сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-93-276

С.Н.Алексеев, Н.С.Шавохина

ОТКЛОНЕНИЕ ЛУЧА СВЕТА В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ С ФОНОВОЙ СВЯЗНОСТЬЮ ЛОБАЧЕВСКОГО

1993

В релятивистской теории тяготения с фоновой аффинной связностью, разработанной Н.А.Черниковым /I-4/, уравнения Эйнштейна

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi\gamma M_{ab}$$

заменяются на уравнения

$$S_{ab} - \frac{1}{2} S_{mn} g^{mn} g_{ab} = 8\pi\gamma M_{ab}, \qquad \text{(I)}$$

$$S_{ab} = R_{ab} + \frac{1}{2}(\check{R}_{ab} + \check{R}_{ba}),$$

где R_{ab} - тензор Риччи для полевой связности Γ^a_{mn}, совпадающей с символами Кристоффеля для полевого тензора g_{ab}, $\check{R}_{ab}$ - тензор Риччи для фоновой связности $\check{\Gamma}^a_{mn}$, задаваемой независимо от тензора g_{ab}, исходя из физических соображений, M_{ab} - тензор массы, отличающийся от тензора энергии-импульса материи только множителем c^{-2}. Движение луча света мимо источника гравитационного поля рассматривается в области, где $M_{ab}=0$. В этом случае уравнения (I) принимают вид

$$R_{ab} = \check{R}_{ab}. \qquad (2)$$

Сферически симметричное статическое поле тяготения с фоновой связностью Лобачевского в координатах ρ, θ, φ, t, где ρ, θ, φ - обычные сферические координаты, а t - время, задается четырьмя векторами Киллинга

$$\begin{aligned} \underset{1}{\xi} &= \{\underset{1}{\xi}^a\} = \{0, -\sin\varphi, -\cos\varphi \operatorname{ctg}\theta, 0\}, \\ \underset{2}{\xi} &= \{\underset{2}{\xi}^a\} = \{0, \cos\varphi, -\sin\varphi \operatorname{ctg}\theta, 0\}, \\ \underset{3}{\xi} &= \{\underset{3}{\xi}^a\} = \{0, 0, 1, 0\}, \\ \underset{4}{\xi} &= \{\underset{4}{\xi}^a\} = \{0, 0, 0, 1\}; \end{aligned} \qquad (3)$$

полевой метрикой

$$ds^2 = g_{ab}\,dx^a dx^b = F^2 d\rho^2 + H^2 d\Omega^2 - V^2 dt^2, \qquad (4)$$

где функции F, H, V зависят только от координаты ρ, переходящей при больших значениях ρ в метрику

$$d\check{s}^2 = d\rho^2 + k^2 \operatorname{sh}^2\frac{\rho}{k}\, d\Omega^2 - c^2 dt^2; \qquad (5)$$

фоновой связностью $\check{\Gamma}^a_{mn}$, определяемой метрикой (5); а также условием, что в центре сферических координат находится притягивающая масса m. Если $m=0$, то метрика (4) совпадает с метрикой (5), так что метрика (5) является тривиальным решением уравнения (2). В формуле (5) с - скорость света, k - константа Лобачевского для видимого мира,

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2, \qquad (6)$$

-сферическая метрика,

$$d\rho^2 + k^2 \operatorname{sh}^2\frac{\rho}{k}\, d\Omega^2 \qquad (7)$$

- метрика Лобачевского в сферических координатах ρ, θ, φ. В координатах ρ, θ, φ, t отличные от нуля компоненты фоновой связности равны

$$\begin{aligned} &\check{\Gamma}^1_{22} = -k \operatorname{sh}\frac{\rho}{k} \operatorname{ch}\frac{\rho}{k}, \quad \check{\Gamma}^1_{33} = \check{\Gamma}^1_{22} \sin^2\theta, \\ &\check{\Gamma}^2_{12} = k^{-1} \operatorname{cth}\frac{\rho}{k} = \check{\Gamma}^2_{21}, \quad \check{\Gamma}^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \\ &\check{\Gamma}^3_{13} = k^{-1} \operatorname{cth}\frac{\rho}{k} = \check{\Gamma}^3_{31}, \quad \check{\Gamma}^3_{23} = \operatorname{cth}\theta = \check{\Gamma}^3_{32}, \end{aligned} \qquad (8)$$

а отличные от нуля компоненты тензора Риччи $\check{R}_{ab}$ равны

$$\check{R}_{11} = -2k^{-2}, \quad \check{R}_{22} = -2\operatorname{sh}^{-2}\theta, \quad \check{R}_{33} = \check{R}_{22} \sin^2\theta. \qquad (9)$$

Отметим, что и фоновая связность (8), и тензор Риччи (9) не зависят от скорости света с . По фоновой связности (8) метрика определяется неоднозначно, и только условие совпадения метрики (5) с полевой метрикой в отсутствие гравитации определяет константу с как скорость света /6-8/.

Решение задачи Шварцшильда для уравнения (2) найдено в работе /8/ в виде (4), где

$$F V = c, \tag{I0}$$

$$F^2 = e^{-2\alpha} \frac{sh(\xi+\alpha)}{sh(\xi-\alpha)}, \quad \xi = \frac{\rho}{k}, \tag{I1}$$

$$H = k\, e^{-\alpha} sh(\xi+\alpha), \tag{I2}$$

$$\frac{1}{2} sh\, 2\alpha = \frac{\gamma m}{k c^2}, \tag{I3}$$

$\rho_0 = \gamma m c^{-2}$ - гравитационный радиус массы m.

Движение пробных частиц в теории тяготения с фоновой связностью Лобачевского совершается по геодезическим линиям пространства с полевой метрикой. Уравнения геодезических запишем в виде

$$\frac{dx^a}{d\eta} = p^a, \quad \frac{dp^a}{d\eta} = -\Gamma^a_{mn} p^m p^n, \tag{I4}$$

где компоненты полевой связности совпадают с символами Кристоффеля

$$\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2} g^{ab}\left(\partial_n g_{mb} + \partial_m g_{bn} - \partial_b g_{mn}\right) \tag{I5}$$

для полевой метрики, p^a - компоненты четырехимпульса частицы. Уравнения геодезических в форме (I4) пригодны как для массивных, так и для безмассовых частиц. В случае массивной частицы дифференциал $d\eta$ равен отношению дифференциала $d\tau$ собственного времени пробной частицы к ее массе m_0. В случае безмассовой частицы $m_0 = 0$, но и $d\tau = 0$, отношение же $d\tau/m_0$ конечно и равняется $d\eta$. Размерность параметра η равна [сек г$^{-1}$].

Отличные от нуля компоненты полевой связности (I5) для метрики (4) равны

$$\Gamma^4_{14} = \Gamma^4_{41} = V^{-1}\frac{dV}{d\rho}, \quad \Gamma^1_{44} = F^{-2} V \frac{dV}{d\rho},$$

$$\Gamma^1_{11} = F^{-1}\frac{dF}{d\rho}, \quad \Gamma^1_{22} = -F^{-2} H \frac{dH}{d\rho}, \quad \Gamma^1_{33} = \Gamma^1_{22} \sin^2\theta, \tag{I6}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = H^{-1}\frac{dH}{d\rho}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = H^{-1}\frac{dH}{d\rho}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = ctg\,\theta.$$

Из соображений симметрии движение пробной частицы достаточно рассмотреть в экваториальной плоскости

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \tag{I7}$$

Система (I4) со связностью (I6) при условии (I7) имеет следующие первые интегралы:

$$1)\ F^2\left(\frac{d\rho}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 - V^2\left(\frac{dt}{d\eta}\right)^2 = -m_0^2 c^2, \tag{I8}$$

$$2)\ \left(\frac{V}{c}\right)^2 \frac{dt}{m_0\, d\eta} = \varepsilon \tag{I9}$$

- интеграл удельной энергии, деленный на скорость света в квадрате,

$$3)\ H^2 \frac{d\varphi}{m_0\, d\eta} = \mu \tag{20}$$

- интеграл удельного момента.

Подставляя (I7),(I9) и (20) в (I8), получаем дифференциальное уравнение

$$\mu^2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \varepsilon^2 c^2 H^4 - V^2 H^4 - \left(\frac{\mu V H}{c}\right)^2 \qquad (21)$$

для траектории $\rho = \rho(\varphi)$. Подставляя сюда (10) - (13), получаем окончательно следующее уравнение:

$$\mu^2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \varepsilon^2 c^2 P^4 \operatorname{sh}^4(\xi+\alpha) - c^2 P^2 k^4 \operatorname{sh}(\xi-\alpha)\operatorname{sh}^3(\xi+\alpha) - \mu^2 k^2 \operatorname{sh}(\xi-\alpha)\operatorname{sh}(\xi+\alpha) , \qquad (22)$$

где

$$P = e^{-\alpha}. \qquad (23)$$

Уравнение (22) впервые получено в работе /8/. В пределе оно переходит в известное уравнение

$$\mu^2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \varepsilon^2 c^2 (\rho+\rho_0)^4 - c^2(\rho-\rho_0)(\rho+\rho_0)^3 - \mu^2(\rho-\rho_0)(\rho+\rho_0) \qquad (24)$$

движения пробной частицы в поле Шварцшильда /9/, $\rho_0 = \frac{\gamma m}{c^2}$ совпадает с гравитационным радиусом Солнца.

Если ввести новую переменную

$$u = \frac{1}{k} \operatorname{cth} \xi , \qquad (25)$$

то после ряда преобразований уравнение (22) приведется к следующему виду:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \operatorname{ch}^4\alpha \left\{ A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + A_4 u^4 \right\} , \qquad (26)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= (\varepsilon^2 P^2 - 1) c^2 P^2 \mu^{-2} + k^{-2} - k^{-4}\beta^2 , \\ A_1 &= 2(2\varepsilon^2 P^2 - 1) c^2 P^2 \mu^{-2}\beta , \\ A_2 &= -1 + 6\varepsilon^2 P^2 \mu^{-2} c^2 \beta^2 + k^{-4}\beta^4 , \\ A_3 &= 2(2\varepsilon^2 P^2 + 1) c^2 P^2 \mu^{-2} \beta^3 , \\ A_4 &= (\varepsilon^2 P^2 + 1) c^2 P^2 \mu^{-2}\beta^4 + \beta^2 - k^{-2}\beta^4 . \end{aligned} \qquad (27)$$

В свою очередь

$$\beta = k \operatorname{th} \alpha . \qquad (28)$$

Уравнение (26) получено в работе (12).

В пределе $k \to \infty$ уравнение (26) переходит в уравнение

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = (\varepsilon^2-1) c^2 \mu^{-2} + 2(2\varepsilon^2-1) c^2 \mu^{-2} \rho_0 u + (6\varepsilon^2 \mu^{-2} c^2 \rho_0^2 - 1) u^2 + 2(2\varepsilon^2+1) c^2 \mu^{-2} \rho_0^3 u^3 + \left[1 + (\varepsilon^2+1) c^2 \mu^{-2} \rho_0^2\right] \rho_0^2 u^4 \qquad (29)$$

для траектории пробной частицы в поле Шварцшильда. В (29) $u = \rho^{-1}$.

Луч света распространяется вдоль нулевой геодезической. Для фотона $m_0^2 = 0$, в силу чего правая часть интеграла (18) обращается в нуль. Удельная энергия ε и удельный момент μ из (19) и (20) становятся бесконечно большими, отношение же их, равное

$$\frac{\mu}{\varepsilon} = \frac{H^2 c^2}{V^2} \frac{d\varphi}{dt} , \qquad (30)$$

будет конечным. Обозначим

$$\lim_{m_0 \to 0} \frac{M}{\varepsilon} = c b \,, \qquad (31)$$

где постоянная b имеет размерность длины и ее можно интерпретировать как прицельное расстояние фотона /9/. С учетом (30) и (31) формула (22) примет вид

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{P^4 \kappa^4}{b^2}\, sh^4(\xi+\alpha) - \kappa^2 sh(\xi-\alpha)\, sh(\xi+\alpha) . \qquad (32)$$

Преобразует это выражение к виду

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = k^4 sh^4\xi\, ch^4\alpha \left\{ \frac{P^4}{b^2}(1 + cth\xi\; th\,\alpha)^4 - \right. \qquad (33)$$

$$\left. - \frac{1}{\kappa^2}(1 - th^2\alpha)(ch^2\xi - 1)(1 - cth^2\xi\; th^2\alpha) \right\} .$$

Корень $\tilde{\rho}$ уравнения

$$1 + cth\frac{\rho}{k}\; th\,\alpha = 0 \qquad (34)$$

является также решением $\rho = \tilde{\rho}$ уравнения (33).

Вводя обозначение (28) и делая замену (25), уравнение (34) приведем к виду

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = ch^4\alpha \left\{ \frac{P^4}{b^2}(1+\beta u)^4 - \right. \qquad (35)$$

$$\left. - \frac{1}{\kappa^2}\left(1 - \frac{\beta^2}{\kappa^2}\right)\left(\kappa^2 u^2 - 1\right)\left(1 - \beta^2 u^2\right) \right\} .$$

Очевидно, что $u = u_0 = -\frac{1}{\beta}$ является решением этого уравнения и корнем полинома $\mathcal{P}_4(u) = f(u)$, в его правой части.

Запишем уравнение (35) в следующем виде:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = ch^4\alpha \left\{ A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + A_4 u^4 \right\}, \qquad (36)$$

где

$$A_0 = \frac{P^4}{b^2} + \frac{1}{\kappa^2} - \frac{\beta^2}{\kappa^4} ,$$

$$A_1 = \frac{4\beta P^4}{b^2} , \qquad (37)$$

$$A_2 = -1 + \frac{\beta^4}{\kappa^4} - \frac{6\beta^2 P^4}{b} ,$$

$$A_3 = \frac{4\beta^3 P^4}{b^2} ,$$

$$A_4 = \frac{P^4}{b^2} + \beta^4 - \frac{\beta^4}{\kappa^2} .$$

Для фотонов в поле Солнца $A_2 < 0$. Сравним уравнение (36) для траектории фотона с общим уравнением для траектории пробной частицы (26). Оба эти уравнения имеют решение $u = -\frac{1}{\beta}$, поскольку $u = u_0 = -\frac{1}{\beta}$ является корнем соответствующих полиномов 4-ой степени, стоящих в их правых частях. Существование корня $u_0 = -\frac{1}{\beta}$ позволяет свести зависимость u от φ к эллиптическим функциям /II-I2/. Действительно, для уравнений (36), а также и уравнения (26) можно записать

$$ch^2\alpha\; \varphi = \int_{u_0}^{u} f(t)^{-\frac{1}{2}} dt ,$$

где $u_0 = -\frac{1}{\beta}$, а функция $f(t)$ равна

$$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + A_4 t^4 .$$

Отсюда можно получить после ряда преобразований явную зависимость u от φ /10/ в виде

$$u = -\frac{1}{\beta} + \frac{1}{4} f\left(-\frac{1}{\beta}\right)' \left\{ \wp(ch^2\alpha\varphi, g_1, g_2) - \frac{1}{24} f''\left(-\frac{1}{\beta}\right)\right\}^{-1},$$

где $\wp(z, g_1, g_2)$ - эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\frac{d\,\wp(z)}{dz}\right)^2 = 4\,\wp^3(z) - g_2\,\wp(z) - g_3 .$$

Здесь инварианты g_2 и g_3 равны соответственно

$$g_2 = A_0 A_4 - \frac{1}{4} A_1 A_3 + \frac{1}{12} A_2^2 ,$$

$$g_3 = \frac{1}{6} A_0 A_2 A_4 + \frac{1}{48} A_1 A_2 A_3 - \frac{1}{216} A_2^3 - \frac{1}{16} A_1^2 A_4 - \frac{1}{16} A_0 A_3^2 .$$

Знание точного решения уравнения (36) позволяет с любой наперед заданной точностью определить теоретическое значение отклонения луча света, проходящего мимо Солнца. Заметим, что всё сказанное относится также к уравнению (26) и к определению теоретического значения смещения перигелия Меркурия в теории тяготения с фоновой связностью Лобачевского.

Для упрощения расчета отклонения луча света в статическом сферически симметричном гравитационном поле в теории тяготения с фоновой связностью Лобачевского сделаем те же приближения, что и в общей теории относительности в аналогичном случае /9/. В результате из (36) получим следующее приближенное уравнение для траектории фотона

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = ch^4\alpha \left\{ B_0 + B_1 u + B_2 u^2 \right\}, \qquad (38)$$

где

$$B_0 = A_0 , \quad B_1 = A_1 , \quad B_2 = -1 + \frac{\beta_4}{k^4} . \qquad (39)$$

Решение уравнения (38) имеет вид

$$u = \frac{1 + e\cos\nu\varphi}{p} , \qquad (40)$$

где

$$p = -2B_2/B_1 ,$$
$$e = \sqrt{1 + 2p\,B_0/B_1} , \qquad (41)$$
$$\nu = ch^2\alpha\sqrt{-B_2} .$$

Для фотонов в поле Солнца $B_2 < 0$.

Лобачевский полагал, что постоянная k не меньше расстояния до ближайшей звезды. Приблизительно имеем $k > 10^{14}$ км. Из (39) и (41) с очевидностью следует, что при таких значениях $e > 1$. Следовательно, коническое сечение, задаваемое формулой (40), является гиперболой.

Пренебрегая в (38) и (39) членами, содержащими отрицательные степени k, получим известное решение для траектории луча света в поле Шварцшильда /9/

$$u = \frac{2\rho_0}{b^2} + \frac{1}{b}\cos\varphi , \qquad (42)$$

где ρ_0, как и раньше в формуле (24), совпадает с гравитационным радиусом Солнца, равным $\frac{\delta m}{c^2} \approx 1{,}5$ км. При больших k из (41) получаем для p, e и ν их значения в общей теории относительности

$$p = \frac{b^2}{2\rho_0} , \quad e = \frac{b}{2\rho_0} , \quad \nu = 1 . \qquad (43)$$

Фокальный параметр p, эксцентриситет e и частота ν из (41) отличаются малыми поправками, зависящими от k, от соответствующих величин в (43). С точностью до величин $O\left(\frac{1}{k}\right)$ они равны

$$P = \frac{b^2}{2\rho_0}\left(1 + \frac{4\rho_0}{k} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$
$$e = \frac{b}{2\rho_0}\left(1 + \frac{2\rho_0}{k} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \qquad \nu = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right). \tag{44}$$

Гипербола

$$\frac{1}{u} = \frac{P}{1 + e\cos\nu\varphi} \tag{45}$$

имеет угол между асимптотами, мало отличающийся от 2π. В ближайшем к траектории фокусе расположено Солнце. Направление асимптот определяется из условия $u = 0$. Это означает, что

$$\cos\nu\varphi = -\frac{1}{e}, \tag{46}$$

где ν и e берутся из (44). Поскольку b велико, то $1/e$ мало, и для предельного значения угла φ имеем два значения

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta, \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2} - \delta. \tag{47}$$

В свою очередь величину δ можно положить равной

$$\delta = \frac{1}{e}, \tag{48}$$

а искомое отклонение луча света становится равным

$$2\delta = \frac{2}{e} = \frac{4\rho_0}{b}\left(1 - \frac{2\rho_0}{k} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right). \tag{49}$$

Эффект отклонения луча света должен приводить к искажению видимой картины звездного неба, когда между наблюдателем с Земли и звездами расположено Солнце. Эффект отклонения луча можно наблюдать только при полном солнечном затмении. Обработка данных наблюдений затмения 1952 года дает значение для отклонения $2\delta_0$, равное

$$2\delta_0 = 1'',70. \tag{50}$$

Теоретическое же значение отклонения луча света в общей теории относительности по формуле Эйнштейна /13/

$$2\delta = \frac{4\rho_0}{b}$$

равно

$$2\delta = 1''75 = 8,488\cdot 10^{-6}\ рад.$$

В заключение авторы считают своим долгом поблагодарить профессора Н.А.Черникова за предложенную им тему для этой статьи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Черников Н.А. - ЭЧАЯ, том, 18, вып.6, 1987, с.1000.
2. Черников Н.А. - Сообщение ОИЯИ Р2-90-399, Дубна, 1990.
3. Chernikov N.A.- Acta Physica Polonica B, 1992, vol.23, No 2, p. 115-122.
4. Черников Н.А. - Сообщение ОИЯИ Р2-92-108, Дубна, 1992.
5. Петров А.З. - Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
6. Черников Н.А . - Сообщение ОИЯИ Р2-92-192, Дубна, 1992.
7. Черников Н.А. - Препринты ОИЯИ Р2-92-443, Р2-92-549, Дубна, 1992. (Направлено в Труды Международной конференции "Лобачевский и современная геометрия", Казань, 1992 г.).
8. Chernikov N.A. - Acta Physica Polonica B, 1992, vol. 23, No 12, p. 1-24.
9. Фок В.А. - Теория пространства-времени и тяготения. М.: ГИФМЛ, 1961.

I0. Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. - Курс современного анализа. М.-Л.:
II. Гурвиц А., Курант Р. - Теория функций. М.: Наука, I968.
I2. Алексеев С.Н., Шавохина Н.С. - Сообщение ОИЯИ Р2-93-263, Дубна, I993.
I3. Einstein A. - Ann. of Phys., v.49, 769, 1916.

Рукопись поступила в издательский отдел
I9 июля I993 года.