объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-93-288

Р.А.Асанов

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ПОДОБНОЙ ЕЙ СИСТЕМЫ В ТЕОРИИ С ДВУМЯ СВЯЗНОСТЯМИ

Направлено на Фридмановский международный семинар по гравитации и космологии (Санкт-Петербург, 1993)

1993

В одной из своих фундаментальных работ В.А.Фок высказал /I/ предположение о том, что гармоническая система координат определяется с точностью до преобразований Лоренца. При этом предполагались выполненными добавочные условия евклидовости и ньютоновости на пространственной бесконечности (вне вещества) и некоторые условия типа условий излучения.

Условия гармоничности были использованы А.Эйнштейном /2/ в приближенном виде, а затем предложены Т.Де Дондером /3/ и К.Ланцошем /4/ для использования в точном виде. Условия де Дондера могут быть записаны в виде

$$\Box X^{\mu}(\bar{x}^{\sigma}) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\beta}} \left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \right) = 0, \alpha, \beta = 0,1,2,3, \quad (I)$$

здесь $\bar{x}^{\sigma}$ - исходные произвольные координаты, X^{μ} - гармонические по определению.

Затем в своей книге /5/ Фок подробно развивает свою концепцию. Его обоснование состоит из двух частей. В первой части он доказывает теорему о единственности решения для волнового уравнения вида (I) при наличии ряда условий на бесконечности, но только для случая постоянных метрических коэффициентов $g^{\alpha\beta}$. Впоследствии И.Т.Тодоров уточнил /6/ условия теоремы, тем не менее эта дискуссия показала, что в общем случае при произвольных $g^{\alpha\beta}$ такая теорема остается недоказанной, т.е. является гипотезой. Вторая часть обоснования заключается в доказательстве однозначности гармонической системы координат с точностью до преобразований Лоренца при условии справедливости гипотезы о единственности решения волнового уравнения вида (I).

Более десяти лет назад появилась статья П.А.Мишнаевского и А.Г.Рамма /7/, в которой доказывается теорема единственности для волнового уравнения вида (I) в случае постоянных гравитационных полей, т.е. когда $\partial/\partial t \; g^{\alpha\beta} = 0$. Казалось бы, этим был достигнут существенный прогресс в обосновании концепции Фока. Ведь к этому случаю относятся такие известные точные решения уравнений ОТО, как метрики Шварцшильда, Нордстрёма - Рейсснера, Керра. Но теорема единственности /7/ доказывается при выполнении целого ряда условий, которые не так легко обозреть. Поэтому обратимся к самим решениям.

Знаменитая внешняя статическая метрика К.Шварцшильда в сферических пространственных координатах может быть записана в виде

$$ds^2=\left(1-\frac{2\alpha}{\rho}\right)(c\,dt)^2-\frac{d\rho^2}{1-\frac{2\alpha}{\rho}}-\rho^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \qquad (2)$$

Требование соответствия с теорией Ньютона приводит к тому, что $\alpha=\frac{GM}{c^2}$, здесь G – ньютонова гравитационная постоянная, M – масса источника, c – скорость света. "Радиальная" координата ρ здесь выбрана так, что $2\pi\rho$ есть длина окружности с центром в начале координат. В интервале (2) при сохранении статичности и сферической симметрии остаются возможности преобразований к новым координатам $t=t(\bar t)$ и (или) $\rho=\rho(\bar\rho)$. В дальнейшем будем пользоваться также записью статического сферически-симметричного интервала в общем виде

$$ds^2=V^2(r)(c\,dt)^2-F^2(r)\,dr^2-\mathcal{R}^2(r)\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \qquad (3)$$

По традиции условия гармоничности рассматриваются не в координатах $ct, \rho, \theta, \varphi$, а в "прямоугольных, почти декартовых" (терминология Э.Шредингера) координатах $\bar x^0=ct$, $\bar x^1=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $\bar x^2=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $\bar x^3=\rho\cos\theta$, в которых интервал Шварцшильда запишется

$$ds^2\equiv\bar g_{\mu\nu}d\bar x^\mu d\bar x^\nu=\left(1-\frac{2\alpha}{\rho}\right)(c\,dt)^2-\left[\delta_{ik}+\left(\frac{1}{1-\frac{2\alpha}{\rho}}-1\right)\frac{\bar x^i\bar x^k}{\rho^2}\right]d\bar x^i d\bar x^k, \qquad (4)$$

здесь надо считать $\rho\equiv\sqrt{\bar x^i\bar x^i}$, $(i,k=1,2,3)$; $\sqrt{-g}\equiv\sqrt{\det \bar g_{\mu\nu}}=1$. Теперь попытаемся совершить переход к гармоническим координатам x^i (поскольку $\bar x^0=ct$ согласно (I) уже гармоническая) путем

$$\bar x^i=x^i\frac{\rho(r)}{r}, \quad r\equiv\sqrt{x^i x^i}. \qquad (5)$$

Заметим, что это преобразование не только не лоренцево, но даже и не линейное. В соответствующих сферических координатах очевидно этот переход соответствует преобразованию

$$\bar t=t, \quad \bar\theta=\theta, \quad \bar\varphi=\varphi, \quad r=r(\rho). \qquad (6)$$

В новых координатах интервал (2) примет вид

$$ds^2=\left(1-\frac{2\alpha}{\rho(r)}\right)(c\,dt)^2-\left(\frac{d\rho(r)}{dr}\right)^2\frac{dr^2}{1-\frac{2\alpha}{\rho(r)}}-\rho^2(r)\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \qquad (7)$$

а интервал (4) – вид

$$ds^2=\left(1-\frac{2\alpha}{\rho(r)}\right)(c\,dt)^2-\frac{\rho^2(r)}{r^2}\left[\delta_{ik}+\left(\frac{\rho'^2r^2}{\rho^2-2\alpha\rho}-1\right)\frac{x_i x_k}{r^2}\right]dx^i dx^k; \qquad (8)$$

$$g\equiv\det g_{\mu\nu}=-\frac{\rho^4\rho'^2}{r^4}, \quad \rho'\equiv\frac{d\rho(r)}{dr}.$$

При этом условие соответствия с теорией Ньютона требует

$$\lim\frac{\rho(r)}{r}=1, \quad r\to\infty. \qquad (9)$$

Условие гармоничности Де Дондера (I) приводит к уравнению Лежандра для функции $r(\rho)$, обратной к $\rho(r)$:

$$\frac{d}{d\rho}\left[(\rho^2-2\alpha\rho)\frac{dr(\rho)}{d\rho}\right]-2r(\rho)=0, \qquad (10)$$

общее решение которого имеет вид

$$r(\rho)=C_1\left(\frac{\rho}{\alpha}-1\right)+C_2 Q\left(\frac{\rho}{\alpha}-1\right), \quad Q(z)\equiv\frac{z}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-1, \qquad (11)$$

где $C_1(\alpha)$ и $C_2(\alpha)$ – константы интегрирования. Так как функция $Q(\rho/\alpha-1)$ при $\rho/\alpha\to\infty$ ведет себя как $\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2$, условие (9) удовлетворяется при выборе $C_1=\alpha$ и произвольной C_2 для приведенного внешнего решения. Это решение было впервые найдено Ланцошем /4/. Начиная с самого Ланцоша, а затем Н.Розена /8/ и Фока многие авторы полагали $C_2=0$ и считали выбор $C_2\neq 0$ нефизическим, поскольку в этом случае область применимости гармонических координат несколько уже, чем исходных шварцшильдовых и отстоит чуть дальше от шварцшильдовой особенности при $\rho=2\alpha$. В нашей работе /9/ подробно исследовался этот вопрос. Боее того, в работах ряда авторов /I0/, рассматривавших полное (внутреннее, "сшитое" с внешним) решение задачи в гармонических координатах, показывалось, что "единственный" выбор $C_2 = 0$ не мог быть ими использован, а константа (параметр) $C_2 \neq 0$ задавалась параметрами центрального тела (размерами, давлением и т.п.).

Итак, для внешнего решения задачи Шварцшильда в форме (7) или (8) в гармонических координатах имеем однопараметрическое семейство решений уравнений гармоничности

$$r = \rho(r) - \alpha + C_2\left(\frac{\rho-\alpha}{2\alpha}\ln\left|\frac{\rho}{\rho-2\alpha}\right| - 1\right). \tag{I2}$$

Вполне аналогичное положение имеется /II/ в случае внешнего решения уравнений Эйнштейна и Максвелла для точечной массы M и электрического заряда e, которое в сферических координатах имеет вид (метрика Нордстрёма - Рейсснера)

$$ds^2 = \left(1-\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\varepsilon^2}{\rho^2}\right)(c\,dt)^2 - \left(1-\frac{2\alpha}{\rho}+\frac{\varepsilon^2}{\rho^2}\right)^{-1}d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

$$\alpha \equiv \frac{GM}{c^2},\ \varepsilon^2 \equiv \frac{Ge^2}{c^4},\ e \text{ — электрический заряд.} \tag{I3}$$

В прямоугольных, почти декартовых гармонических координатах интервал принимает аналогичный (8) вид

$$ds^2 = \left(1-\frac{2\alpha}{\rho(r)}+\frac{\varepsilon^2}{\rho^2(r)}\right)(c\,dt)^2 - \frac{\rho^2(r)}{r^2}\left[\delta_{ik}+\left(\frac{\rho'^2 r^2}{\rho^2-2\alpha\rho+\varepsilon^2}-1\right)\frac{x_i x_k}{r^2}\right]dx^i dx^k, \tag{I4}$$

где опять имеем однопараметрическое семейство решений уравнений гармоничности, которые в этом случае дают для функции $r(\rho)$:

$$\frac{d}{d\rho}\left[(\rho^2-2\alpha\rho+\varepsilon^2)\frac{dr(\rho)}{d\rho}\right] - 2r(\rho) = 0. \tag{I5}$$

С учетом условия соответствия теории Ньютона (9) имеем:

$$r = \rho(r) - \alpha + C_2\left(\frac{1}{2}\frac{\rho-\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}}\ln\left|\frac{\rho-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}}{\rho-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\varepsilon^2}}\right| - 1\right),\ \alpha>\varepsilon, \tag{I6}$$

$$r = B_1(\rho-\alpha) + \frac{2}{\pi}\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2}(1-B_1)\left(\frac{\rho-\alpha}{\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\frac{\rho-\alpha}{\sqrt{\varepsilon^2-\alpha^2}}+1\right),\ \alpha<\varepsilon, \tag{I7}$$

$$r = \rho - \alpha + \frac{D}{(\rho-\alpha)^2},\quad \alpha = \varepsilon. \tag{I8}$$

Сходная ситуация имеется в случае метрики Керра, которую запишем в координатах Бойера - Линдквиста

$$ds^2 = \left(1-\frac{2\alpha r}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2+a^2+\frac{2\alpha r}{\rho^2}a^2\sin^2\theta\right)\sin^2\theta\, d\varphi^2 - \frac{4\alpha r}{\rho^2}a\sin^2\theta\, dt\, d\varphi, \tag{I9}$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta,\quad \Delta \equiv r^2 + a^2 - 2\alpha r,\quad c = 1.$$

В работе /I2/ выбираются координаты $x^0 = t$, $x^1 = h(r,\theta)\cos\varphi$, $x^2 = h(r,\theta)\sin\varphi$, $x^3 = f(r,\theta)$, которые будут гармоническими, если выполнено:

$$\partial_r(\Delta\partial_r f) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta f) = 0,$$

$$\partial_r(\Delta\partial_r h) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta h) - \left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{a^2}{\Delta}\right)h = 0. \tag{20}$$

В результате получены многопараметрические семейства решений этих уравнений. Например, в случае $|a|<\alpha$ (далее $\mu \equiv \sqrt{\alpha^2-a^2}$, $r_\pm \equiv \alpha \pm \mu$) имеем

$$f(r,\theta) = a_0 + (r-\alpha)\cos\theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell Q_\ell\left(\frac{\alpha-r}{\mu}\right)P_\ell(\cos\theta),$$

$$h(r,\theta) = \cos\left[\frac{a}{2\mu}\ln\left(\frac{r-r_-}{r-r_+}\right)\right]\left\{(r-\alpha)\sin\theta + \frac{a}{\mu}\sum_{\ell=1}^{\infty} d_\ell R_\ell^{(\ell-1)}\left(\frac{r-r_-}{2\mu}\right)P_\ell^1\cos\theta\right\} + \tag{2I}$$

$$+ a\sin\left[\frac{a}{2\mu}\ln\frac{r-r_-}{r-r_+}\right]\left\{\sin\theta + \frac{1}{a}\sum_{\ell=1}^{\infty} d_\ell \mathcal{P}_\ell^{(\ell)}\left(\frac{r-r_-}{2\mu}\right)P_\ell^1\cos\theta\right\},$$

здесь P_ℓ, Q_ℓ и P_ℓ^1 - полиномы и присоединенные полиномы Лежандра, а $\mathcal{P}_\ell^{(\ell)}(u)$ и $R_\ell^{(\ell-1)}(u)$ - действительные полиномы степеней ℓ и $\ell-1$ по u, определяемые из соотношения для гипергеометрической функции F:

$$\frac{\Gamma(\lambda+\ell+1)}{\Gamma(\lambda+1)}F(-\ell,\ell+1,\lambda+1;u) = \mathcal{P}_\ell^{(\ell)}(u) + \lambda R_\ell^{(\ell-1)}(u).$$

Автор отмечает, что эти гармонические координаты применимы в несколько более узкой области, чем исходные.

Вместе с тем, известны и координаты Динг Хао-Ганга /13/, применимые в области, соответствующей исходной. (Они воспроизведены также в работе /14/). Эти координаты – беспараметрические и потому принимаются разными авторами как "единственные". В этом случае найдены гармонические координаты $x^0 = t$ и x^1, x^2, x^3 с помощью преобразования

$$
\begin{aligned}
x^1 &\equiv x = \sqrt{(r-\alpha)^2 + a^2}\,\sin\theta\cos[\varphi - \Phi(r)],\\
x^2 &\equiv y = \sqrt{(r-\alpha)^2 + a^2}\,\sin\theta\sin[\varphi - \Phi(r)],\\
x^3 &\equiv z = (r-\alpha)\cos\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\Phi(r) \equiv -\int_r^\infty \frac{a\,\alpha^2\,dr}{\Delta(\Delta+\alpha^2)},
$$

и приведены явные выражения для всех $g_{\mu\nu}(x^\sigma)$. Например,

$$
g_{00} = \frac{f^2 - \alpha^2 f + a^2 z^2}{f(\sqrt{f}+\alpha)^2 + a^2 z^2},
$$

$$
g_{03} = \frac{2a^2\alpha^3(\sqrt{f}+\alpha) f^{3/2}(x^2+y^2)\,z}{[f(\sqrt{f}+\alpha)^2 + a^2 z^2](f^2 + a^2 z^2)(f - \alpha + a^2)(f + a^2)},
$$

$$
f \equiv \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2-a^2+\sqrt{(x^2+y^2+z^2-a^2)^2+4a^2z^2}\right).
$$

Обратимся теперь к одному из обобщений ОТО – теории Н.А.Черникова с двумя связностями, но одной метрикой /15/. Эта общековариантная теория была создана с главной целью – найти общековариантное обобщение эйнштейновского тензора энергии-импульса гравитационного поля. В ней тензор энергии-импульса является функционалом второй связности $\hat{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda}$. Рассмотрим теперь вариант этой теории (в статическом случае), в котором фоновая связность выбирается равной скобкам Кристоффеля, задаваемым метрикой

$$
ds^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (c\,dt)^2 - dr^2 - \left(k\,\mathrm{sh}\frac{r}{k}\right)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2), \qquad (22)
$$

k – константа Лобачевского,

так что ее трехмерная часть есть пространство Лобачевского. Любопытно, что в этом случае из уравнений теории автоматически следует условие

$$
\frac{d}{dr}\left(\frac{V\mathcal{H}^2}{F}\right) - FVk\,\mathrm{sh}\frac{2r}{k} = 0, \qquad (23)
$$

из которого при $k \to \infty$, то есть в евклидовом пределе, следует условие гармоничности Де Дондера. Значит, условие (23) обобщает условие Де Дондера и отличается от него еще тем, что является следствием варианта самой теории. В данном варианте теории Н.А.Черниковым была решена внешняя проблема Шварцшильда и получено (частное) решение в сферической системе координат

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{1}{P^2}\,\frac{\mathrm{sh}\frac{r-\hat{\alpha}}{k}}{\mathrm{sh}\frac{r+\hat{\alpha}}{k}}(c\,dt)^2 - P^2\,\frac{\mathrm{sh}\frac{r+\hat{\alpha}}{k}}{\mathrm{sh}\frac{r-\hat{\alpha}}{k}}dr^2 - P^2\left(k\,\mathrm{sh}\frac{r+\hat{\alpha}}{k}\right)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2),\\
P &\equiv e^{-\frac{\hat{\alpha}}{k}}, \quad \frac{1}{2}\mathrm{sh}\frac{2\hat{\alpha}}{k} = \frac{GM}{kc^2} \equiv \frac{r_0}{k} \equiv \frac{\alpha}{k},
\end{aligned} \qquad (24)
$$

которое при $k \to \infty$ переходит в известное решение Шварцшильда в сферических координатах, соответствующих гармоническим координатам $x^0 = ct$, $x^1 = r\sin\theta\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $x^3 = r\cos\theta$ (Ланцош /4/, Розен /8/, Фок /5/). Естественно, что "обычной" гармонической системы для (24) найти невозможно, если требовать условия соответствия с теорией Ньютона на пространственной бесконечности, так как поведение метрики (24) при $r \to \infty$ отнюдь не ньютоново. Тем не менее остается вопрос о единственности решения (24). Поскольку теория общековарианта, попытаемся искать преобразование $r = r(R)$, $R = R(r)$ к новым сферическим координатам. При этом интервал (3) перейдет в

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \bar{V}(R)(c\,dt)^2 - \bar{F}(R)\left(\frac{dr}{dR}\right)^2 dR^2 - \bar{\mathcal{H}}^2(R)(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2),\\
\bar{V}(R) &= V[r(R)], \quad \bar{F}(R) = F[r(R)], \quad \bar{\mathcal{H}}(R) = \mathcal{H}[r(R)],
\end{aligned} \qquad (25)
$$

и "условие обобщенной гармоничности" (23) принимает вид

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{\bar V \bar{\mathcal{H}}^2}{\bar F \frac{dr}{dR}}\right) - \bar V F \frac{dr}{dR} k\,sh\frac{2R}{k} = 0, \qquad (26)$$

или, так как для (24) $\bar V \bar F = VF = 1$,

$$\frac{d}{dr}\left(V^2 \mathcal{H}^2 \frac{dR(r)}{r}\right) - k\,sh\frac{2R(r)}{k} = 0;$$

и наконец,

$$\frac{k^2}{2}\frac{d}{dr}\left[\left(ch\frac{2r}{k} - ch\frac{2\hat r}{k}\right)\frac{dR(r)}{dr}\right] - k\,sh\frac{2R(r)}{k} = 0. \qquad (27)$$

Неясно, можно ли решить это уравнение точно аналитически, но можно попытаться найти (второе) линейно-независимое решение $R(r)$ при $r \to \infty$, поскольку (первое) решение $R(r) = r$ здесь, очевидно, имеется и соответствует тождественному преобразованию.

Аналогично случаю ОТО будем искать падающую при $r \to \infty$ функцию $R(r)$ и обозначим $N \equiv ch\frac{2\hat r}{k}$. В этом приближении уравнение (27) принимает вид

$$\frac{k^2}{4}\frac{d}{dr}\left[\left(e^{\frac{2r}{k}} + e^{-\frac{2r}{k}} - 2N\right)\frac{dR(r)}{dr}\right] = 2R(r) + \frac{4}{3}\frac{R^3}{k^2} + \ldots,$$

и мы получаем его решение в виде быстро убывающего ряда

$$R(r) = A\left[e^{-\frac{2r}{k}} + (1+N)e^{-\frac{4r}{k}} + \left(\frac{4+5N}{3}\right)e^{-\frac{6r}{k}} + \ldots\right], \quad A = const.$$

Тем самым условие соответствия исходному решению (24) при $r \to \infty$ выполнено (формально оно скрыто в использованном условии $FV = 1$), и мы имеем однопараметрическое семейство гармонических систем координат в области больших r. Следовательно, (по меньшей мере в этой области), картина аналогична случаю Шварцшильда в ОТО. При этом в данной теории при преобразовании координат вторая связность, конечно, будет преобразовываться соответствующим образом.

Таким образом, опять приходим к выводу, что концепция Фока о единственности гармонических координат требует дальнейшего уточнения.

Литература

I. Фок В.А. О движении конечных масс в ОТО. ЖЭТФ, 1939, т.9, №4, с.375.

2. Einstein A. Über Gravitationswellen. Sitz.Ak.Berlin, 1918, 1, S. 154-167.

Перевод: А.Эйнштейн. Собр.научн.трудов, Наука, М., 1965, т.I, с.631-646. О гравитационных волнах.

3. De Donder Th. La Gravifique einstenienne, Gauthier - Villars, Paris, 1921, p.40.

4. Lanczos K. Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die Einstenischen Gravitationsgleichungen. Phys.Zeits.,1922, B.23, N 24, S. 537-539.

5. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955.

6. Тодоров И.Т. Об одной теореме единственности для волнового уравнения. (К дискуссии В.А. Фок - Ф.И.Франкль), УМН, 1958, т.13, в.I, с. 2II-2I3.

7. Мишнаевский П.А., Рамм А.Г. О единственности гармонической системы координат в ОТО. УМН, 1979, т.34, в.I, с.239-240.

8. Rosen N. General Relativity and Flat Space. Phys.Rev., 1940, v.5, 57, p.147.

9. Asanov R.A. Schwarzschild Metric and De Donder Condition, GRG, 1989, v.21, N 2, p.149-154.

I0. Авакян Р.М. О решении для изолированной массы в гармонических координатах. В сб.: Точные решения уравнений гравитационного поля и их физическая интерпретация. (Тезисы докл. 2 Всесоюз. научн.семинара, Тарту, 1988), Тартусск.госуниверситет, 1988, с.22-24.

Лоскутов Ю.М., Парфенов К.В. Решения уравнений релятивистской теории гравитации для равновесных массивных тел с учетом их уравнений состояния. ТМФ, 1993, т.94, №I, с.I22-I39.

II. Выблый Ю.П. Поле точечного электрического заряда в РТГ. В сб. Тарту - 1988, с.74-75.

I2. Ruiz E., Harmonic Coordinates for Kerr's Metric. GRG, 1986, v.18, N 8, p.805-811.

13. Ding H.-G. Цит. в статьях: Zhou P.Y. In: Proc. of the 1st Asia-Pacific Phys.Conf. Singapore 1983, ed. A.Arima et al., World Sci., Singapore 1984, p.6-26. Abe M., Ichinose Sh., Nakanishi N. Kerr Metric, De Donder Condition and Grav.Energy Density. Progr.Theor. Phys., 1987, v.78, N 5, p.1186-1201.
14. Карабут П.В., Чугреев Ю.В. Керр-ньюменовское решение в РТГ. В сб. Тарту, 1988, с.79-81.
15. Chernikov N.A. The Relativistic Kepler Problem in the Lobachevsky Space. Acta Phys.Polon., 1992, v.23, p.1-24. Черников Н.А. Уравнения тяготения в пространстве Лобачевского. Сообщение ОИЯИ Р2-92-192; Дубна, 1992. Chernikov N.A. The Kepler Problem in the Lobachevsky Space and its Solution. Acta Phys. Polon., 1992, v.B23, N 2, p.115.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июля 1993 года.