, e^{-iV_3 P\sigma + iE_Q T_Q(R)}\right].$$

Для плоского пространства $k = 0$ с точностью до константы вычитания расходящихся при $R = 0$ интервалов (27) получим

$$E_Q T_Q = V_3(r_0)\frac{\sqrt{C}}{2}\left[\sqrt{1 + R^2\frac{B}{C}} + \ln\frac{\sqrt{1 + R^2B/C} - 1}{\sqrt{1 + R^2B/C} + 1}\right]. \qquad (29)$$

В пределе $R \to 0$ доминирует плотность скалярного поля. Поскольку это поле не имеет массы, естественно предположить, что его энергия совпадает с импульсом

$$E_Q(P_{(\sigma)}, \varepsilon = 0) = V_3(r_0)P_{(\sigma)}. \qquad (30)$$

В пределе $P_{(\sigma)} \to 0$ доминирует плотность излучения, энергия которого, согласно (21), равна

$$E_Q(P_{(\sigma)} = 0, \varepsilon) = V_3(r_0)\varepsilon, \qquad (31)$$

а время совпадает с конформным

$$T_Q(P_{(\sigma)} = 0) = R\sqrt{\frac{1}{2\kappa^2\varepsilon}}. \qquad (32)$$

Отсюда по аналогии с релятивистской частицей можно предположить, что спектр имеет вид

$$E_Q = V_3(r_0)\sqrt{P_{(\sigma)}^2 + \varepsilon^2}. \qquad (33)$$

Квантовое время определяется из соотношения (29)

$$T_Q = \frac{P_{(\sigma)}\sqrt{3/(3+2\zeta)}}{\sqrt{P_{(\sigma)}^2 + \varepsilon^2}}\left[Z + \ln\frac{Z-1}{Z+1}\right], \qquad (34)$$

$$Z = \sqrt{1 + R\frac{\varepsilon\,(3+2\zeta)}{6\,\kappa^2 P_{(\sigma)}^2}}. \qquad (35)$$

В пределе $\varepsilon \to 0$ (или $R^2 \langle \frac{6P_{(\sigma)}^2\kappa^2}{(3+2\zeta)\varepsilon}$) возникает инфляционное расширение пространства относительно времени T_Q,

$$T_Q \cong \sqrt{\frac{3}{3+2\zeta}}\,\ln R \;\mapsto\; R(T_Q) = \exp\sqrt{\frac{3+2\zeta}{3}}\,T_Q.$$

С увеличением R стадия инфляции переходит в стадию расширения радиационно доминированной Вселенной (32).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена обсуждению понятия времени для квантовых космологических моделей, которые инвариантны относительно группы преобразований репараметризации времени. В квантовой теории о времени можно говорить лишь в контексте спектрального разложения волновой функции, которая хорошо известна для квантовой релятивистской частицы, описываемой действием, инвариантным относительно указанной выше группы преобразований.

Мы попытались здесь обобщить понятие времени для квантовой релятивистской частицы на космологическую модель скалярно-тензорной теории гравитации, исходя из внешнего сходства (возможно имеющего глубокий смысл) гамильтонова формализма для этих моделей в редуцированном фазовом пространстве.

Для квантовой частицы проблема выбора времени решается следующим образом: в спектральном представлении волновой функции под временем понимают ту часть редуцированного действия, которая описывает степень свободы с отрицательным квадратом импульса в эйнштейновском гамильтониане H (обращающемся в ноль для физического сектора теории).

В квантовой теории волновая функция и ее эволюция описываются именно этим временем, а не временем наблюдателя, «сопровождающего» систему (сопутствующий наблюдатель).

В этой аналогии с релятивистской квантовой частицей «сопутствующая система отсчета» (где время является собственным) может описывать детектор наблюдателя в состоянии «покоя», т.е. отсутствие всякого физического возбуждения.

В контексте такого понимания времени эволюции квантовой системы любое движение (или любое физическое возбуждение) выводит квантовую систему из области описания классической эволюции собственным временем, т.е. понятия сопутствующего наблюдателя в квантовой и классической теориях различны.

В квантовой космологии под «состоянием покоя» можно понимать Вселенную, заполненную покоящейся пылью. В этом случае, как показано в [3,4], время спектрального представления (время-действие) совпадает с временем эволюции Фридмана (с временем-интервалом).

Состояние «движения» Вселенной может быть описано в неявной форме (например, изменением уравнения состояния пыли на состояние радиации) или в явной форме включением дополнительных степеней свободы.

И в том, и в другом случаях время «внешнего наблюдателя» не совпадает с собственным классическим временем.

Связь этих времен должна описываться группой движения, являющейся обобщением группы Лоренца. Здесь возникает вопрос о группе движения, адекватной описанию рождающейся квантовой Вселенной.

Авторы благодарны Д.А.Киржницу и Р.М.Мурадяну за обсуждения.

Один из нас (В.В.П.) работал при частичной поддержке гранта Фонда Майера, присужденного Американским физическим обществом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wheeler J.A. — In: «Relativity, Groups and Topology», ed.B.S. DeWitt and C.M.DeWitt, New-York — London, 1964.
2. DeWitt B.S. — Phys. Rev., 1967, 160, p.1113.
3. Pervushin V.N. — JINR Rap.Commun. No.6[57]-92, 1992, p.46.
4. Pervushin V.N., Towmasjan T. — J. Moscow Phys. Soc., 1993, 3, p.1.
5. Brans C., Dicke R.H. — Phys. Rev., 1961, 124, p.925.
6. Jordan P. — Schwerraft und Weltall, Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1955.
7. Уилл К. — Теория и эксперимент в гравитационной физике. М., Энергоатомиздат, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 сентября 1993 года.