сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-93-263

С.Н.Алексеев, Н.С.Шавохина

ДВИЖЕНИЕ ПЕРИГЕЛИЯ ПЛАНЕТЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ С ФОНОВОЙ СВЯЗНОСТЬЮ ЛОБАЧЕВСКОГО

1993

В теории тяготения с двумя аффинными связностями, разработанной Н.А.Черниковым [1-4], уравнения Эйнштейна

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R \, g_{ab} = 8 \pi \gamma M_{ab}$$

заменяются на уравнения

$$S_{ab} - \frac{1}{2} S_{mn} \, g^{mn} g_{ab} = 8 \pi \gamma M_{ab} , \tag{1}$$

где

$$S_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} (\check{R}_{ab} + \check{R}_{ba}) . \tag{2}$$

Здесь R_{ab} - тензор Риччи для полевой связности Γ^{a}_{mn} , $\check{R}_{ab}$ - тензор Риччи для фоновой связности $\check{\Gamma}^{a}_{mn}$, полевая связность Γ^{a}_{mn} совпадает с символами Кристоффеля для метрического тензора g_{ab} , M_{ab} - тензор массы, не зависящий от выбора фоновой связности.

В работах [5-7] фоновая связность задаётся с помощью геометрии Лобачевского и решается задача Шварцшильда для уравнения (1). В области, где движутся планеты, $M_{ab} = 0$, и уравнения (1) принимают вид

$$R_{ab} = \check{R}_{ab} . \tag{3}$$

В работах [5-7] предполагается, что в отсутствие гравитации полевая метрика приводится к виду

$$g_{ab} \, d x^a \, d x^b = d \rho^2 + k^2 \, sh^2 \frac{\rho}{k} \, d \Omega^2 - c^2 \, d t^2 , \tag{4}$$

где c - скорость света, t - время, k - константа Лобачевского,

$$d \rho^2 + k^2 \, sh^2 \frac{\rho}{k} \, d \Omega^2 \tag{5}$$

- метрика Лобачевского в сферических координатах ρ, θ, φ,

$$d \Omega^2 = d \theta^2 + \sin^2 \theta \, d \varphi^2 \tag{6}$$

- сферическая метрика. Кроме того предполагается, что в отсутствие гравитации полевая связность совпадает с фоновой и что фоновая связность не зависит от гравитационного поля, так что метрика (4) является тривиальным решением уравнения (3).

В соответствии с вышесказанным в координатах ρ, θ, φ, t отличные от нуля компоненты фоновой связности равны

$$
\begin{aligned}
&\check{\Gamma}^{1}_{22} = -k\, sh\,\frac{\rho}{k}\, ch\,\frac{\rho}{k}\,, &&\check{\Gamma}^{1}_{33} = \check{\Gamma}^{1}_{22}\, sin^2\theta\,,\\
&\check{\Gamma}^{2}_{12} = k^{-1}\, cth\,\frac{\rho}{k} = \check{\Gamma}^{2}_{21}\,, &&\check{\Gamma}^{2}_{33} = -\,sin\,\theta\, cos\,\theta\,, \qquad (7)\\
&\check{\Gamma}^{3}_{13} = k^{-1}\, cth\,\frac{\rho}{k} = \check{\Gamma}^{3}_{31}\,, &&\check{\Gamma}^{3}_{23} = cth\,\theta = \check{\Gamma}^{3}_{32}\,,
\end{aligned}
$$

а отличные от нуля компоненты тензора Риччи $\check{R}_{ab}$ равны

$$
\check{R}_{11} = -\,2\,k^{-2}\,, \quad \check{R}_{22} = -\,2\,sh^{-2}\,\theta\,, \quad \check{R}_{33} = \check{R}_{22}\, sin^2\theta\,. \qquad (8)
$$

Решение задачи Шварцшильда для уравнения (3) найдено в работе [7] в виде

$$
g_{ab}\, d x^a\, d x^b = F^2\, d\rho^2 + H^2\, d\Omega^2 - V^2\, d t^2\,, \qquad (9)
$$

где функции F, H, V зависят только от координаты ρ, причём

$$
F\,V = c\,, \qquad (10)
$$

$$
F^2 = e^{-2\alpha}\,\frac{sh\,(\xi + \alpha)}{sh\,(\xi - \alpha)}\,, \quad \xi = \frac{\rho}{k}\,, \qquad (11)
$$

$$
H = k\, e^{-\alpha}\, sh\,(\xi + \alpha)\,, \qquad (12)
$$

$$
\frac{1}{2}\, sh\, 2\,\alpha = \frac{\gamma\, m}{k\, c^2}\,, \qquad (13)
$$

$\rho_0 = \gamma\, m\, c^{-2}$ – гравитационный радиус массы m.

Движение планеты задаётся уравнениями геодезических

$$
\frac{d^2\rho}{d\tau^2} + F^{-1}\,\frac{dF}{d\rho}\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 =
$$

$$
F^{-2}\, H\,\frac{dH}{d\rho}\left[\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right] - F^{-2}\, V\,\frac{dV}{d\rho}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2,
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\,H^{-1}\,\frac{dH}{d\rho}\,\frac{d\rho}{d\tau}\,\frac{d\theta}{d\tau} - sin\,\theta\, cos\,\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0\,,\\
&\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\,H^{-1}\,\frac{dH}{d\rho}\,\frac{d\rho}{d\tau}\,\frac{d\varphi}{d\tau} + 2\, cth\,\theta\,\frac{d\theta}{d\tau}\,\frac{d\varphi}{d\tau} = 0\,, \qquad (14)\\
&\frac{d^2 t}{d\tau^2} + 2\,V^{-1}\,\frac{dV}{d\rho}\,\frac{d\rho}{d\tau}\,\frac{dt}{d\tau} = 0
\end{aligned}
$$

для полевой метрики (9). Здесь τ – собственное время планеты. Поэтому полагаем

$$
F^2\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + H^2\left[\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right] - V^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = -\,c^2. \qquad (15)
$$

Заметим, что левая часть этого равенства является первым интегралом системы уравнений (14). Другим первым интегралом этой же системы является интеграл (удельной) энергии

$$
\left(\frac{V}{c}\right)^2\frac{dt}{d\tau} = \varepsilon\,. \qquad (16)
$$

Он получается из четвертого уравнения системы (14). Исключая из (15) и (16) производную $\frac{dt}{d\tau}$ и учитывая (10), получаем

$$
\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 = \varepsilon^2 c^2 - V^2 - \left(\frac{V\,H}{c}\right)^2\left[\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right]. \qquad (17)
$$

Из соображений симметрии понятно, что достаточно рассмотреть движение планеты в экваториальной плоскости

$$
\theta = \frac{\pi}{2}\,. \qquad (18)
$$

При таком выборе θ второе из уравнений (14) удовлетворяется, а первое и третье сильно упрощаются, причём из третьего уравнения получается первый интеграл

$$
H^2\,\frac{d\varphi}{d\tau} = \mu\,, \qquad (19)
$$

который можно интерпретировать как удельный момент планеты. Подставляя (18) и (19) в (17), получаем

$$
\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 = \varepsilon^2 c^2 - V^2 - \left(\frac{\mu\, V}{H\, c}\right)^2. \qquad (20)
$$

Из (19) и (20) получаем дифференциальное уравнение

$$\mu^2 \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \varepsilon^2 c^2 H^4 - V^2 H^4 - \left(\frac{\mu V \dot{H}}{c}\right)^2 \qquad (21)$$

для траектории $\rho = \rho(\varphi)$. Подставляя сюда (10) – (13), получаем окончательно следующее уравнение:

$$\mu^2 \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \varepsilon^2 c^2 P^4 k^4 sh^4 (\xi + \alpha) -$$

$$- c^2 P^2 k^4 sh(\xi - \alpha) sh^3 (\xi + \alpha) - \qquad (22)$$

$$- \mu^2 k^2 sh(\xi - \alpha) sh(\xi + \alpha),$$

где

$$P = e^{-\alpha}. \qquad (23)$$

Уравнение (22) впервые получено в работе [7]. В пределе $k \longrightarrow \infty$ оно переходит в известное уравнение

$$\mu^2 \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \varepsilon^2 c^2 (\rho + \rho_0)^4 - \qquad (24)$$

$$- c^2 (\rho - \rho_0)(\rho + \rho_0)^3 - \mu^2 (\rho - \rho_0)(\rho + \rho_0)$$

траектории планеты в поле Шварцшильда [8].

Если ввести новую переменнную

$$u = \frac{1}{k} cth\, \xi, \qquad (25)$$

то после ряда преобразований уравнение (22) приведётся к следующему виду:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \{A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + A_4 u^4\} ch^4 \alpha, \qquad (26)$$

где

$$A_0 = (\varepsilon^2 P^2 - 1) c^2 P^2 \mu^{-2} + k^{-2} - k^{-4} \beta^2, \qquad (27)$$

$$A_1 = 2(2\varepsilon^2 P^2 - 1) c^2 P^2 \mu^{-2} \beta,$$

$$A_2 = -1 + 6\varepsilon^2 P^2 \mu^{-2} c^2 \beta^2 + k^{-4} \beta^4,$$

$$A_3 = 2(2\varepsilon^2 P^2 + 1) c^2 P^2 \mu^{-2} \beta^3,$$

$$A_4 = (\varepsilon^2 P^2 + 1) c^2 P^2 \mu^{-2} \beta^4 + \beta^2 - k^{-2} \beta^4.$$

В свою очередь,

$$\beta = k\, th\, \alpha. \qquad (28)$$

Из (26) следует, что зависимость u от φ сводится к эллиптическим функциям [9].

В пределе $k \longrightarrow \infty$ уравнение (26) переходит в уравнение

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = (\varepsilon^2 - 1) c^2 \mu^{-2} + 2(2\varepsilon^2 - 1) c^2 \mu^{-2} \rho_0 u +$$

$$+ (6\varepsilon^2 \mu^{-2} c^2 \rho_0^2 - 1) u^2 + 2(2\varepsilon^2 + 1) c^2 \mu^{-2} \rho_0^3 u^3 +$$

$$+ [1 + (\varepsilon^2 + 1) c^2 \mu^{-2} \rho_0^2] \rho_0^2 u^4 \qquad (29)$$

для траектории планеты в поле Шварцшильда. В (29) $u = \rho^{-1}$.

Сделав те же приближения [8], что и в случае Шварцшильда, из уравнения (26) получаем уравнение

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \{A_0 + A_1 u + A_2 u^2\} ch^4 \alpha, \qquad (30)$$

решение которого имеет следующий вид:

$$u = \frac{1 + e \cos \nu \varphi}{p}, \qquad (31)$$

где

$$p = -2 A_2 / A_1,$$

$$e = \sqrt{1 + 2 A_0 p / A_1}, \qquad (32)$$

$$\nu = ch^2\alpha \sqrt{-A_2}.$$

Для планет солнечной системы $A_2 < 0$. При $\nu = 1$ формула (31) описывает конические сечения. Для того чтобы движение было финитным, в рассматриваемом приближении согласно [10] должны выполняться следующие условия:

1) $e = 0$, $0 < p < k$ для кругового движения,

2) $e > 0$, $p + k\,e < k$ для эллиптического движения.

Из этих условий следует, что $\varepsilon^2 p^2 < 1$.

При $k \longrightarrow \infty$ имеем

$$
\begin{aligned}
p &\longrightarrow p_0 = \mu^2 / \gamma\, m\,, \\
2\, A_0 / A_1 &\longrightarrow (\varepsilon^2 - 1) / \rho_0\,, \\
e &\longrightarrow e_0 = \sqrt{1 + (\varepsilon^2 - 1)\, p_0 / \rho_0}\,, \\
\nu &\longrightarrow \nu_0 = 1 - 3\, \rho_0 / p_0\,.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Смещение перигелия планеты равняется $\Delta\,\varphi = \frac{2\,\pi}{\nu} - 2\,\pi$. Из изложенного выше следует вывод, что при $k \longrightarrow \infty$ смещение перигелия планеты в теории тяготения с фоновой связностью Лобачевского стремится к смещению $\Delta\,\varphi_c$ перигелия планеты в поле Шварцшильда.

В заключение авторы выражают благодарность профессору Н.А.Черникову за предложенную тему, постоянное внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А. - ЭЧАЯ, том 18, вып. 5, 1987, с. 1000.
2. Черников Н.А. - Сообщение ОИЯИ Р2 - 90- 399, Дубна, 1990.
3. Chernikov N.A. - Acta Physica Polonica B, 1992, vol. 23, No 2, p 115 - 122.
4. Черников Н.А. - Сообщение ОИЯИ Р2 - 92- 108, Дубна, 1992.
5. Черников Н.А. - Сообщение ОИЯИ Р2 - 92- 192, Дубна, 1992.
6. Черников Н.А. - Препринты ОИЯИ Р2 - 92 - 443, Р - 92 - 549, Дубна, 1992. (Направлено в Труды Международной конференции "Лобачевский и современная геометрия. Казань, 1992 г.)
7. Chernikov N.A. - Acta Physica Polonica B, 1992, vol. 23, No 12, p p 1 - 24.
8. Фок В.А. - Теория пространства времени и тяготения. М.: ГИФМЛ, 1961.
9. Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. - Курс современного анализа. М. - Л.: ГТТИ, 1934.
10. Черников Н.А. - ЭЧАЯ, том 23, вып. 5, 1992, с. 1155.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 июля 1993 года.