объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-93-287

А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян[1,2]

МАТРИЦА КОНЕЧНЫХ ТРАНСЛЯЦИЙ В ОСЦИЛЛЯТОРНОМ БАЗИСЕ (ЭТЮД ПАМЯТИ Я.А.СМОРОДИНСКОГО)

Направлено в труды конференции "Методы симметрии в физике",
Дубна, июль 1993

[1]Ереванский государственный университет
[2]Иджеванский колледж-университет

1993

Вместо введения. Нынешней осенью исполнится год тому, как ушел из жизни Я.А.Смородинский. Общение с Яковом Абрамовичем играло важную роль для многих физиков и математиков нашего поколения. Диапазон его знаний был необычайно широк,и это всегда поражало. Но было еще что-то, что влекло к нему людей — его отношение ко всему красивому, в том числе в физике. Было видно, что красота доставляет ему истинное наслаждение, и что он увлекает ею своих читателей и собеседников.

Настоящее краткое сообщение является данью глубокого уважения авторов к этому обаятельному и энциклопедически образованному человеку.

Постановка задачи. Пусть требуется вычислить амплитуду вероятности перехода линейного осциллятора под действием внезапно включенного однородного поля $U = -Fx$ из n-го состояния в k-ое. Эта задача интересна, т. к. она: (a) обобщает одну из задач, изложенных в [1]; (b) искомая амплитуда выражается через функцию Шарлье; (c) решение этой задачи позволяет получить такое представление для функции Шарлье, в котором акцент поставлен не на комбинаторику, а на симметрию; (d) это представление приводит к новым результатам.

После включения поля мы снова имеем линейный осциллятор, но со сдвинутым центром равновесия. Сказанное означает, что в единицах $m = \hbar = \omega = 1$ амплитуда перехода $n \to k$ описывается выражением

$$\mathcal{P}_{kn} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{H}_k(x - F)\bar{H}_k(x)\,dx \ . \qquad (1)$$

Здесь через $\bar{H}_m$ обозначены волновые функции стационарных состояний линейного осциллятора.

При $n = 0$ амплитуда (1) вычисляется кратным интегрированием по частям, после чего получается красивый ответ: вероятность перехода $0 \to k$ определяется распределением Пуассона [1]

$$w_{k0} = \frac{b^k e^{-b}}{k!} \ , \qquad (2),$$

где $b = F^2/2$. Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы вычислить амплитуду (1) при произвольных n.

Метод вычисления. Интеграл (1) не столь безобиден, как может это показаться с первого взгляда. Однако он легко вычисляется, если использовать оператор конечной трансляции и затем обратиться к технике вторичного квантования. В качестве первого шага заметим, что

$$\bar{H}_n(x - F) = e^{-F\partial_x}\bar{H}_k(x) \ .$$

Это позволяет представить амплитуду (1) в виде матрицы оператора конечной трансляции по базису линейного осциллятора †. Перейдя к дираковским обозначениям,имеем

$$\mathcal{P}_{kn} = \langle\, n\,| e^{-F\partial_x} |\, k\,\rangle \ .$$

---

†В работе [2] была развита диаграммная техника вычисления матрицы конечных вращений в базисе многомерного изотропного осциллятора.

Введем операторы рождения и уничтожения

$$\hat{a}^+ = (x - \partial_x)/\sqrt{2}, \quad \hat{a} = (x + \partial_x)/\sqrt{2} \ .$$

Для нас существенно, что

$$-F\partial_x = F(\hat{a}^+ - \hat{a})/\sqrt{2} \ .$$

Так как $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$, то работает формула Хаусдорфа-Бейкера, т.е.

$$e^{-F\partial_x} = e^{-b/2} e^{\sqrt{b}\,\hat{a}^+} e^{-\sqrt{b}\,\hat{a}} .$$

Используем теперь полный набор промежуточных осцилляторных состояний и запишем амплитуду в виде

$$\mathcal{P}_{kn} = e^{-b/2} \sum_{m=0}^{\infty} \langle\, n \,| e^{\sqrt{b}\,\hat{a}^+} |\, m \,\rangle \langle\, m \,| e^{-\sqrt{b}\,\hat{a}} |\, k \,\rangle \ . \qquad (4)$$

С помощью известных формул

$$\hat{a}^+ |\, \mu \,\rangle = \sqrt{\mu + 1}\, |\, \mu + 1 \,\rangle, \quad \hat{a}\, |\, \mu \,\rangle = \sqrt{\mu}\, |\, \mu - 1 \,\rangle$$

легко доказать, что

$$\begin{aligned} \langle\, n \,| e^{\sqrt{b}\,\hat{a}^+} |\, m \,\rangle &= \left(\frac{m!}{n!}\right)^{1/2} \binom{n}{m} (\sqrt{b})^{n-m}, \\ \langle\, m \,| e^{-\sqrt{b}\,\hat{a}} |\, k \,\rangle &= \left(\frac{m!}{k!}\right)^{1/2} \binom{k}{m} (-\sqrt{b})^{k-m}. \end{aligned}$$

Биномиальные коэффициенты в этих формулах обращаются в нуль при $m > k$ и $m > n$ соответственно, и поэтому сумма в (4) обрывается на минимальном из чисел n и k. В итоге ответ выражается в виде произведения экспоненциального фактора на некий полином.

Вероятность перехода. Из предыдущего пункта следует, что амплитуда (1) может быть представлена в следующем окончательном виде:

$$\mathcal{P}_{nk} = (-1)^k \bar{C}_n(k, b) \ , \qquad (5),$$

где $\bar{C}_n(k, b)$ дается выражением

$$\bar{C}_n(k, b) = \left(\frac{b^{n+k} e^{-b}}{n!k!}\right)^{1/2} C_n(k, b) \ , \qquad (6),$$

а $C_n(k, b)$ представляет собой следующий многочлен

$$C_n(k, b) = \sum_m (-1)^m \binom{n}{m} \binom{k}{m} \frac{m!}{b^m} \ . \qquad (7)$$

Многочлен (7) известен в математике как многочлен Шарлье. Он принадлежит классу так называемых ортогональных многочленов дискретной переменной [3].

Многочлен (7) фиксирован, если фиксированны параметр $b > 0$ и один из индексов (второй индекс при этом играет роль дискретной переменной).

Назовем функцию $\bar{C}_n(k, b)$ функцией Шарлье. Помимо очевидной симметрии по индексам n и k функции Шарлье удовлетворяют условию ортонормировки

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_m(k, b) \bar{C}_n(k, b) = \delta_{mn} \qquad (8)$$

и рекуррентному соотношению

$$\sqrt{b(n+1)}\,\bar{C}_{n+1}(k, b) + (k - n - b)\bar{C}_n(k, b) + \sqrt{bn}\,\bar{C}_{n-1}(k, b) = 0 \ . \qquad (9)$$

В математической литературе принято соотношения (8) и (9) записывать на языке полиномов Шарлье. Обращаясь к вероятности перехода, имеем

$$w_{kn} = \left(\bar{C}_n(k, F^2/2)\right)^2 \ . \qquad (10)$$

Заметим, что при $n = 0$ формула (10) переходит в приведенный выше результат для вероятности w_{k0}, т. е. в распределение Пуассона ‡. Соотношение ортонормировки (8) позволяет убедиться в правильности формулы (10). Далее, формулы (8) и (9) дают возможность вычислить матаматическое ожидание и дисперсию для распределения (10). Легко показать, что $\overline{k} = F^2/2 + n$ и $D = \overline{k^2} - \overline{k}^2 = (2n+1)F/2$. При $n = 0$ отсюда имеем соотношение $\overline{k} = D$, что характерно для распределения Пуассона.

Отметим еще одно любопытное свойство: в пределе $b = 0$ функция Шарлье переходит в символ Кронекера. В самом деле, при $n > k$ $(n < k)$ в пределе $b = 0$ главный член в (7) пропорционален b^{-k} (b^{-n}), и, как следует из (6), функция Шарлье обращается в нуль. При $n = k$, как легко убедиться, в том же пределе функция Шарлье обращается в единицу.

Симметрия вместо комбинаторики. Сравнение соотношений (3) и (5) приводит к следующему интересному представлению для функций Шарлье:

$$\bar{C}_n(k, b) = (-1)^k \langle\, n \,| e^{-\sqrt{2b}\,\partial_x} |\, k \,\rangle \ . \qquad (11)$$

Если предыдущее определение (6) ставило акцент на комбинаторику, то (11) переводит этот акцент в область симметрий, подчеркивая связь функций Шарлье с конечными трансляциями. Формула (11) утверждает, что функция Шарлье совпадает (с точностью до фазового множителя) с матрицей оператора конечной трансляции в базисе линейного осциллятора. Эта точка зрения может быть положена в основу теории функций Шарлье. Не составляет труда убедиться, что она сразу приводит к перечисленным в предыдущем пункте свойствам функций Шарлье.

‡Модель с обобщенным распределением Пуассона рассматривалась также в работе [4]. В этой работе распределения выражались через многочлены Лагерра, связь которых с многочленами Шарлье дается формулой $C_n(k, b) = (-b)^n n! L_n^{k-n}(b)$.

Важно, что такой подход — это не только более привычный взгляд на старые вещи. Он может быть использован и для получения новых результатов. Действительно, начнем с очевидного тождества

$$e^{-F_1\partial x}e^{F_2\partial x} = e^{(-F_1+F_2)\partial x} .$$

Переходя в этом тождестве от операторов к матрицам в базисе линейного осциллятора, легко вывести теорему сложения

$$\bar{C}_n\left(k,(\sqrt{b_1}-\sqrt{b_2})^2\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\bar{C}_n(m,b_1)\bar{C}_k(m,b_2) .$$

Этот результат обобщает условие ортонормировки (8), переходя в него при $b_1 = b_2$.

Рассмотрим еще тождество

$$e^{-F_1\partial x}e^{-F_2\partial x} = e^{-(F_1+F_2)\partial x} .$$

Тогда аналогичным образом легко вывести еще одну теорему сложения

$$\bar{C}_n\left(k,(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2})^2\right) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\bar{C}_n(m,b_1)\bar{C}_k(m,b_2),$$

из которой в частном случае $b_1 = b_2 = b$ следует формула

$$\bar{C}_n(k,4b) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\bar{C}_n(m,b)\bar{C}_k(m,b) .$$

Мы видим, что представление (11) в самом деле не только красиво, но и полезно.

Вместо заключения. Для нас было приятной неожиданностью выйти на многочлены Шарлье, т. е. на один из пяти "кирпичиков" теории ортогональных многочленов дискретной переменной. Известно, что этой теорией в свое время был увлечен Я.А. Смородинский, а это означает, что он знал о ней все, или почти все. Не исключено, что наши результаты вызвали бы у него улыбку человека, которому рассказали хороший анекдот. Вопрос лишь в том, слышал он этот анекдот раньше или нет. Во всех случаях мы сожалеем, что не можем узнать мнение самого Якова Абрамовича обо всем этом.

Литература

[1] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория.* Наука. М., 1989.

[2] G.S.Pogosyan, Ya A. Smorodinsky, V.M.Ter-Antonyan. *J.Phys.* A14, 769, 1981.

[3] Г.Бейтмен, А.Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции.* т.2. Наука. М., 1974.

[4] И.В.Луценко, А.Н.Сисакян, Г.Т.Торосян. *Сообщения ОИЯИ* P2-13-049, Дубна, 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел

23 июля 1993 года.