93-226

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-93-226

Р.А.Асанов

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Направлено в журнал «GRG» и на Фридмановский международный семинар по гравитации и космологии, Санкт-Петербург, сентябрь 1993 г.

1993

В предложенном недавно Н.А.Черниковым обобщении общей теории относительности А.Эйнштейна уравнения теории могут быть получены из уравнений Эйнштейна

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\,,(\mu,\nu=0,1,2,3) \tag{I}$$

(здесь G - постоянная тяготения Ньютона) с помощью следующей процедуры /I/. В левой части уравнений (I) тензор Риччи

$$R_{\mu\nu}\equiv R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu}\,, \tag{2}$$

построенный из тензора кривизны Римана - Кристоффеля

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho}\equiv\partial_\nu\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}-\partial_\rho\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}+\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}-\Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \tag{3}$$

(здесь

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\equiv\frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(\partial_\nu g_{\sigma\rho}+\partial_\rho g_{\sigma\nu}-\partial_\sigma g_{\nu\rho}\right) \tag{4}$$

(скобки Кристоффеля) - обычная ("полевая") связность) заменяется на разность

$$S_{\mu\nu}\equiv R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\left(\hat{R}_{\mu\nu}+\hat{R}_{\nu\mu}\right), \tag{5}$$

где тензор $\hat{R}_{\mu\nu}$ задается по формулам (2) и (3) с помощью второй аффинной связности без кручения $\hat{\Gamma}^{\mu}_{\nu\rho}$, названной Черниковым "фоновой". В результате получаем уравнения теории

$$S_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\left(g^{\rho\sigma}S_{\rho\sigma}\right)g_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\,. \tag{6}$$

При этом правая часть уравнений остается такой же, как в ОТО. Данное обстоятельство соответствует тому, что воздействие источников поля не зависит от фоновой связности.

Дальнейшая конкретизация теории зависит, очевидно, от выбора фоновой связности. Недавно Н.А.Черников предложил и рассмотрел /1,2/ вариант, в котором фоновая связность выбирается следующим образом. Во-первых, при отсутствии гравитации полагается

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} . \tag{7}$$

Затем в этих же условиях принимается, что метрика в статическом случае в сферических координатах принимает вид

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = (c\,dt)^2 - L_{ab}dx^a dx^b =$$
$$= (c\,dt)^2 - dr^2 - \left(k\,\mathrm{sh}\frac{r}{k}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{8}$$
$$L_{11} = 1,\ L_{22} = \left(k\,\mathrm{sh}\frac{r}{k}\right)^2,\ L_{33} = L_{22}\sin^2\theta,\ (a, b = 1,2,3),$$

так что ее трехмерная часть есть пространство Н.И.Лобачевского, переходящее в пределе при $k \to \infty$ в евклидово. Наконец, фоновая связность выбирается равной скобкам Е.Б.Кристоффеля и задается метрикой (8), то есть

$$\hat{\Gamma}^{a}_{mn} = \hat{\Gamma}^{a}_{nm} = \Gamma^{a}_{mn\,(\text{Крист.})}, \text{ остальные – нули.} \tag{9}$$

В сферических координатах (r, θ, φ) ненулевые Γ суть

$$\begin{aligned}
&\hat{\Gamma}^{1}_{22} = -k\,\mathrm{sh}\frac{r}{k}\,\mathrm{ch}\frac{r}{k}, && \hat{\Gamma}^{1}_{33} = \hat{\Gamma}^{1}_{22}\sin^2\theta, \\
&\hat{\Gamma}^{2}_{12} = \hat{\Gamma}^{2}_{21} = \frac{1}{k}\,\mathrm{cth}\frac{r}{k}, && \hat{\Gamma}^{2}_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \\
&\hat{\Gamma}^{3}_{13} = \Gamma^{3}_{31} = \frac{1}{k}\,\mathrm{cth}\frac{r}{k}, && \hat{\Gamma}^{3}_{23} = \hat{\Gamma}^{3}_{32} = \mathrm{ctg}\,\theta
\end{aligned} \tag{10}$$

Следствием кристоффелевости $\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ будет симметрия тензора Г.Риччи фоновой связности $\hat{R}_{\mu\nu} = \hat{R}_{\nu\mu}$ и $\hat{R}^{\sigma}{}_{\sigma\mu\nu} = 0$. Поэтому из (5) имеем $S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \hat{R}_{\mu\nu}$ и можно записать уравнения теории для данного варианта в виде

$$R_{\mu\nu} - \hat{R}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right),\ T \equiv g^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma} . \tag{11}$$

Тензор Риччи фоновой связности (9) равен

$$\hat{R}_{mn} = -\frac{2}{k^2} h_{mn}, \quad \text{остальные - нули,} \tag{12}$$

поэтому система уравнений (II) принимает вид

$$\begin{aligned} R_{o\mu} &= \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{o\mu} - \frac{1}{2} g_{o\mu} T\right), \\ R_{mn} + \frac{2}{k^2} h_{mn} &= \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} T\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, левые части уравнений гравитационного поля для рассматриваемого варианта теории конкретизированы полностью.

Эти уравнения были решены их автором /2/ для случая статического сосредоточенного источника поля с массой m в предположении о сферической симметрии 3-пространства. Им получено точное внешнее решение, переходящее в пределе при $k \to \infty$ в известное решение /5/ К.Шварцшильда, выраженное в гармонических координатах /6/.

Попытаемся в такой же постановке решить задачу для случая источника поля с массой m и электрическим зарядом e. Ясно, что для этого к системе уравнений (I3) нужно присоединить уравнения Максвелла

$$\nabla_\mu F^{\nu\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu\left(\sqrt{-g} F^{\mu\nu}\right) = 4\pi j^\nu, \quad F_{\rho\sigma} \equiv \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho, \quad g \equiv \det g_{\mu\nu}, \tag{14}$$

а к материальному тензору $T_{\mu\nu}$ добавить тензор энергии электромагнитного поля

$$T^{(e)}_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\rho}}{4\pi}\left(-F^{\rho\sigma} F_{\nu\sigma} + \frac{1}{4}\delta^\rho_\nu F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}\right), \quad T^{(e)} \equiv g^{\mu\nu} T^{(e)}_{\mu\nu} = 0. \tag{15}$$

Предположения о статичности задачи и сферической симметрии 3-пространства приводят к выражению в сферических r, θ, φ-координатах

$$ds^2 = V^2(r)(c\,dt)^2 - F^2(r)\,dr^2 - K^2(r)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \tag{16}$$

откуда по формулам (4),(3) и (2) выразим полевую связность $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и тензор $R_{\mu\nu}$ через V, F и $\mathcal{H}$.

В данной постановке задачи достаточно обойтись одной ненулевой компонентой электрического поля $F_{01}=-\partial_r A_0 \equiv A_0'$, здесь $(-A_0)$ - скалярный потенциал. Вне области локализации заряда уравнения Д.К.Максвелла дают

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial r}\left(VF\mathcal{H}^2\sin^2\theta\frac{1}{V^2F^2}F_{01}\right)=0, \tag{I7}$$

откуда

$$F_{01}=-e\frac{FV}{\mathcal{H}^2}; \tag{I8}$$

здесь e - электрический заряд источника. Таким образом, в этой же области

$$T^{(e)}_{00}=\frac{e^2}{8\pi}\frac{V^2}{\mathcal{H}^4},\quad T^{(e)}_{11}=-\frac{e^2}{8\pi}\frac{F^2}{\mathcal{H}^4},\quad T^{(e)}_{22}=\frac{e^2}{8\pi}\frac{1}{\mathcal{H}^2}, \tag{I9}$$

$T^{(e)}_{33}=T^{(e)}_{22}\sin\theta$, остальные - нули.

На этом "внешняя" часть тензорного поля $T_{\mu\nu}(r,\theta,\varphi)$ исчерпывается. "Внутреннюю" же часть, отвечающую наличию сосредоточенной массы, выписывать не будем. Учитывая, что $L_{11}=1$, $L_{22}=\left(k\,sh\frac{r}{k}\right)^2$, запишем уравнения поля (I3) с тензором (I9), а именно их компоненту (oo), умноженную на $F\mathcal{H}^2V^{-1}$, компоненту (22), умноженную на $(-FV)$, и комбинацию компонент (II) и (00) вида $-\frac{\mathcal{H}}{2}\left(R_{11}+\frac{2}{k^2}L_{11}+F^2V^{-2}R_{00}\right)=0$,

$$\left(\frac{\mathcal{H}^2V'}{F}\right)'=\frac{Ge^2}{c^4}\frac{FV}{\mathcal{H}^2}, \tag{20}$$

$$\left(\frac{\mathcal{H}\mathcal{H}'V'}{F}\right)'-FV\,ch\frac{2r}{k}=-\frac{Ge^2}{c^4}\frac{FV}{\mathcal{H}^2}, \tag{2I}$$

$$\mathcal{H}''-\frac{\mathcal{H}}{k^2}-\mathcal{H}'\frac{(FV)'}{FV}=0, \tag{22}$$

штрихом обозначена производная $\frac{d}{dr}$.

Следуя работе /2/, будем искать частное решение системы, полагая

$$FV = C \qquad (C = const). \tag{23}$$

Уравнение (22) принимает вид $\varkappa'' - \varkappa/k^2 = 0$, немедленно интегрируется, и с учетом предельного перехода при $k \to \infty$ получаем:

$$\varkappa(\tau) = Pk\, sh\frac{\tau + \hat{\tau}}{k}, \tag{24}$$

здесь P, $\hat{\tau}$ - постоянные интегрирования. Сумма исходных уравнений (20) и (2I) дает:

$$\left[\frac{(\varkappa^2 V^2)'}{2FV}\right]' - FV ch\frac{2\tau}{k} = 0,$$

или, с учетом (23),

$$\frac{1}{2}(\varkappa^2 V^2)'' = C^2 ch\frac{2\tau}{k}. \tag{25}$$

Уравнение (20) с учетом (23) и (24) принимает вид

$$(\varkappa^2 V V')' = C^2\frac{Ge^2}{P^2k^2C^4} sh^{-2}\left(\frac{\tau+\hat{\tau}}{k}\right). \tag{26}$$

Интегрируя, получаем

$$\varkappa^2 V V' = \tilde{B} - C^2\frac{Ge^2}{P^2kC^4} cth\frac{\tau+\hat{\tau}}{k}, \quad \tilde{B} = const. \tag{27}$$

Разделим обе стороны на (24) и проинтегрируем еще раз

$$\frac{1}{2}V^2 = \tilde{N} - \frac{\tilde{B}}{P^2k} cth\frac{\tau+\hat{\tau}}{k} + C^2\frac{Ge^2}{P^4k^2C^4} cth^2\frac{\tau+\hat{\tau}}{k}, \quad \tilde{N} = const. \tag{28}$$

Тем самым система уравнений (20)-(22) решена полностью, при условии (23). Осталось уточнить значение констант интегрирования. Умножая формулу (28) на (24) и дифференцируя, получаем

$$\frac{1}{2}(\varkappa^2 V^2)'' = 2\tilde{N}P^2 ch\left(2\frac{r+\hat{r}}{k}\right) - 2sh\left(2\frac{r+\hat{r}}{k}\right) + C^2\frac{Ge^2}{P^2k^2c^4}ch\left(2\frac{r+\hat{r}}{k}\right). \quad (29)$$

Сравнивая эту формулу с (25), получаем

$$\begin{aligned} &2\tilde{N}P^2 ch 2\frac{\hat{r}}{k} - 2\frac{\tilde{B}}{k} sh 2\frac{\hat{r}}{k} + C^2\frac{Ge^2}{P^2k^2c^4} ch 2\frac{\hat{r}}{k} = C^2, \\ &2\tilde{N}P^2 sh 2\frac{\hat{r}}{k} - 2\frac{\tilde{B}}{k} ch 2\frac{\hat{r}}{k} + C^2\frac{Ge^2}{P^2k^2c^4} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} &2\tilde{N}P^2 = C^2 ch 2\frac{\hat{r}}{k} - C^2\frac{Ge^2}{P^2k^2c^4}, \\ &2\frac{\tilde{B}}{k} = C^2 sh\frac{\hat{r}}{k}, \end{aligned} \quad (31)$$

тем самым избавляясь от двух констант. Подставляя эти значения в (28), получаем

$$\begin{aligned} P^2V^2(r) &= C^2 ch 2\frac{\hat{r}}{k} - C^2 sh 2\frac{\hat{r}}{k} cth\frac{r+\hat{r}}{k} + C^2\frac{Ge^2}{P^2k^2c^4} sh^{-2}\frac{r+\hat{r}}{k} = \\ &= C^2\frac{sh\frac{r-\hat{r}}{k}}{sh\frac{r+\hat{r}}{k}} + C^2\frac{Ge^2}{P^2k^2c^4} sh^{-2}\left(\frac{r+\hat{r}}{k}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

Остальные константы находятся /2/ из принципов соответствия. При $k \to \infty$ метрика должна приближаться к I+3-Лобачевский

$$ds^2 \to (c\,dt)^2 - k^2\left[\left(\frac{dr}{k}\right)^2 + sh^2\frac{r}{k}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right], \quad (33)$$

отсюда получаем $C = 1,\ P = exp\left(-\frac{\hat{r}}{k}\right)$. Соответствие с теорией тяготения И.Ньютона приводит к выражению для константы $\hat{r}$

$$\frac{1}{2} sh 2\frac{\hat{r}}{k} = \frac{Gm}{kc^2}, \quad (34)$$

что в пределе при $k \to \infty$ дает $\hat{r} \to r_0 \equiv \frac{Gm}{c^2}$. Итак, искомая метрика имеет вид

$$
ds^2 = V^2(r)(c\,dt)^2 - \frac{dr^2}{V^2(r)} - \mathcal{K}^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),
$$
$$
V^2(r) = \exp\frac{2\hat{r}}{k}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{r-\hat{r}}{k}}{\operatorname{sh}\frac{r+\hat{r}}{k}} + \exp 4\frac{\hat{r}}{k}\,\frac{Ge^2}{k^2c^4}\operatorname{sh}^{-2}\left(\frac{r+\hat{r}}{k}\right), \qquad (35)
$$
$$
\mathcal{K}^2(r) = \exp\left(-\frac{2\hat{r}}{k}\right) k^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{r+\hat{r}}{k}\right).
$$

"Прямоугольные декартовы" координаты $\bar{x}^1 = r\sin\theta\cos\varphi$, $\bar{x}^2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $\bar{x}^3 = r\cos\theta$, соответствующие использованным r, θ, φ, не являются гармоническими.

Переход к эйнштейновской теории с декартовым трехмерным пространством на пространственной бесконечности легко осуществляется путем $k \to \infty$, при этом получаем

$$
P \to 1, \quad \hat{r} \to r_0 \equiv \frac{Gm}{c^2}, \quad \mathcal{K}^2(r) \to (r + r_0)^2,
$$
$$
V^2(r) \to \frac{r - r_0}{r + r_0} + \frac{Ge^2}{c^4(r + r_0)^2}. \qquad (36)
$$

Таким образом, из (35) получаем известное /4/ выражение для решения Нордстрема - Рейсснера /5/ в сферических координатах, соответствующих "прямоугольным" гармоническим,

$$
ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2\rho(r)} + \frac{Ge^2}{c^4\rho^2(r)}\right)(c\,dt)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2Gm}{c^2\rho} + \frac{Ge^2}{c^4\rho^2}} - \rho^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \qquad (37)
$$
$$
\rho(r) \equiv r + r_0 \equiv r + \frac{Gm^2}{c^2},
$$

или непосредственно в гармонических ct, $\bar{x}^i$:

$$
ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2\rho(r)} + \frac{Ge^2}{c^4\rho^2(r)}\right)(c\,dt)^2 - \frac{\rho^2(r)}{r^2}\left[\delta_{ik} + \left(\frac{r^2}{\rho^2 - \frac{2Gm\rho}{c^2} + \frac{Ge^2}{c^4}} - 1\right)\frac{\bar{x}_i\bar{x}_k}{r^2}\right] \times \qquad (38)
$$
$$
\times\, dx^i dx^k.
$$

При $e \to 0$ оно переходит в известное выражение для решения Шварцшильда /3/, записанное в гармонических координатах /6/.

Вопрос о единственности решения (35) остается открытым, так как здесь получено частное решение. Подводят к сомнению в единственности также факты неединственности выражений в гармонических

координатах для случая (38) Нордстрема - Рейсснера /4/ и Шварцшильда /7/.

Приношу благодарность профессору Н.А.Черникову (ОИЯИ, Дубна) и участникам его интернационального семинара за плодотворное обсуждение.

Литература

1. Chernikov N.A. - The Gravitational Radius in the Lobachevsky Space. Preprint JINR E2-92-394, Dubna, 1992.
2. Chernikov N.A. - The Relativistic Kepler Problem in the Lobachevsky Space. Acta Phys.Polon., 1992, v.23, p.1-24; Черников Н.А. - Уравнения тяготения в пространстве Лобачевского. Сообщение ОИЯИ Р2-92-192, Дубна, 1992.

   Chernikov N.A. - The Kepler problem in the Lobachevsky Space and its Solution. Acta Phys.Polon., 1992, v.B23, N 2, p.115.
3. Schwarzschild K. - Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinischen Theorie. Sitz.preuss.Akad. Wiss., 1916, s.189.
4. Выблый Ю.П. - Поле точечного электрического заряда в релятивистской теории гравитации. В сб.:Точные решения уравнений гравитационного поля и их физическая интерпретация. (Тезисы докладов II Всесоюзного научного семинара, Тарту,1988). Тарту:изд.Тартусского госуниверситета, 1988, с.74.
5. Nordström G. - On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory. Proc.Kon.Ned.Akad.Wet., 1918, v.20, p.1238;

   Reissner H. Uber die Eigengravitation des electrischen Feldes nach der Einsteinischen Theorie. Ann.Physik, 1916, B.50, s.106.

6. Lanozos K. - Ein vereinfachendes Koordinatensystem für Einsteinischen Gravitationsgleichungen. Phys.Zeitschr., 1922, B.23, 24, s.577;
Rosen N. - General Relativity and Flat Space. Phys.Rev., 1940, v.5, 57, p.147.
7. Asanov R.A. - Schwarzschild Metric and De Donder Condition. Gen.Rel.Grav., 1989, v.21, 2, p.149.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июня 1993 года.