объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-93-321

А.Л.Кошкаров[1]

МЕТОД ПЕРЕВАЛА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

[1]Петрозаводский университет, Россия

1993

1. Введение

Сложность современного аппарата функционального интегрирования в значительной степени обусловлена тем обстоятельством, что функциональный интеграл Фейнмана как математический объект не определен [1–5]. Причиной такого положения дел является не очень хорошее поведение подынтегральной экспоненты $\exp\{iS\}$ при интегрировании по бесконечному пространству функций. Борьба с бесконечностями путем разного рода регуляризаций и с сопутствующими неоднозначностями как раз и приводит к чрезмерной усложненности формализма [5, 6]. Количество регуляризаций (искусственное улучшение сходимости) может быть уменьшено, если к функциональному интегралу применить известный из теории конечномерных интегралов метод оценки под названием "метод перевала" (метод седловой точки, наискорейшего спуска, стационарной фазы). Надо отметить, что указанный метод как будто бы уже применялся для оценки функциональных интегралов. В действительности, однако, кроме использования указанных выше терминов, ничего по сути данного метода в литературе обнаружить не удалось.

План статьи следующий. Сначала напомним основную идею классических методов Лапласа и перевала в простейшем варианте для оценки однократного интеграла [7]. Затем применим эту идею для оценки функционального интеграла.

2. Метод Лапласа

Метод Лапласа применяется для оценки интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda f(x)} dx\,, \tag{1}$$

где λ — большой вещественный параметр, функция $f(x)$ на промежутке (a, b), который может быть и бесконечным, имеет один максимум в точке $x_0 \in (a, b)$; при этом функция $e^{\lambda f(x)}$ в точке x_0 имеет острый и высокий максимум. Из наглядных соображений очевидно, что основной вклад в интеграл дает малая окрестность точки x_0:

$$\int_a^b e^{\lambda f(x)} dx \approx \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{\lambda f(x)} dx \approx \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{\lambda[f(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2]} dx =$$

$$= e^{\lambda f(x_0)} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{\frac{\lambda}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2} dx\,,$$

где $\varepsilon > 0$ — малое число, и в разложении $f(x)$ вблизи точки x_0 отброшены малые величины. Остающийся справа интеграл легко вычисляется, если пределы заменить на бесконечные, что не вносит большой ошибки ввиду быстрого убывания подынтегральной функции при удалении от точки x_0. Получающаяся оценка довольно точна, если концы промежутка интегрирования не вносят большого вклада в интеграл. Если на отрезке (a, b) имеется несколько точек максимума у функции $f(x)$, то оценка интеграла есть сумма вкладов каждой точки.

3. Метод перевала

Это несколько более общий метод оценки интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_C \exp[\lambda f(z)] dz\,, \tag{2}$$

где $\lambda \to \infty$, $f(z)$ — аналитическая функция, C — контур в плоскости z, а вклад концов контура C в интеграл предполагается малым. Согласно идее Лапласа, для оценки интеграла (2) надо учесть

вклад тех точек контура, где модуль подынтегрального выражения $\exp[\lambda Re(f(z)]$ велик. Ввиду аналитичности $f(z)$ согласно теореме Коши можно деформировать контур C, не меняя положения его концов и значения самого интеграла. Пусть контур C деформирован в контур $\tilde{C}$ так, что $\tilde{C}$ проходит через стационарную точку z_0 функции $f(z)$ (которая может лежать и далеко в стороне от контура C) в направлении наискорейшего спуска функции $Ref(z)$. Теперь основной вклад в интеграл (2) определяется малой окрестностью $\Delta\tilde{C}$ точки z_0 на контуре $\tilde{C}$. Вблизи точки z_0:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \approx f(z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2.$$

Пусть $f''(z_0) = \rho e^{i\theta}$, $\quad z - z_0 = re^{i\phi}$. Тогда

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\rho r^2 \cos(\theta + 2\phi),\, v(x, y) = v(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\rho r^2 \sin(\theta + 2\phi). \tag{3}$$

Из (3) видно, что направление наискорейшего спуска ϕ для функции $u(x, y)$ с перевальной точки (x_0, y_0) определяется условием

$$\cos(\theta + 2\phi) = -1, \quad \to \quad \phi = \frac{1}{2}(-\theta \pm \pi).$$

Теперь

$$\int_C e^{\lambda f(z)} dz = \int_{\tilde{C}} e^{\lambda f(z)} dz \approx \int_{\Delta\tilde{C}} \exp\left(\lambda[f(z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2]\right) dz.$$

Выполняя замену $z \to r$ под знаком интеграла и интегрируя по r в бесконечных пределах, что не вносит большой ошибки ввиду быстрого убывания подынтегральной функции, получаем

$$F(\lambda) \approx e^{\lambda f(z_0)} e^{i\phi} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\rho}},$$

что в действительности является главным членом асимптотического разложения по степеням $1/\lambda$ при $\lambda \to \infty$.

Таким образом, интеграл (3) может быть вычислен приближенно, если у функции $f(z)$ имеются стационарные точки. Вклад одной точки находится методом Лапласа для контура наискорейшего спуска — в этом и есть суть метода перевала. Важно также отметить, что фаза подынтегральной экспоненты остается постоянной при движении вдоль $\tilde{C}$, и, следовательно, нет осцилляций, которые осложнили бы оценку.

4. Функциональный метод перевала

Изложенный метод оценки интеграла (2) может быть почти дословно перенесен на случай бесконечномерных (функциональных) интегралов.

Простейший фейнмановский функциональный интеграл (амплитуда перехода) для частицы с одной степенью свободы, движущейся в потенциале $V(x)$, имеет вид:

$$< x_f, t_f | x_i, t_i >= \int Dx(t) \exp[iS(x(t))], \ S[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} [\frac{\dot{x}^2}{2} - V(x(t))] dt. \tag{4}$$

Рассмотрим более общее выражение:

$$< x_f, \theta_f | x_i, \theta_i >= \int Dx(\theta) \exp[iS(x(\theta))], \ S(x(\theta)) = \int_C [\frac{\dot{x}^2}{2} - V(x(\theta))] d\theta, \tag{5}$$

где $\theta = t + i\tau$ – комплексное время, $x(\theta)$–комплексная траектория, C–контур в плоскости θ с концами $\theta_i, \theta_f; x(\theta), V(x)$–аналитические функции. При этом функционал $S(x(\theta))$ принимает комплексные значения, и его можно рассматривать как аналитический функционал в том смысле, что

$$\frac{\delta}{\delta u} ReS(x) = \frac{\delta}{\delta v} ImS(x), \frac{\delta}{\delta v} ReS = -\frac{\delta}{\delta u} ImS; x(\theta) = u(t,\tau) + iv(t,\tau). \tag{6}$$

Эти соотношения являются функциональными аналогами условий Коши–Римана и проверяются непосредственно. Разумеется, формулы (6) есть следствие аналитичности $x(\theta)$ и $V(x)$. Выполнение соотношений (6) позволяет говорить о независимости функционального интеграла (5) от "положения контура интегрирования" в функциональном пространстве (функциональная теорема Коши).

Пусть Γ — исходный контур в интеграле (5) (в (4) это вещественная "ось"). Если в (5) концы контура C θ_i и θ_f лежат на вещественной оси, то интеграл (5) совпадает с (4). Это очевидно из того , что $S(x(\theta)) = S(x(t))$ в силу теоремы Коши, и из нее же:

$$\ln Dx(\theta) = \ln \prod_\theta dx(\theta) = \int_C \ln dx(\theta) d\theta = \int_{t_i}^{t_f} \ln dx(t) dt = \ln Dx(t),$$

т.е. $D(x(\theta)) = D(x(t))$.

Интеграл (5) можно понимать как криволинейный интеграл в комплексном двумерном функциональном пространстве. Теперь, пользуясь функциональной теоремой Коши, перепишем (5) в виде:

$$< x_f, \theta_f | x_i, \theta_i >= \int_\Gamma Dx(\theta) \exp[iS(x(\theta))] = \int_{\tilde{\Gamma}} Dx(\theta) \exp[iS(x(\theta))],$$

где $\tilde{\Gamma}$–новый функциональный контур, "концы" которого совпадают с "концами" контура Γ. Понятно, что наибольший вклад в интеграл дадут те функции $x(\theta)$, для которых модуль подынтегрального выражения велик, т.е. $\exp[Re(iS)]$ или $Re(iS)$ велики. Если предположить, что у функционала $S(x(\theta))$ есть одна (для простоты) стационарная точка $x_0(\theta)$, то контур $\tilde{\Gamma}$ должен проходить через классическое решение $x_0(\theta)$ в направлении наискорейшего спуска для $Re[iS(x)]$ в функциональном пространстве. Тогда при движении вдоль $\tilde{\Gamma}$ функционал $Re(iS)$ будет максимален для $x_0(\theta)$. Далее, в соответствии с идеей Лапласа, интегрирование по $\tilde{\Gamma}$ можно приближенно заменить на интегрирование вдоль малой окрестности $\Delta\tilde{\Gamma}$ стационарной точки $x_0(\theta)$ на контуре $\tilde{\Gamma}$:

$$\int_{\tilde{\Gamma}} Dx(\theta) \exp[iS(\dot{x}(\theta))] \approx \int_{\Delta\tilde{\Gamma}} Dx(\theta) \exp[iS(x(\theta))]. \tag{7}$$

Таким образом, дело сводится к отысканию направления наискорейшего спуска $Re(iS)$ в точке $x_0(\theta)$ функционального пространства.

Пользуясь тем, что в правой части (7) функции $x(\theta)$ близки к $x_0(\theta)$, разложим $S(x(\theta))$, ограничиваясь квадратичными членами:

$$S(x(\theta)) = S(x_0(\theta)) + \delta^2 S, x(\theta) = x_0(\theta) + \delta x(\theta), \tag{8}$$

$$\delta^2 S = \int_C [\delta \dot{x}^2(\theta) - V''(x_0)\delta x^2] d\theta \ .$$

Теперь

$$< x_f, \theta_f | x_i, \theta_i >= e^{iS_0} \int_{\Delta\tilde{\Gamma}} D(\delta x(\theta)) \exp[i\delta^2 S(\delta x)], S_0 = S(x_0(\theta)) \ . \quad (9)$$

Часто именно использование разложения (8) и представление амплитуды в виде (9) называют методом перевала. В действительности же суть метода перевала связана с вычислением предэкспоненциального функционального интеграла в (9).

Пусть $\delta x(\theta) = r(t,\tau)\exp[i\phi(t,\tau)]$, где функция $r(t,\tau)$ мала и представляет собой отклонение от седловой точки $x_0(\theta)$ в функциональном пространстве в направлении $\phi(t,\tau)$. Требуется найти направление наискорейшего спуска $\phi(t,\tau)$ для функционала $Re(i\delta^2 S)$ при малом смещении от $x_0(\theta)$, т.е. при малых $r(t,\tau)$. Очевидно, это направление находится из требования минимума функционала $Re(i\delta^2 S(r,\phi))$ относительно функции $\phi(t,\tau)$:

$$\frac{\delta}{\delta\phi} Re(i\delta^2 S) = 0 \ . \quad (10)$$

Найдем этот минимум. Функционал $Re(i\delta^2 S)$ приводится к виду:

$$Re(i\delta^2 S) = \int_C ((Adt - Bd\tau)\cos 2\phi - (Bdt + Ad\tau)\sin 2\phi) \ , \quad (11)$$

где

$$A = 2r_t r_\tau + r^2 W(t,\tau), B = r_t^2 - r_\tau^2 - r^2 U(t,\tau), V''(x_0) = U(t,\tau) + iW(t,\tau),$$

$$r_t = \frac{\partial r}{\partial t}, \quad r_\tau = \frac{\partial r}{\partial \tau}.$$

Учтены условия Коши–Римана для $\delta x(\theta) : \phi_t = -r_\tau/r, \phi_\tau = r_t/r$, позволившие исключить из (11) производные ϕ_t, ϕ_τ. Поэтому условие (10) выглядит тривиально:

$$\frac{\delta}{\delta\phi} Re(i\delta^2 S) = [B\tau'(\lambda) - At'(\lambda)]\sin 2\phi - [A\tau'(\lambda) + Bt'(\lambda)]\cos 2\phi = 0. \quad (12)$$

Здесь λ – параметр вдоль контура C. Далее находим из (12):

$$\tan 2\phi = \frac{A\tau' + Bt'}{B\tau' - At'} \ .$$

Есть два решения этого соотношения:

$$\cos 2\phi = \frac{B\tau' - At'}{\sqrt{(A^2+B^2)(t'^2+\tau'^2)}}, \ \sin 2\phi = \frac{A\tau' + Bt'}{\sqrt{(A^2+B^2)(t'^2+\tau'^2)}} \ , \quad (13)$$

$$\cos 2\phi' = \frac{At' - B\tau'}{\sqrt{(A^2+B^2)(t'^2+\tau'^2)}}, \ \sin 2\phi' = -\frac{A\tau' + Bt'}{\sqrt{(A^2+B^2)(t'^2+\tau'^2)}} \ . \quad (14)$$

Подставляя (13) в функционал $i\delta^2 S$, находим:

$$i\delta^2 S = Re(i\delta^2 S) = -\int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \sqrt{(A^2+B^2)(t'^2+\tau'^2)} d\lambda, \ Im(i\delta^2 S) = 0. \quad (15)$$

Итак, при малых смещениях от точки $x_0(\theta)$ в направлении $\phi(t,\tau)$, даваемом (13), подынтегральная экспонента в функциональном интеграле (7) быстро убывает. При этом мнимая часть функционала $iS(x(\theta))$ остается постоянной, и, значит, осцилляции не портят картину. Ввиду хорошего убывания подынтегрального функционала интегрировать можно по всем функциям $r(t,\tau)$, не ограничиваясь малыми $r(t,\tau)$.

Решение(14) с функциями $\phi'(t,\tau)$ дает "направление наискорейшего подъема".

Далее, выполняя замену функциональной переменной интегрирования $\delta x(\theta) \to r(t,\tau)$, пользуясь также формулами (13), окончательно получаем:

$$< x_f, \theta_f | x_i, \theta_i >=$$

$$= e^{iS_0} \int Dr(t,\tau) \exp[-\int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \sqrt{A^2+B^2} \left(\sqrt{t'^2+\tau'^2} d\lambda\right)] \det[\frac{\delta}{\delta r}(re^{i\phi})], \quad (16)$$

где

$$e^{i\phi} = \left(\frac{B+iA}{B-iA}\frac{\tau'+it'}{\tau'-it'}\right)^{1/4}.$$

5. Обсуждение

Формула (16) показывает, что плохо определенный фейнмановский функциональный интеграл с помощью метода перевала может быть сведен к функциональному интегралу от хорошо убывающей экспоненты. Нельзя ли на этом пути фейнмановскую амплитуду перехода ввести как меру в функциональном пространстве?

Правая часть (16) представляет собой в случае произвольного потенциала $V(x)$ негауссов интеграл, поскольку в показателе экспоненты стоит форма четвертой степени под корнем от функции $r(t,\tau)$. Лишь для свободной частицы получается интеграл гауссова типа:

$$< x_f, \theta_f | x_i, \theta_i >=$$

$$e^{iS_0} \int Dr \exp[-\int_{\lambda_i}^{\lambda_f} (r_t^2 + r_\tau^2)(\sqrt{t'^2 + \tau'^2} d\lambda)] \det[\frac{\delta}{\delta r}(re^{i\phi})], \qquad (17)$$

да и то это не совсем обычный гауссов интеграл. Дело здесь даже не в присутствии детерминанта, а в том, что квадратичная форма в показателе экспоненты представляет собой криволинейный интеграл. Да и функциональный интеграл в (16) – это в данном случае, так сказать, распрямленный криволинейный интеграл. Таким образом, известное утверждение о том, что разложение действия вблизи стационарной точки до квадратичных членов всегда приводит к гауссовым интегралам, здесь оказывается неверным.

Необходимо отметить, что в (16) получена "режущая" экспонента без каких бы то ни было апелляций к евклидовым методам, которые так популярны сегодня и один из главных мотивов введения которых — улучшение сходимости функциональных интегралов. В свете предлагаемого функционального метода перевала евклидизация выглядит частным приемом, и ей на смену должна прийти комплексификация (а точнее сказать — аналитическое продолжение). Например, в случае двугорбого потенциала $V(x) = \lambda(x^2 - \eta^2)^2$ путем перехода к Евклиду находят классическое решение (инстантон) [8]:

$$x_0(\tau) = \pm\eta \tanh(\frac{\omega}{2}\tau), \quad \omega^2 = 8\lambda\eta^2 .$$

В действительности это комплексное решение $x_0(\theta) = \pm\eta\tan(\frac{\omega}{2}\theta)$, подстановка которого в (16) воспроизводит известный экспоненциальный фактор амплитуды $e^{iS_0} = e^{\omega^3/12\lambda}$, и остается вычислить предэкспоненту, представляющую собой хорошо определенный, но негауссов интеграл.

В примере с инстантоном нет вещественных решений с вещественным временем, и поэтому там переход к евклиду, в общем, оправдан. А вот пример вещественного решения в вещественном времени с конечным действием (потенциал тот же). Пусть частица покоится в точке $x = 0$ в состоянии неустойчивого равновесия. Решение, описывающее скатывание с горки в момент $t = -\infty$ и возвращение в момент $t = \infty$,имеет вид:

$$x_0(t) = \pm\frac{\eta\sqrt{2}}{\cosh(\omega t/\sqrt{2})} .$$

Этому решению соответствует экспоненциальный фактор в амплитуде $\exp(i\omega^3\sqrt{2}/12\lambda)$, по модулю равный единице. Для нахождения предэкспоненты надо вычислить функциональный интеграл, а переход к евклиду в данном случае только испортит дело, поскольку внесет ненужные особенности в $V''(x_0)$. Значит, в данном случае необходимо обращаться к методу перевала. Нельзя ли аналогичное описанному в данном абзаце (вещественное) решение найти в теории полей Янга-Миллса? (Точно так же, как инстантон БПШТ [9] — квантово-полевой аналог нерелятивистского инстантона.)

Формула (16) получена на основе приближения (7), которое есть следствие "функциональной теоремы Коши". Эта теорема, конечно, представляет собой пока не очень хорошо обоснованную гипотезу.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект No. 93-02-3972). Благодарю организаторов и участников семинаров "Струны и решетки" ЛТФ ОИЯИ и Лаборатории квантовой теории поля НИИЯФ МГУ, особенно Б.М. Барбашова, В.В. Нестеренко, В.Е. Троицкого, И.П. Волобуева, А. Давыдычева.

Литература

1. Р. Фейнман, А. Хибс. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.

2. М. Кац. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.

3. А.Н. Васильев. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. 1976, Л.: ЛГУ, 1979.

4. М.Б. Менский. Группа путей. М.: Наука, 1983.

5. А.С. Шварц. Квантовая теория поля и топология. М.: Наука, 1989.

6. Ю.Н. Кафиев. Аномалии и теория струн. Новосибирск: Сиб. отд. «Наука», 1991.

7. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1974. М.В. Федорюк. Метод перевала. М.: Наука. 1979. Д. Мэтьюз, Р. Уокер. Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. А.Л. Кошкаров. Методы математической физики, уч. пособие. Петрозаводск, изд. ПГУ, 1991.

8. А.И. Вайнштейн, В.И. Захаров, В.А. Новиков, М.А. Шифман. УФН, **136**, 553 (1982).

9. А.А. Белавин, А.М. Поляков, А.С. Шварц, И.С. Тюпкин. Phys. Lett., 1975, ser.B, vol. **59**, p. 85.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 августа 1993 года.