I. ВВЕДЕНИЕ

Калуце [I] удалось достичь формального объединения уравнений максвелловской теории электромагнетизма и общей теории относительности (ОТО). Суть этого объединения в следующем: вводится пятимерная риманова метрика

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{ik} + A_i A_k & A_i \\ A_k & g_{55} \end{pmatrix} \qquad (I)$$

$$A, B = 0, 1, 2, 3, 5; \quad i, k = 0, 1, 2, 3$$

Если редуцировать соответствующие (I) полевые уравнения теории $G_A^B = 0$ в 4-мерие (G_A^B - тензор Эйнштейна пятимерного пространства), то при условии независимости всех величин от x^5, а также полагая $g_{55} = const$, получим систему уравнений Эйнштейна - Максвелла.

Рассматривая трансформационные свойства g_{AB} , Йордан [2] обнаружил, что g_{55} является скаляром, и модифицировал анзац Калуцы так, чтобы

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{ik} + y A_i A_k & y A_i \\ y A_k & y \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $y = y(x)$ - скалярная функция, которую принято называть гравитационным скаляром и которая в связи с гипотезой Дирака о "дряхлеющей" гравитации [3] выбирается так, чтобы в достаточно слабых гравитационных полях $y \to y_0 \sim \frac{1}{G_0}$ (G_0 - ньютоновская гравитационная постоянная). При редукции в 4-мерие соответствующего метрике (2) уравнения $G_A^B = 0$, сохраняя условие независимости всех величин от x^5, получим отличные от эйнштейновских уравнения обобщенной теории тяготения (ОТТ).

$$y R_i^k = 8\pi \left(T_i^k - \frac{1-\zeta}{3-2\zeta} T \delta_i^k \right) + \nabla_i y^k - \zeta \frac{y_i y^k}{y}, \qquad (3)$$

$$\nabla_k y^k = \frac{8\pi T}{3-2\zeta}. \qquad (4)$$

Здесь T_i^k - тензор энергии-импульса вещества и негравитационных полей, ζ - безразмерная константа ОТТ. В пространственной бесконечности

$$y \to y_0 = \frac{2(2-\zeta)}{G_0 (3-2\zeta)}. \qquad (5)$$

Легко заметить, что при $y = y_0$ и $\zeta \to \infty$ уравнения ОТТ совпадает с уравнениями ОТО. Физическому содержанию ОТТ посвящена работа [4], поэтому иногда используется также название "теория Йордана - Бранса - Дакке".

В настоящей работе рассматривается конформная связь уравнений ОТО и ОТТ, а во второй части найдены некоторые космологические решения типа фридмановских.

II. КОНФОРМНОЕ СООТВЕТСТВИЕ УРАВНЕНИЙ ОТО И ОТТ

Пусть в одном и том же многообразии заданы 4-мерные римановы структуры, приведенные в конформное соответствие согласно

$$\bar{g}_{ik}(x) = e^{2\sigma} \cdot g_{ik}(x) . \tag{6}$$

Как известно, тензоры Риччи конформно соответствующих римановых пространств $\bar{V}_4$ и V_4 связаны соотношением [5]

$$e^{2\sigma} \bar{R}_i^{\bar{k}} = R_i^k - 2[\nabla_i \sigma^k - \sigma_i \sigma^k + \delta_i^k \sigma_e \sigma^e] - \delta_i^k \nabla_e \sigma^e , \tag{7}$$

где ∇_i - символ ковариантного дифференцирования, $(\dots)_k = \frac{\partial(\dots)}{\partial x^k}$, а черта над индексом или коренной буквой означает принадлежность к $\bar{V}_4$ (в частности, $(\dots)^{\bar{k}} = \bar{g}^{ke}(\dots)_e$).

Конформные преобразования (7) одиннадцати функций $g_{ik}(x)$ и $\sigma(x)$ ставят в соответствие 10 величин $\bar{g}_{ik}(x)$. Уравнения ОТО не ковариантны относительно этих преобразований. В ОТТ гравитационное поле описывается 10 компонентами метрического тензора и гравитационным скаляром. Возникает естественный вопрос: возможно ли подобрать такую связь конформного фактора $\sigma(x)$ и гравитационного скаляра $y(x)$, чтобы в одном из конформно соответствующих пространств были бы удовлетворены уравнения ОТО, а в другом - ОТТ?

а) Предположим, что $\bar{g}_{ik}(x)$ удовлетворяет вакуумным уравнениям ОТО

$$\bar{R}_i^{\bar{k}} = 0 , \tag{8}$$

а $g_{ik}(x)$ - вакуумным уравнениям ОТТ

$$R_i^k = \frac{\nabla_i y^k}{y} - \gamma \frac{y_i y^k}{y^2} , \tag{9}$$

$$\nabla_k y^k = 0 . \tag{10}$$

Подставив (8) и (9) в (7), получим

$$\frac{\nabla_i y^k}{y} - \gamma \frac{y_i y^k}{y^2} = 2[\nabla_i \sigma^k - \sigma_i \sigma^k + \delta_i^k \sigma_e \sigma^e] - \delta_i^k \nabla_e \sigma^e . \tag{11}$$

Сравнивая (1) и (2), можно заметить, что связь σ и y, вероятнее всего, достаточно проста. Предположим, что она имеет вид

$$e^{2\sigma} = y^n . \tag{12}$$

Используя (12), исключим σ из (11), тогда

$$(n-1)\frac{\nabla_i y^k}{y} = \frac{n(2+n) - 2\gamma}{2} \frac{y_i y^k}{y^2} - \frac{n(n-1)}{2} \delta_i^k \frac{y_e y^e}{y^2} . \tag{13}$$

Для того чтобы удовлетворить (10), свернем по $i = k$, что дает

$$(n-1)^2 = \frac{3-2\gamma}{3} . \tag{14}$$

Нетрудно получить условие интегрируемости уравнения (13)

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-93-320

Г.Г.Арутюнян*, В.В.Папоян*

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ТИПА ФРИДМАНА В ТЕНЗОРНО-СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Направлено в журнал «Астрофизика»

*Ереванский государственный университет, Республика Армения

1993

I. ВВЕДЕНИЕ

Калуце [I] удалось достичь формального объединения уравнений максвелловской теории электромагнетизма и общей теории относительности (ОТО). Суть этого объединения в следующем: вводится пятимерная риманова метрика

$$g_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} g_{ik} + A_i A_k & A_i \\ \hline A_k & g_{55} \end{array}\right) \qquad (I)$$

$$A, B = 0,1,2,3,5; \quad i,k = 0,1,2,3$$

Если редуцировать соответствующие (I) полевые уравнения теории $G_A^B = 0$ в 4-мерие (G_A^B - тензор Эйнштейна пятимерного пространства), то при условии независимости всех величин от x^5, а также полагая $g_{55} = const$, получим систему уравнений Эйнштейна - Максвелла.

Рассматривая трансформационные свойства g_{AB}, Йордан [2] обнаружил, что g_{55} является скаляром, и модифицировал анзац Калуцы так, чтобы

$$g_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} g_{ik} + y A_i A_k & y A_i \\ \hline y A_k & y \end{array}\right), \qquad (2)$$

где $y = y(x)$ - скалярная функция, которую принято называть гравитационным скаляром и которая в связи с гипотезой Дирака о "дряхлеющей" гравитации [3] выбирается так, чтобы в достаточно слабых гравитационных полях $y \to y_0 \sim \frac{1}{G_0}$ (G_0 - ньютоновская гравитационная постоянная). При редукции в 4-мерие соответствующего метрике (2) уравнения $G_A^B = 0$, сохраняя условие независимости всех величин от x^5, получим отличные от эйнштейновских уравнения обобщенной теории тяготения (ОТТ).

$$y R_i^k = 8\pi \left(T_i^k - \frac{1-\zeta}{3-2\zeta} T \delta_i^k \right) + \nabla_i y^k - \zeta \frac{y_i y^k}{y}, \qquad (3)$$

$$\nabla_k y^k = \frac{8\pi T}{3-2\zeta}. \qquad (4)$$

Здесь T_i^k - тензор энергии-импульса вещества и негравитационных полей, ζ - безразмерная константа ОТТ. В пространственной бесконечности

$$y \to y_0 = \frac{2(2-\zeta)}{G_0(3-2\zeta)}. \qquad (5)$$

Легко заметить, что при $y = y_0$ и $\zeta \to \infty$ уравнения ОТТ совпадают с уравнениями ОТО. Физическому содержанию ОТТ посвящена работа [4], поэтому иногда используется также название "теория Йордана - Бранса - Дакке".

В настоящей работе рассматривается конформная связь уравнений ОТО и ОТТ, а во второй части найдены некоторые космологические решения типа фридмановских.

II. КОНФОРМНОЕ СООТВЕТСТВИЕ УРАВНЕНИЙ ОТО И ОТТ

Пусть в одном и том же многообразии заданы 4-мерные римановы структуры, приведенные в конформное соответствие согласно

$$\bar{g}_{ik}(x) = e^{2\sigma} \cdot g_{ik}(x) . \qquad (6)$$

Как известно, тензоры Риччи конформно соответствующих римановых пространств $\bar{V}_4$ и V_4 связаны соотношением [5]

$$e^{2\sigma} \bar{R}_i^{\bar{k}} = R_i^k - 2[\nabla_i \sigma^k - \sigma_i \sigma^k + \delta_i^k \sigma_e \sigma^e] - \delta_i^k \nabla_e \sigma^e , \qquad (7)$$

где ∇_i - символ ковариантного дифференцирования, $(\ldots)_k = \frac{\partial(\ldots)}{\partial x^k}$, а черта над индексом или коренной буквой означает принадлежность к $\bar{V}_4$ (в частности, $(\ldots)^{\bar{k}} = \bar{g}^{ke}(\ldots)_e$).

Конформные преобразования (7) одиннадцати функций $g_{ik}(x)$ и $\sigma(x)$ ставят в соответствие I0 величин $\bar{g}_{ik}(x)$. Уравнения ОТО не ковариантны относительно этих преобразований. В ОТТ гравитационное поле описывается I0 компонентами метрического тензора и гравитационным скаляром. Возникает естественный вопрос: возможно ли подобрать такую связь конформного фактора $\sigma(x)$ и гравитационного скаляра $y(x)$, чтобы в одном из конформно соответствующих пространств были бы удовлетворены уравнения ОТО, а в другом - ОТТ?

а) Предположим, что $\bar{g}_{ik}(x)$ удовлетворяет вакуумным уравнениям ОТО

$$\bar{R}_i^{\bar{k}} = 0 , \qquad (8)$$

а $g_{ik}(x)$ - вакуумным уравнениям ОТТ

$$R_i^k = \frac{\nabla_i y^k}{y} - \xi \frac{y_i y^k}{y^2} , \qquad (9)$$

$$\nabla_k y^k = 0 . \qquad (I0)$$

Подставив (8) и (9) в (7), получим

$$\frac{\nabla_i y^k}{y} - \xi \frac{y_i y^k}{y^2} = 2[\nabla_i \sigma^k - \sigma_i \sigma^k + \delta_i^k \sigma_e \sigma^e] - \delta_i^k \nabla_e \sigma^e . \qquad (II)$$

Сравнивая (I) и (2), можно заметить, что связь σ и y, вероятнее всего, достаточно проста. Предположим, что она имеет вид

$$e^{2\sigma} = y^n . \qquad (I2)$$

Используя (I2), исключим σ из (II), тогда

$$(n-1) \frac{\nabla_i y^k}{y} = \frac{n(2+n) - 2\xi}{2} \frac{y_i y^k}{y^2} - \frac{n(n-1)}{2} \delta_i^k \frac{y_e y^e}{y^2} . \qquad (I3)$$

Для того чтобы удовлетворить (I0), свернем по $i = k$, что дает

$$(n-1)^2 = \frac{3 - 2\xi}{3} . \qquad (I4)$$

Нетрудно получить условие интегрируемости уравнения (I3)

$$\nabla_{[i}\nabla_{k]}y^{l}=\frac{n}{4}\,\frac{(n-1)^2-(3-2\xi)}{1-n}\,\delta^{l}_{[i}y_{k]}\,\frac{y_p y^p}{y^2} \qquad (I5)$$

(квадратные скобки обозначают антисимметризацию). Перепишем (I5), учитывая (I4) и одно из определений тензора кривизны:

$$y^p R^{l}_{pki}=n(n-1)\,\delta^{l}_{[i}y_{k]}\,\frac{y_p y^p}{y^2}\,. \qquad (I5a)$$

Целесообразно в последнее выражение вместо тензора Римана ввести инвариант конформных преобразований - тензор Вейля, тогда условие интегрируемости уравнения (I3) перепишется в виде:

$$y_p C^{p}_{lki}=0. \qquad (I5б)$$

Итак, доказано

Утверждение I. Пусть функции $g_{ik}(x)$ и $y(x)$ являются решениями вакуумных уравнений ОТТ, тогда если

$$y_p C^{p}_{lki}=0,$$

то

$$\bar{g}_{ik}(x)=y^n g_{ik}(x);\quad (n-1)^2=\frac{3-2\xi}{3}$$

будет вакуумным решением соответствующей задачи ОТО.

б) Допустим, что $\bar{g}_{ik}(x)$ и $y(x)$ удовлетворяют вакуумным уравнениям ОТТ, а $g_{ik}(x)$ - ОТО. Предполагая, что

$$e^{2\sigma}=y^m, \qquad (I6)$$

и действуя аналогично изложенному в предыдущем пункте, нетрудно доказать

Утверждение 2. Пусть $g_{ik}(x)$ является решением вакуумных уравнений ОТО, тогда, если найдено какое-либо решение уравнения

$$\nabla_i\sigma^k+\frac{2(m+1)}{m}\sigma_i\sigma^k=0 \qquad (I7)$$

с условием интегрируемости

$$\sigma_p C^{p}_{lki}=0,$$

то

$$\bar{g}_{ik}(x)=e^{2\sigma}g_{ik}(x),\quad y=e^{2\sigma/m}$$
$$3(m+1)^2=3-2\xi$$

будет решением соответствующей задачи ОТТ.

в) Используя (7), нетрудно показать, что если в (6) принять

$$e^{2\sigma}=\frac{G_0}{a}y;\quad a=\frac{2(2-\xi)}{3-2\xi}, \qquad (I8)$$

то после конформных преобразований уравнения ОТТ при наличии вещества и негравитационных полей (3) по форме совпадает с эйнштейновскими

$$\bar{G}_i^{\,k}=8\pi G_0\left(\bar{T}_i^{\,k}+\bar{\tau}_i^{\,k}\right) \qquad (I9)$$

с дополнительным источником в виде тензора "энергии-импульса" скалярного поля

$$\bar{\tau}_i^{\,k}=\frac{3-2\xi}{16\pi G_0}\left(\sigma_i\sigma^k-\frac{1}{2}\delta_i^{\,k}\sigma_l\sigma^l\right), \qquad (20)$$

а вместо уравнения (4) будем иметь

$$\bar\nabla_k \sigma^{\bar k} = \frac{4\pi G_0 \bar T}{3-2\delta}. \qquad (21)$$

Таким образом, достаточно по заданному $\bar T$ найти $\sigma^{\bar k}$, соответствующее значение $\bar\tau_i^{\bar k}$, а затем перейти к решению уравнений Эйнштейна (I9). (Подчеркнем, что в таком подходе уравнения движения искажены наличием скалярной части, поскольку здесь $\bar\nabla_k(\bar T_i^{\bar k}+\bar\tau_i^{\bar k})=0$). Отметим также, что в тех случаях, когда отличными от 0 оказываются диагональные компоненты $\bar\tau_i^{\bar k}$, наличие в (I9) связанного со скалярным полем слагаемого можно учесть введением эффективных "плотности энергии" ε^c и "давления" ρ^c скалярного поля, которые подчиняются предельно жесткому уравнению состояния $\varepsilon^c = \rho^c$.

<u>Замечание.</u> Для полноты приведем малоизвестный результат, доказательство которого элементарно (см.,например, [2]).

<u>Теорема</u> (Шокинг): II электровакуумных уравнений ОТТ в пространстве V_4 эквивалентны I0 уравнениям

$$\bar R_i^{\bar k} = \frac{3-2\delta}{2}\,\frac{y_i y^k}{y^2} \qquad (22)$$

в конформно соответствующем пространстве $\bar V_4$ с метрикой

$$\bar g_{ik} = y\, g_{ik}.$$

Можно показать, что если $R_{ik}=\psi_i\psi_k$ (ψ - произвольный скаляр), то вследствие свернутых тождеств Бианки $\nabla_k G_i^k=0$ будем иметь $\nabla_k\psi^k=0$. Это означает, что в (22) содержится также уравнение для скалярного потенциала.

III. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ОТТ. Геометрия однородной и изотропной Вселенной задается метрикой Робертсона - Уокера (см., например,[6])

$$d\bar s^2 = d\tau^2 - R^2(\tau)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right] \qquad (23)$$

$$k = \begin{cases} +1 & \text{модель с положительной кривизной} \\ 0 & \text{квазиевклидова модель} \\ -1 & \text{модель с отрицательной кривизной}. \end{cases}$$

Подставим (23) в уравнения ОТТ с гидродинамическим тензором энергии-импульса

$$\bar T_i^k = (\bar\varepsilon+\bar\rho)\,\bar u_i \bar u^k - \bar\rho\,\delta_i^k,$$

предполагая, что уравнение состояния имеет вид:

$$\bar\rho = \alpha\bar\varepsilon,$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{современная эпоха преобладания вещества} \\ 1/3 & \text{радиационно-доминантная эра} \\ 1 & \text{предельно жесткое состояние}, \end{cases} \qquad (24)$$

получим систему уравнений, описывающих эволюцию изотропной Вселенной в ОТТ

$$\left(\frac{R'}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} + \frac{R'}{R}\frac{y'}{y} + \frac{\delta}{6}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \frac{8\pi\bar\varepsilon}{3y}, \qquad (25)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(y' R^3\right) = \frac{8\pi R^3\bar\varepsilon\,(1-3\alpha)}{3-2\delta}, \qquad (26)$$

$$\bar{\varepsilon}' R = -3(1+\alpha)\bar{\varepsilon} R' . \qquad (27)$$

Предположим, что (23) получено в результате конформного преобразования

$$d\bar{s}^2 = e^{2\sigma} ds^2 = e^{2\sigma}\left[dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right)\right]$$

$$d\tau = e^{\sigma} dt, \quad R = e^{\sigma} a \qquad (23a)$$

(где $a(t)$ - известная функция времени, коэффициент расширения фридмановских моделей в ОТО). Перепишем систему (25)-(27) с учетом связи (23а)

$$\left(\frac{\dot a}{a} + \dot\sigma\right)^2 + \frac{k}{a^2} + \left(\frac{\dot a}{a} + \dot\sigma\right)\frac{\dot y}{y} + \frac{\delta}{6}\left(\frac{\dot y}{y}\right)^2 = \frac{8\pi A}{3y}\,\frac{a^{-3(1+\alpha)}}{e^{\sigma(1+3\alpha)}}, \qquad (25a)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2\sigma}\dot y a^3\right) = \frac{8\pi A(1-3\alpha)}{3-2\delta}\,\frac{e^{\sigma(1-3\alpha)}}{a^{3\alpha}}, \qquad (26a)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{A\cdot a^{-3(1+\alpha)}}{e^{3\sigma(1+\alpha)}} \qquad (27a)$$

(точка означает дифференцирование по фридмановскому времени ОТО $-t$). Совместное решение уравнений (25а) и (26а) дает возможность, определив конформный фактор $\sigma(t)$, найти как временную эволюцию гравитационного скаляра $y(\tau)$, так и $R(\tau)$ коэффициент расширения в ОТТ.

а) Наиболее интересной, с точки зрения физических последствий проявления эффектов скалярного поля, является, по-видимому, радиационно-доминантная эпоха развития Вселенной (α = I/3). Будем искать y в виде

$$y = \frac{B e^{-2\sigma}}{a^2} f(t),$$

что согласуется с первым интегралом уравнения (26а)

$$\dot y a^3 e^{2\sigma} = B = \mathrm{const}$$

и приводит к соотношению $\dot y / y = \frac{1}{af}$. Введем конформное время $d\eta = dt/a$, тогда

$$\frac{df}{d\eta} = 1 + 2af\left(\frac{\dot a}{a} + \dot\sigma\right). \qquad (28)$$

Правую часть (28) можно исключить, используя уравнение (25а), что приводит к

$$\frac{df}{d\eta} = \sqrt{\frac{3-2\delta}{3} + 2nf - kf^2}\,; \quad n = \frac{16\pi A}{3B}, \qquad (29)$$

которое легко интегрируется и позволяет вычислить

$$R^2(\eta) = Cf\cdot e^{-\int (d\eta/f)}, \qquad (30)$$

а также $y(\eta)$. Для случаев $k = \pm 1$ результаты выглядят весьма громоздко, а для $k = 0$

$$2f = n\eta^2 - \frac{3-2\delta}{3n}, \qquad (31)$$

$$y = y_0 \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{3}{3-2\xi}}\, n\eta}{1 + \sqrt{\frac{3}{3-2\xi}}\, n\eta} \right)^{\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{3-2\xi}{3}}} . \qquad (32)$$

б) Эпоха преобладания вещества ($\alpha = 0$), квазиевклидово пространство ($k = 0$). Выберем конформный фактор так, чтобы

$$e^{\sigma} = \frac{const}{y} .$$

Уравнения ОТТ интегрируются без труда, и в результате имеем

$$y = \frac{C_1}{\varkappa_0} \frac{(2-\xi)^2}{(3-2\xi)(4-3\xi)} t^{2\bar{\varkappa}_0/3\bar{H}_0} , \qquad (33)$$

$$R = \frac{C_2}{(H_0 a_0^3)^{1/3}} t^{\frac{2}{3}(t + \bar{\varkappa}_0/\bar{H}_0)} . \qquad (34)$$

Здесь H_0 - постоянная Хаббла, a_0 - фридмановский коэффициент расширения, C_1 и C_2 - постоянные ,

$$\bar{\varkappa}_0 = \sqrt{A\varkappa_0 / 3a_0^2} \; ; \; \bar{H}_0 = (2-\xi) H_0 .$$

Отметим, что этот частный случай согласуется с гипотезой Дирака о "дряхлеющей" гравитации ($G_0 = 1/y$).

Интересным представляется случай, когда логарифмическая скорость убывания гравитационного скаляра совпадает с логарифмической скоростью расширения Вселенной

$$\frac{\dot{y}}{y} = -\frac{\dot{R}}{R} . \qquad (35)$$

Примечательно, что предположение (35) является прямым следствием условия Шамы [7], согласно которому размеры наблюдаемой части Вселенной порядка ее гравитационного радиуса

$$\frac{G_0 m}{c^2 r} \sim 1 . \qquad (36)$$

Это условие допускает весьма правдоподобную интерпретацию: в ходе своей эволюции Вселенная подгоняет значения фигурирующих в (36) величин к предписанным (что служит дополнительным аргументом в пользу переменности G_0). В этом случае, поскольку допускаются только отрицательные значения ξ , реализуется модель с отрицательной кривизной $k = -1$,

$$R = R_0 + \sqrt{\frac{2}{2-\xi}}\, \tau . \qquad (37)$$

Расширение происходит по линейному закону.

Анализу найденных решений и сравнению с данными наблюдений будет посвящена следующая публикация.

Авторы выражают благодарность Г.С.Саакяну, Н.А.Черникову, участникам семинаров "Теория пространства, времени и гравитации" ЛТФ ОИЯИ и кафедры теоретической физики Ереванского университета за стимулирующие обсуждения.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Фонда Майера, присужденного Американским физическим Обществом.

Литература

1. Th.Kaluza, Zum Unitatsproblem der Physik Sitz. Preus.Akad. Wiss. S.966, 1921.
2. P.Jordan, Swerkraft und Weltall, Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1955.
3. P.A.M.Dirac . Proc. Roy.Soc. A165, 199, 1938.
4. C.Brans, R.H.Dicke. Phys.Rev. 124, 952, 1961.
5. А.З.Петров. Новые методы в общей теории относительности. "Наука", М., 1966.
6. Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер, Гравитация, "Мир", М., 1977.
7. D.Sciama. Mon. Not. Roy. Astron.Soc. 113, 34, 1953.