93-160

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-93-160

И.А.Шелаев

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА И ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА.

Уравнение Максвелла

1993

ВВЕДЕНИЕ

Расширенный принцип Гюйгенса рационально описывает скалярный потенциал движущегося заряда /1/. В данной работе определен векторный потенциал, также отвечающий принципу Гюйгенса, и тем самым получено полное решение задачи об электромагнитном поле движущегося точечного заряда. Вновь найденные поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, из которых следует, что движение точечного заряда вызывает поляризацию окружающего пространства, возбуждая в нем объемные заряды и токи. Эта поляризация является причиной, в силу которой запаздывающие потенциалы противоречат принципу Гюйгенса. Уравнения Максвелла оказываются скорее следствием принципа Гюйгенса, чем математическим описанием наблюдаемых явлений, а сам принцип позволяет найти имеющее физический смысл электромагнитное поле заряда, движущегося с любой скоростью.

Чтобы дать читателю возможность охватить всю задачу, ниже приведены (без доказательства) найденные ранее формулы /1/, затем обосновывается определение векторного потенциала и устанавливаются общие уравнения для электромагнитного поля. Вычисления магнитного поля проводников с током приведены для иллюстрации справедливости нового определения векторного потенциала.

Поле произвольно движущегося точечного заряда имеет кулоновский характер, поэтому проблема излучения им электромагнитной энергии отличается от классической.

Вызванная движением точечного заряда поляризация окружающего пространства приводит к тому, что эффективная величина движущегося заряда оказывается функцией его скорости. Такая функция найдена для точечного заряда, движущегося равномерно с любой скоростью. Предполагается, что обращение величины эффективного заряда в нуль при $\beta \geq 1$ ограничивает скорость заряженных частиц в ускорителях.

1. СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

1.1. Пусть точечный заряд e движется в однородном свободном от других зарядов и токов пространстве по траектории, заданной вектором $\mathbf{r}_c(t)$. Тогда согласно расширенному принципу Гюйгенса /1/ всякая точка траектории, пройденная зарядом в предыдущий момент времени t', в любой последующий момент времени t

$$t > t' \qquad (1i)$$

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ

является центром сферической эквипотенциальной поверхности радиуса λ

$$\lambda = c(t - t') , \tag{2i}$$

на которой скалярный потенциал Φ равен

$$\Phi = \frac{e}{\lambda} . \tag{3i}$$

Здесь c - скорость света, индексом i отмечены формулы, полученные ранее.

1.2. Если в момент времени t наблюдаемая сферическая эквипотенциальная поверхность или λ-сфера проходит через точку $\mathbf{r}$, то положение породившего ее точечного заряда или центр сферы определится вектором $\mathbf{r}_c(t') = \mathbf{r}_c(t - \lambda/c)$. Тогда уравнение λ-сферы примет вид

$$\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t) = const ,$$

где

$$\lambda = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t')| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t - \lambda/c)| . \tag{4i}$$

Разрешив это уравнение относительно неизвестной величины λ, найдем функцию $\lambda(\mathbf{r}, t)$, а с ней и скалярный потенциал $\Phi(\mathbf{r}, t)$. Уравнение (4i) имеет единственное действительное и положительное решение, если скорость заряда меньше скорости света[1].

1.3. Введем далее единичный вектор $\mathbf{l}(\mathbf{r}, t)$

$$\lambda\mathbf{l} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t - \lambda/c) . \tag{5i}$$

Тогда, полагая, что уравнение (4i) имеет единственное решение, для функций λ и $\mathbf{l}$ можно установить следующие дифференциальные уравнения[1]:

$$\left(1 - \frac{\partial\lambda}{c\partial t}\right)(1 - \bar{\beta}\mathbf{l}) = 1 , \tag{6i}$$

$$\mathrm{grad}\lambda = \mathbf{l}\left(1 - \frac{\partial\lambda}{c\partial t}\right) , \tag{7i}$$

$$\Box\lambda = \frac{2}{\lambda}\left(1 - \frac{\partial\lambda}{c\partial t}\right) , \tag{8i}$$

$$\frac{\partial\mathbf{l}}{c\partial t} = \mathbf{l}\times\mathbf{b} , \tag{9i}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{l} = \mathbf{b} , \tag{10i}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{l} = \frac{2}{\lambda} , \tag{11i}$$

$$\Box\mathbf{l} = -\frac{2}{\lambda^2}\mathbf{l} . \tag{12i}$$

Здесь

$$\bar{\beta} = \mathbf{v}/c ,$$

$\mathbf{v}$ - вектор скорости заряда, взятый в момент $t' = t - \lambda/c$, $\Box$ - оператор Д'Аламбера, а вектор $\mathbf{b}$ равен

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{l}\times\bar{\beta}}{\lambda}\left(1 - \frac{\partial\lambda}{c\partial t}\right) . \tag{13i}$$

Векторы $\mathbf{l}$, $\partial\mathbf{l}/c\partial t$ и $\mathbf{b}$ образуют взаимно ортогональную тройку векторов.

1.4. Исходя из приведенных выше уравнений, для скалярного потенциала Φ находим уравнение

$$\Box\Phi = \frac{\partial\sigma}{c\partial t} , \tag{14i}$$

где

$$\sigma = \frac{e}{\lambda^2} . \tag{15i}$$

Согласно расширенному принципу Гюйгенса скалярный потенциал движущегося точечного заряда удовлетворяет волновому уравнению с не равной нулю правой частью. Напротив, в электродинамике Лоренца, основанной на запаздывающих потенциалах, в уравнении (14i) справа должен быть нуль.

2. *ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ*

2.1. Электромагнитное поле, как известно, определяется скалярным и векторным потенциалами. Векторный потенциал должен удовлетворять следующим общим требованиям:

- оставаться постоянным (в векторном смысле) на той же эквипотенциальной поверхности, что и скалярный, т. е. на λ-сфере;
- его направление совпадает с направлением распространения данной эквипотенциальной поверхности;
- на больших расстояниях от движущегося заряда векторный потенциал обращается в нуль-вектор.

Перечисленным требованиям удовлетворяет вектор $\mathbf{A}$

$$A = \frac{e}{\lambda} l \ , \qquad (1)$$

где единичный вектор l задан уравнением (5i). Если определение (3i) содержит информацию о расстоянии, пройденном λ-сферой, или о ее возрасте, то определение (1) содержит информацию о направлении движения λ-сферы, чем, по-видимому, исчерпывается математическая формулировка расширенного принципа Гюйгенса.

Заметим, что скалярный и векторный потенциалы соотносятся как расстояние до некоторой точки и ее радиус-вектор, поэтому между A и Φ для точечного заряда выполняется равенство

$$A^2 = \Phi^2 \ ,$$

если уравнение (4i) имеет единственное решение.

2.2. Для векторного потенциала A, пользуясь формулами (7i) и (11i), находим

$$\mathrm{div}A = \frac{e}{\lambda^2}\left(1 + \frac{\partial\lambda}{c\partial t}\right) .$$

Тогда условие нормировки Лоренца для потенциалов имеет вид

$$\mathrm{div}A + \frac{\partial\Phi}{c\partial t} = \sigma \ , \qquad (2)$$

где σ определено в (15i).

2.3. Пользуясь уравнениями (2, 8i, 12i) и произведя некоторые вычисления, для векторного потенциала A найдем следующее уравнение второго порядка

$$\Box A = \mathrm{grad}\sigma + 2\frac{\partial(\bar{\sigma})}{c\partial t} \ , \qquad (3)$$

где

$$\bar{\sigma} = \sigma l \ . \qquad (4)$$

3. *ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА*

3.1. Если скалярный и векторный потенциалы заданы как функции координат точки наблюдения r и времени t, то согласно принятым определениям электрическое поле e и магнитное h равны

$$e = -\ \mathrm{grad}\Phi - \frac{\partial A}{c\partial t} \ , \qquad (5)$$

$$h = \mathrm{rot}A \ . \qquad (6)$$

Известно, что два уравнения Максвелла уже содержатся в этих определениях независимо от того, как заданы потенциалы.

3.2. Так, из (5) находим уравнение

$$\mathrm{rot}e = -\ \mathrm{rotgrad}\Phi - \frac{\partial(\mathrm{rot}A)}{c\partial t} = -\frac{\partial h}{c\partial t} \ ,$$

или

$$\mathrm{rot}e = -\frac{\partial h}{c\partial t} \ , \qquad (1m)$$

выражающее закон *электромагнитной индукции*. Индексом m отмечены формулы классической электродинамики.

3.3. Из определения (6) следует

$$\mathrm{div}h = 0 \ , \qquad (4m)$$

или *теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля*.

3.4. Образуем rot выражения (6):

$$\mathrm{roth} = \mathrm{rotrot}A = \mathrm{graddiv}A - \Delta A \ ,$$

где Δ - дифференциальный оператор Лапласа. Воспользовавшись выражением (2), в последнем выражении преобразуем первый член справа

$$\mathrm{graddiv}A = \nabla\left(\sigma - \frac{\partial\Phi}{c\partial t}\right) = \frac{\partial}{c\partial t}\left(-\ \nabla\Phi - \frac{\partial A}{c\partial t}\right) + \nabla\sigma + \frac{\partial^2 A}{c^2\partial t^2} .$$

Тогда, возвращаясь к предыдущему выражению, находим

$$\mathrm{roth} = \frac{\partial e}{c\partial t} + \nabla\sigma - \Box A \ .$$

Учитывая уравнение (3), получаем

$$\mathrm{roth} = \frac{\partial e}{c\partial t} - 2\frac{\partial(\bar{\sigma})}{c\partial t} .$$

Формально последнее выражение можно переписать как

$$\mathrm{roth} = \frac{\partial e}{c\partial t} + \frac{4\pi}{c} j \ , \qquad (2m)$$

если под плотностью тока j понимать величину

$$j = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial(\bar{\sigma})}{\partial t} . \qquad (7)$$

Уравнение (2m) есть, очевидно, *обобщенный закон полного тока Максвелла*.

3.5. Образуем div выражения (5) и вновь воспользуемся выражением (2):

$$\mathrm{div}\mathbf{e} = -\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\Phi - \frac{\partial}{c\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A} = -\Box\Phi - \frac{\partial\sigma}{c\partial t}.$$

Подставляя сюда $\Box\Phi$ из (14i), находим

$$\mathrm{div}\mathbf{e} = -2\frac{\partial\sigma}{c\partial t}.$$

Это выражение запишем в виде

$$\mathrm{div}\mathbf{e} = 4\pi\rho\ , \tag{3m}$$

где под объемной плотностью заряда ρ условимся понимать величину

$$\rho = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\sigma}{c\partial t}. \tag{8}$$

Уравнение (3m) есть, очевидно, *теорема Остроградского-Гаусса для электрического поля.*

3.6. Прямым дифференцированием определений (4, 15i) с использованием формул (7i, 11i) нетрудно установить, что функции σ и $\bar\sigma$ удовлетворяют уравнению

$$\mathrm{div}\bar\sigma + \frac{\partial\sigma}{c\partial t} = 0\ .$$

Продифференцировав последнее уравнение частным образом по t, найдем в соответствии с определениями (7, 8) для $\mathbf{j}$ и ρ соотношение

$$\mathrm{div}\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0\ , \tag{5m}$$

называемое обычно законом *сохранения электрических зарядов.*

3.7. Определения (7, 8) позволяют переписать уравнения (3) и (14i) в следующем виде

$$\Box\mathbf{A} = \nabla\sigma - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\ , \tag{3a}$$

$$\Box\Phi = -2\pi\rho\ . \tag{14a}$$

Эти уравнения не имеют присущего им в электродинамике симметричного вида. В то же время известно, что электромагнитное поле не изменится, если вместо потенциалов Φ и $\mathbf{A}$ ввести новые Φ' и $\mathbf{A}'$

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial\psi}{c\partial t}\ , \tag{9}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\psi\ , \tag{10}$$

где ψ - произвольная скалярная функция координат точки наблюдения

поля и времени. Эта функция может быть выбрана так, чтобы для новых потенциалов калибровочное условие (2) обращалось в нуль

$$\mathrm{div}\mathbf{A}' + \frac{\partial\Phi'}{c\partial t} = 0\ . \tag{6m}$$

Отсюда получаем непосредственно

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{\partial\Phi}{c\partial t} - \Box\psi = \sigma - \Box\psi = 0\ ,$$

или

$$\Box\psi = \sigma\ . \tag{11}$$

Введение функции ψ позволяет придать уравнениям (3a, 14a) симметричный вид. Так, если Φ из (9) подставить в (14a), то с учетом (11) находим

$$\Box\Phi' = -4\pi\rho\ , \tag{7m}$$

где ρ определено в (8). Аналогично выражения (10, 11) позволяют переписать уравнение (3a) в виде

$$\Box\mathbf{A}' = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\ , \tag{8m}$$

где $\mathbf{j}$ задано выражением (7).

3.9. Таким образом, выбранные выше определения скалярного (3i) и векторного (1) потенциалов, основанные на расширенном принципе Гюйгенса, и классические определения полей (5) и (6) приводят к полной системе уравнений Максвелла (1m - 8m). Исходя из них можно установить следующие дифференциальные уравнения второго порядка для электрического и магнитного полей:

$$\Box\mathbf{e} = 4\pi\left(\mathrm{grad}\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}\right)\ , \tag{9m}$$

$$\Box\mathbf{h} = -\frac{4\pi}{c}\mathrm{rot}\mathbf{j}\ . \tag{10m}$$

Полученная система уравнений (1m - 5m) отличается от обычно используемой для описания поля точечного заряда тем, что в уравнения полей следует включить индуцированные токи (7) и заряды (8), отличные от нуля при любой неравной нулю скорости заряда.

В изложенной формулировке уравнения Максвелла предстают как математическое следствие расширенного принципа Гюйгенса.

4. *ПОЛЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА*

4.1. Для отыскания поля движущегося заряда необходимо найти решение уравнения (4i), т.е. функцию $\lambda(\mathbf{r}, t)$, а затем единичный вектор $\mathbf{l}(\mathbf{r}, t)$, после чего дифференцированием находятся электрическое и магнитное поля. Выполнить эту процедуру можно лишь в двух случаях: при общем анализе полей, когда уравнение (4i) рассматривается как неявное задание функции λ, и при равномерном и прямолинейном движении заряда, допускающем точное решение уравнения (4i).

Начнем с первого случая, предполагая известными функции λ, $\mathbf{l}$. Тогда электрическое поле точечного заряда равно

$$\mathbf{e} = \frac{e}{\lambda^2}\mathbf{l} - \frac{e}{\lambda}\mathbf{l}\times\mathbf{b} = \frac{e}{\lambda^2}\mathbf{l} - \frac{e}{\lambda}\frac{\partial\mathbf{l}}{c\partial t}, \tag{12}$$

а магнитное поле имеет величину

$$\mathbf{h} = \frac{e}{\lambda}\mathbf{b}. \tag{13}$$

4.2. Согласно выражению (12) электрическое поле имеет две компоненты: нормальную к λ-сфере e_1

$$e_1 = \frac{e}{\lambda^2}$$

и касательную к той же сфере e_t (векторы $\mathbf{l}$, $\partial\mathbf{l}/c\partial t$ и $\mathbf{b}$ взаимно ортогональны, см. выше)

$$e_t = \frac{e}{\lambda}\left|\frac{\partial\mathbf{l}}{c\partial t}\right|,$$

лежащую согласно выражениям (9i, 13i) в плоскости векторов $\mathbf{l}$ и $\bar{\beta}$. Видно, что нормальная компонента электрического поля движущегося точечного заряда такова, как если бы заряд оставался неподвижным в центре λ-сферы.

4.3. Сравнивая (12) с (13), видим, что всегда выполняется равенство

$$\mathbf{eh} = 0, \tag{14}$$

т.е. электрическое и магнитное поля всегда ортогональны между собой.

Далее, из ортогональности векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{b}$ и единичности вектора $\mathbf{l}$ следует равенство $|\mathbf{l}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{b}|$, поэтому магнитное поле всегда равно тангенциальной составляющей электрического поля и ортогонально ей. Следовательно, электромагнитное поле произвольно движущегося заряда таково, что нормальная к λ-сфере компонента электрического поля по величине и направлению всегда равна полю такого же неподвижного заряда, если бы последний находился в центре соответствующей эквипотенциальной сферы. Иными словами, нормальная (или продольная) компонента электрического поля, как и в электростатике, определяется лишь положением заряда, но не в данный момент времени t, а в предшествующий $t' = t - \lambda/c$. Движение же заряда проявляется в том, что на λ-сфере помимо нормальной компоненты электрического поля появляются две касательные (или поперечные) к сфере компоненты - компонента электрического поля, лежащая в плоскости векторов $\mathbf{l}$ и $\bar{\beta}$, и ортогональная этой плоскости компонента магнитного поля - равные между собой и взаимно ортогональные.

4.4. Рассмотрим второй случай, когда точечный заряд e движется с постоянной скоростью v вдоль оси x. Тогда в уравнении (4i) вместо $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_c$ следует подставить

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_c(t') = (vt - \beta\lambda)\mathbf{i},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ - единичные орты декартовой системы координат. Теперь уравнения (4i) и (5i) принимают вид

$$\lambda^2 = (x_1 + \beta\lambda)^2 + y^2 + z^2, \tag{4a}$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{i}(x_1/\lambda + \beta) + \mathbf{j}y/\lambda + \mathbf{k}z/\lambda = \frac{\mathbf{r}_1}{\lambda} + \beta\mathbf{i}, \tag{5a}$$

где

$$x_1 = x - vt, \quad \mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Уравнение (4a) имеет следующие действительные и положительные корни/1/:

$$\lambda = (R + \beta x_1)/(1 - \beta^2), \qquad \text{если } \beta < 1,$$

$$\lambda = -(x_1^2 + y^2 + z^2)/2x_1, \qquad \text{если } \beta = 1,\ x_1 < 0,$$

$$\lambda_1 = (-\beta x_1 - R)/(\beta^2 - 1), \qquad \text{если } \beta > 1,\ x_1 < 0,\ \mathrm{Im}(R) = 0,$$

$$\lambda_2 = (-\beta x_1 + R)/(\beta^2 - 1), \qquad \text{если } \beta > 1,\ x_1 < 0,\ \mathrm{Im}(R) = 0,$$

где

$$R = \sqrt{r_1^2 - \beta^2(y^2 + z^2)} = r_1\sqrt{1 - \beta^2\sin^2\vartheta}.$$

Условие однозначности λ сохраняется при $\beta \le 1$, а при $\beta > 1$ имеется два значения λ и в соответствии с (5a) - также два единичных вектора $\mathbf{l}$.

4.5. Введем сферические координаты с полярной осью, направленной вдоль оси x,

$$x_1 = r_1\cos\vartheta, \qquad y = r_1\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad z = r_1\sin\vartheta\sin\varphi.$$

Соединим между собой точку (x_1, y, z), в которой наблюдается поле в данный момент времени, точку $(x_1, 0, 0)$, занимаемую зарядом в данный момент, и точку $(x_1+\beta\lambda, 0, 0)$, в которой заряд находился в момент $t-\lambda/c$. Эти точки образуют треугольник со сторонами r_1, λ и $\beta\lambda$, противолежащие углы которого обозначим α, $\pi-\vartheta$ и γ. Углы и стороны этого треугольника согласно теореме синусов связаны между собой равенствами

$$\frac{\sin\alpha}{r_1}=\frac{\sin\vartheta}{\lambda}=\frac{\sin\gamma}{\beta\lambda}.$$

Отсюда находим

$$\sin\gamma=\beta\sin\vartheta, \quad \cos\gamma=\sqrt{1-\beta^2\sin^2\vartheta}, \quad R=r_1\cos\gamma.$$

4.6. Тогда при $\beta<1$ функция λ равна

$$\lambda=r_1/(\cos\gamma-\beta\cos\vartheta),$$

а скалярный потенциал и компоненты векторного потенциала равны

$$\Phi=\frac{e}{\lambda}=\frac{e}{r_1}(\cos\gamma-\beta\cos\vartheta), \tag{15}$$

$$A_r=\frac{e}{\lambda}\cos\gamma=\frac{e}{r_1}(\cos\gamma-\beta\cos\vartheta)\cos\gamma, \tag{16а}$$

$$A_\varphi=0, \tag{16б}$$

$$A_\vartheta=-\frac{e}{\lambda}\sin\gamma=-\frac{e}{r_1}(\cos\gamma-\beta\cos\vartheta)\sin\gamma. \tag{16в}$$

Заметим, что здесь выполняется равенство $|\mathbf{A}|=\Phi$. Пользуясь этими выражениями для потенциалов, находим, что электрическое поле $\mathbf{e}$ имеет следующие компоненты

$$e_r=\frac{e}{\lambda^2\cos\gamma}\cos2\gamma=\frac{e}{r_1^2\cos\gamma}(\cos\gamma-\beta\cos\vartheta)^2\cos2\gamma, \tag{17а}$$

$$e_\varphi=0, \tag{17б}$$

$$e_\vartheta=-\frac{e}{\lambda^2\cos\gamma}\sin2\gamma=-\frac{e}{r_1^2\cos\gamma}(\cos\gamma-\beta\cos\vartheta)^2\sin2\gamma, \tag{17в}$$

Заметим, что e_r пропорционально $\cos2\gamma=1-2\beta^2\sin^2\vartheta$ и при $\beta^2>1/2$ обращается в нуль, если ϑ вблизи $\pi/2$.

Для компонент магнитного поля $\mathbf{h}$ находим

$$h_r=0, \tag{18а}$$

$$h_\varphi=-\frac{e}{\lambda^2}\operatorname{tg}\gamma=-\frac{e}{r_1^2}(\cos\gamma-\beta\cos\vartheta)^2\operatorname{tg}\gamma, \tag{18б}$$

$$h_\vartheta=0. \tag{18в}$$

Отсюда следует, что

$$e_l=\frac{e}{\lambda^2}, \qquad e_t=-\frac{e}{\lambda^2}\operatorname{tg}\gamma, \qquad e_\varphi=0,$$

$$h_l=0, \qquad h_t=0, \qquad h_\varphi=-\frac{e}{\lambda^2}\operatorname{tg}\gamma.$$

Видно, что, как и в общем случае, нормальная к λ-сфере компонента электрического поля e_l равна e/λ^2, или полю неподвижного заряда, находившегося в точке $(x_1+\beta\lambda, 0, 0)$. Касательная же к λ-сфере компонента электрического поля e_t равна $-e_l\operatorname{tg}\gamma$ и равна единственной неравной нулю касательной компоненте магнитного поля.

4.7. При $\beta>1$ по-прежнему имеем

$$\sin\gamma=\beta\sin\vartheta.$$

Но всегда должно выполняться неравенство

$$\sin\gamma\le1,$$

поэтому должно также выполняться следующее неравенство

$$\sin\vartheta\le1/\beta.$$

Выполнение этого неравенства, равносильного условию $\operatorname{Im}(R)=0$, совместно с неравенством

$$x_1=r_1\cos\vartheta<0$$

означает, что действительные и положительные значения λ существуют лишь внутри конуса, называемого конусом Маха,

$$\sin\vartheta=1/\beta \quad \text{и} \quad \cos\vartheta=-\sqrt{\beta^2-1}/\beta, \tag{19}$$

в вершине которого в данный момент времени находится рассматриваемый заряд, а сам конус расположен позади заряда.

Внутри конуса Маха, как отмечалось, λ имеет два положительных значения, для которых легко найти:

$$\frac{\partial\lambda_1}{c\partial t} = 1 - \frac{\lambda_1}{R}\,, \qquad \frac{\partial\lambda_2}{c\partial t} = 1 + \frac{\lambda_2}{R}\,.$$

Последнее выражение позволяет говорить, что в этом случае время идет как бы в обратном направлении.

4.8. При $\beta > 1$ скалярный потенциал точечного заряда равен

$$\Phi = \frac{e}{\lambda_1} + \frac{e}{\lambda_2} = -\,2\frac{\beta e}{r_1}\cos\vartheta\,. \qquad (20)$$

Векторный потенциал находим как

$$\mathbf{A} = \frac{e}{\lambda_1}\mathbf{l}_1 + \frac{e}{\lambda_2}\mathbf{l}_2 = e\left[\mathbf{r}_1\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}\right) + \beta\mathbf{i}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right] =$$

$$= 2\frac{e}{r_1}\left[\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}(\beta^2\cos2\vartheta + 1) - \mathbf{i}\beta^2\cos\vartheta\right].$$

Отсюда получаем

$$A_r = 2\frac{e}{r_1}(1 - \beta^2\sin^2\vartheta)\,, \qquad (21а)$$

$$A_\varphi = 0\,, \qquad (21б)$$

$$A_\vartheta = 2\frac{e}{r_1}\beta^2\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,. \qquad (21в)$$

Заметим, что на границе конуса Маха ($\sin\vartheta = \beta^{-1}$) потенциалы имеют значения

$$\Phi = 2\frac{e}{r_1}\sqrt{\beta^2 - 1}\,. \qquad (20.1)$$

$$A_r = 0\,, \qquad (21а.1)$$

$$A_\varphi = 0\,, \qquad (21б.1)$$

$$A_\vartheta = 2\frac{e}{r_1}\sqrt{\beta^2 - 1}\,. \qquad (21в.1)$$

При $\beta > 1$ только на границе конуса Маха между потенциалами выполняется равенство $|\mathbf{A}| = \Phi$.

4.9. Вычисление компонент электромагнитного поля движущегося точечного заряда для случая $\beta > 1$ дает следующие результаты:

$$e_r = \frac{4\beta e}{r_1^2}(1 - 2\beta^2\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\,, \qquad (22а)$$

$$e_\varphi = 0\,, \qquad (22б)$$

$$e_\vartheta = -\,\frac{4\beta e}{r_1^2}(1 + \beta^2\cos2\vartheta)\sin\vartheta\,, \qquad (22в)$$

$$h_r = 0\,, \qquad (23а)$$

$$h_\varphi = -\,\frac{4\beta^2 e}{r_1^2}\sin\vartheta\cos\vartheta\,, \qquad (23б)$$

$$h_\vartheta = 0\,. \qquad (23в)$$

Эти поля на границе конуса Маха ($\cos\vartheta = -\sqrt{1 - \beta^{-2}}$, $\sin\vartheta = \beta^{-1}$) принимают значения:

$$e_r = 4\frac{e}{r_1^2}\sqrt{\beta^2 - 1}\,, \qquad (22а.1)$$

$$e_\varphi = 0\,, \qquad (22б.1)$$

$$e_\vartheta = -\,4\frac{e}{r_1^2}(\beta^2 - 1)\,, \qquad (22в.1)$$

$$h_r = 0\,, \qquad (23а.1)$$

$$h_\varphi = -\,4\frac{e}{r_1^2}\sqrt{\beta^2 - 1} \qquad (23б.1)$$

$$h_\vartheta = 0\,. \qquad (23в.1)$$

Видно, что компоненты электромагнитного поля, как и потенциалы, остаются конечными во всем конусе Маха, включая его границы.

4.10. Нетрудно проверить, что когда $\beta \to 1$ со стороны $\beta \le 1$, то формулы (15, 16) дают тот же результат, что и формулы (20, 21), если устремить β к единице со стороны $\beta \ge 1$, а именно

$$\Phi = -\,2\frac{e}{r_1}\cos\vartheta\,, \qquad (20.2)$$

$$A_r = 2\frac{e}{r_1}\cos^2\vartheta\,, \qquad (21а.2)$$

$$A_\varphi = 0 \,, \qquad (21б.2)$$

$$A_\vartheta = 2\frac{e}{r_1}\sin\vartheta\cos\vartheta \,. \qquad (21в.2)$$

Если вычислить соответствующие пределы для компонент электромагнитного поля, то найдем, что формулы (17, 18) и (22, 23) также имеют одинаковые пределы при $\beta \to 1$:

$$e_r = \frac{4e}{r_1^2}\cos 2\vartheta\cos\vartheta \,, \qquad (22а.2)$$

$$e_\varphi = 0 \,, \qquad (22б.2)$$

$$e_\vartheta = -\frac{4e}{r_1^2}\sin 2\vartheta\cos\vartheta \,, \qquad (22в.2)$$

$$h_r = 0 \,, \qquad (23а.2)$$

$$h_\varphi = -\frac{2e}{r_1^2}\sin 2\vartheta \,, \qquad (23б.2)$$

$$h_\vartheta = 0 \,. \qquad (23в.2)$$

Иными словами, как скалярный, так и векторный потенциалы, а с ними и электромагнитное поле описываются непрерывными функциями при изменении β от нуля до бесконечности. При этом значения потенциалов и полей, как и следовало ожидать, остаются конечными всюду, где эти величины имеют физический смысл, за исключением точки $r_1 = 0$, т. е. той точки пространства, где в данный момент времени находится точечный заряд.

4.11. Таким образом, принятое определение потенциалов точечного заряда дает рациональное описание его электромагнитного поля при любой скорости движения. Если потенциалы Φ и $\mathbf{A}$ в данный момент времени и в данной точке пространства определяются положением заряда в предшествующий момент, различный для разных точек пространства, то поля определяются как этим положением заряда, так и его скоростью в тот же предшествующий момент времени.

Для полноты доказательства справедливости принятого определения потенциалов следовало бы сравнить полученные поля точечного

заряда с наблюдаемыми на опыте, но приходится констатировать, что таких наблюдений нет. Поэтому рассмотрим простейшие системы зарядов конечных размеров, считая их состоящими из бесконечного числа точечных, поля которых суммируются согласно принципу суперпозиции.

Рассматривая системы зарядов состоящими из совокупности точечных, найдем, что для неподвижных систем электрическое поле, вычисленное согласно определению скалярного потенциала (3i), полностью совпадает с известными электростатическими полями.

Векторный потенциал (1) существенно отличается от соответствующего запаздывающего: так, потенциал (1) не равен нулю, если заряд неподвижен, а запаздывающий потенциал при этом обращается в нуль. Поэтому для доказательства справедливости принятого определения векторного потенциала вычислим электромагнитное поле ряда систем движущихся зарядов.

5. *ПОЛЕ СИСТЕМЫ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ*

5.1. Согласно (13i) магнитное поле (13) можно записать как

$$\mathbf{h} = \frac{e}{\lambda^2}\left(1 - \frac{\partial\lambda}{c\partial t}\right)\mathbf{l}\times\bar{\beta} \,. \qquad (24)$$

Предположим, что выполняются условия $|\mathbf{r}_c| \ll |\mathbf{r}|$ и $\beta \ll 1$, т. е. $\lambda \cong r$, $\mathbf{l} \cong \mathbf{r}/r$ и $\partial\lambda/c\partial t \cong 0$, тогда выражение (24) принимает вид

$$\mathbf{h} = -\frac{e}{cr^3}\mathbf{r}\times\mathbf{v} \,.$$

Но величину $e\mathbf{v}$ можно представить как

$$e\mathbf{v} = e\frac{d\mathbf{s}}{dt} = I d\mathbf{s} \,,$$

где I - ток бесконечно короткой токовой нити, а $d\mathbf{s}$ - вектор, численно равный длине нити ds и проведенный в направлении тока. Тогда магнитное поле точечного заряда равно

$$\mathbf{h} = -\frac{I}{cr^3}\mathbf{r}\times d\mathbf{s} \,. \qquad (25)$$

Очевидно, что последнее выражение отличается от *закона Био-Савара-Лапласа* лишь знаком. Тогда общепринятая форма этого закона верна лишь при $\beta \ll 1$. Напротив, выражение (24) следует считать точной формулировкой закона Био-Савара-Лапласа при любом значении β.

5.2. Найдем магнитное поле бесконечной прямой нити, равномерно заряженной удельным зарядом e' на единицу длины и движущейся с постоянной скоростью $v = \beta c$ вдоль оси x, т.е. прямого проводника с током. Каждая точка такой нити задается вектором $\mathbf{r}_c = (\xi + vt)\mathbf{i}$ и имеет точечный заряд $de = e'd\xi$, магнитное поле которого dh_φ определяется формулами (18, 23). При интегрировании используем координаты

$$r_1 = \rho/\sin\vartheta \ , \quad x - \xi - vt = \rho\,\mathrm{ctg}\,\vartheta \ , \quad d\xi = \rho d\vartheta/\sin^2\vartheta \ ,$$

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2} \ .$$

Тогда при $\beta < 1$ магнитное поле нити равно с учетом выражения (18б)

$$H_\varphi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_\varphi d\xi = -\frac{\beta e'}{\rho}\int\limits_0^\pi \frac{1}{\cos\gamma}(\cos\gamma - \beta\cos\vartheta)^2 \sin\vartheta d\vartheta \ ,$$

что после интегрирования дает

$$H_\varphi = -\frac{2\beta e'}{\rho} \ .$$

Но $\beta e' = ve'/c = I/c$, где I - ток нити, поэтому окончательно поле досветовой заряженной нити имеет вид

$$H_\varphi = -\frac{2I}{c\rho} \ , \tag{26а}$$

или равно полю прямого проводника с током, но противоположно ему по направлению.

5.4. При $\beta > 1$ следует учесть, что угол ϑ изменяется в пределах от $\vartheta_1 = \pi - \mathrm{arctg}(1/\sqrt{\beta^2 - 1})$, когда координата $\xi = \rho\sqrt{\beta^2 - 1}$, до $\vartheta_2 = \pi$, когда ξ стремится к бесконечности. Тогда, интегрируя выражение (23б), найдем поле сверхсветовой заряженной нити

$$H_\varphi = -\frac{2e'}{\rho} = -\frac{2I}{c\rho\beta} \ . \tag{27а}$$

Таким образом, в терминах *ток-поле* магнитное поле прямого проводника с постоянным током постоянно при $\beta < 1$ и обратно пропорционально β, если $\beta \geq 1$. Как и в случае скалярного потенциала[1], магнитное поле проводника с током имеет физический смысл при любой скорости движения зарядов и описывается двумя различными функциями, соответствующими двум областям значений β.

5.5. Если для рассмотренной движущейся нити вычислить электрическое поле, то, опуская элементарные выкладки, найдем

$$E_\rho = \frac{2e'}{\rho} = \frac{2I}{\beta c\rho} \ , \quad \text{если } \beta < 1 \ , \text{ и} \tag{26б}$$

$$E_\rho = \frac{2\beta e'}{\rho} = \frac{2I}{c\rho} \ , \quad \text{если } \beta > 1 \ . \tag{27б}$$

Если рассматриваемую нить заменить обычным проводником, то в нем помимо движущихся зарядов с линейной плотностью e'_1 (электроны проводимости) присутствуют также неподвижные ионы с плотностью e'_2 и выполняется соотношение

$$e'_1 = -e'_2 = e' \ ,$$

т.к. проводник с током в целом нейтрален. Скорости этих зарядов равны

$$\beta_1 = \beta \ , \quad \beta_2 = 0 \ .$$

Тогда, суммируя поля этих зарядов, при $\beta < 1$ имеем

$$H_\varphi = H_{\varphi 1} + H_{\varphi 2} = \frac{2I}{c\rho} \ ,$$

$$E_\rho = E_{\rho 1} + E_{\rho 2} = 0 \ .$$

Напротив, при $\beta > 1$ находим

$$H_\varphi = \frac{2I}{\beta c\rho} \ ,$$

$$E_\rho = (\beta - 1)\frac{2I}{\beta c\rho} = (\beta - 1)H_\varphi \ .$$

Видно, что реальный проводник соответствует движению электронов с досветовой скоростью: электрическое поле в нем отсутствует.

5.6. Можно показать, что и для других систем проводников с током введенное определение векторного потенциала (1) дает значение магнитного поля, также отличающееся от справочного лишь знаком. Так, рассматривая плоскую круговую нить радиуса a с удельным зарядом e' на единицу длины, вращающуюся с угловой скоростью ω вокруг своей оси, находим, что для точечного заряда $de = e'ad\varphi$ величина λ определяется уравнением

$$\lambda^2 = r^2 - 2ar\sin\vartheta\cos(\varphi - \omega t + \omega\lambda/c) + a^2 \ , \tag{4б}$$

где r, ϑ, φ - сферические координаты точки наблюдения поля. Пользуясь формулой (24) и проведя несложные вычисления, найдем, что магнитное поле dh_z точечного заряда de имеет величину

$$dh_z = -\beta e'a^2 d\varphi/\sqrt{r^2 + a^2}^3$$

на оси вращающейся нити. Полагая $\varphi = 0 \div 2\pi$ и интегрируя, находим

$$H_z = -2\pi\beta e' a^2/\sqrt{r^2 + a^2}^{\,3}.$$

Последнее выражение можно записать в стандартном виде:

$$\mathbf{H} = -2\mathbf{p}_m/\sqrt{r^2 + a^2}^{\,3}, \tag{28}$$

где вектор

$$\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}/c$$

есть магнитный момент плоского кругового проводника с током I; $\mathbf{S}$ - вектор, численно равный площади, охватываемой проводником, и направленный по нормали к плоскости контура.

На оси рассматриваемой круговой нити $\sin\vartheta = 0$ и λ из (4б) остается однозначной при любой скорости вращения, поэтому формула (28) справедлива как в досветовом, так и в сверхсветовом случаях.

5.7. Выражения (26 - 28) показывают, что в интегрируемых случаях магнитное поле проводника с током, вычисленное согласно определению векторного потенциала (1), совпадает с измеряемым на опыте по величине и противоположно по знаку. Возможно, что это отличие знака связано с условностью принятого направления магнитного поля, тогда принцип Гюйгенса позволяет установить не только величину, но и *действительное* направление магнитного поля.

Отметим, что характерная для точечного заряда поляризация окружающего пространства в рассмотренных системах зарядов исчезает, очевидно, за счет взаимной нейтрализации.

6. *ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ ТОЧЕЧНЫМ ЗАРЯДОМ*

6.1. Из выражений (12) и (13) после несложных преобразований находим вектор Умова-Пойнтинга $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{e}\times\mathbf{h} = \frac{ce^2}{4\pi\lambda^3}\mathbf{l}\times\mathbf{b} + \frac{ce^2}{4\pi\lambda^2}b^2\mathbf{l}. \tag{29}$$

Подставим сюда вектор $\mathbf{b}$ из (13i), тогда

$$\mathbf{p} = \frac{ce^2}{4\pi\lambda^4}\left[\left((1-\lambda')^2\beta^2 - \lambda'(1+\lambda')\right)\mathbf{l} - \bar{\beta}(1-\lambda')\right], \tag{30}$$

где

$$\lambda' = \frac{\partial\lambda}{c\partial t}.$$

6.2. Мощность излучения точечного заряда определяется как интеграл по сфере достаточно большого радиуса r нормальной к сфере компоненты вектора $\mathbf{p}$. Если предположить, что траектория заряда ограничена, т.е. $r_c \le r_m$, и точка наблюдения поля находится достаточно далеко, т.е. $r \gg r_m$, то $\lambda \cong r$ и согласно выражению (30) излучение заряда всегда равно нулю при больших r, т.к. вектор $\mathbf{p}$ пропорционален r^{-4}. Иными словами, распределение собственного электромагнитного поля точечного заряда таково, что в нем отсутствуют так называемые волновые поля, пропорциональные r^{-1} и уносящие электромагнитную энергию на сколь угодно большие расстояния от заряда.

Этот вывод диаметрально отличается от классического, где вектор $\mathbf{p}$ при достаточно больших r (в волновой зоне) пропорционален r^{-2} и квадрату ускорения точечного заряда. С другой стороны, излучение электромагнитной энергии характерно для движущихся зарядов, поэтому обсудим возможное предположение о том, как это происходит.

6.3. Обратимся к уравнениям (9m), (10m), которые в общем случае (при разделении переменных) сводятся к так называемой задаче Штурма-Лиувилля[3] для функции $y(x)$:

$$[py']' - qy + L\rho y = f,$$

где p, q, ρ, f - заданные функции x, L - параметр. При фиксированном значении параметра L справедливо следующее: либо неоднородная задача ($f(x)$ <> 0) имеет решение для любых $f(x)$, и тогда это решение единственно, а соответствующая однородная задача ($f(x) \equiv 0$) имеет лишь тривиальное (тождественно равное нулю) решение, либо соответствующая однородная задача имеет нетривиальные (отличные от нуля) решения и тогда неоднородная задача имеет решения не для всех правых частей, а в случае существования решения оно не определяется однозначно. Те значения параметра L, при которых имеет место второй случай, называются *собственными значениями*, а соответствующие нетривиальные решения - *собственными функциями*.

Отсюда следует, что помимо гюйгенсовых полей $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ точечного заряда при некоторых условиях допустимо существование "волновых" полей $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{h}_v$, удовлетворяющих уравнениям (9m), (10m) с равной нулю правой частью. Эти допустимые волновые поля могут возбуждаться полями точечного заряда и уносить часть его энергии на сколь угодно большое расстояние. Но это уже будут другие поля, поля излучения, а не поля точечного заряда. Если мы считаем электрон (излучатель) и фотон (излучение) различными частицами, то трудно согласиться с тем, что поле фотона есть всего лишь волновая часть поля электрона, как это следует из теории запаздывающих потенциалов. Из принципа же Гюйгенса следует, что электромагнитное поле электрона всегда имеет кулоновский характер, т. е. векторы **e** и **h** по абсолютной величине всегда пропорциональны r^{-2} на больших расстояниях r от электрона. В то же время не исключается существование волновых полей, пропорциональных, разумеется, r^{-1}.

В этом смысле излучение электромагнитной энергии представляется как своеобразный резонанс между полем точечного заряда и одним из возможных видов волнового поля, допускаемым уравнениями (9m), (10m). Хотя формулировка соответствующих условий выходит за рамки данной работы, можно предположить, что вблизи движущегося точечного заряда возбуждаемое волновое поле, содержащее поперечные компоненты, пропорционально соответствующим компонентам поля точечного заряда, а, следовательно, и его скорости (при $\beta \ll 1$). Тогда уносимая волновыми полями энергия окажется пропорциональной кинетической энергии движущегося заряда, а не квадрату его ускорения, как принято сейчас.

Два последних предположения - излучение рассматривается как своеобразный резонанс и излучаемая энергия пропорциональна кинетической энергии заряда - довольно близки постулатам Бора.

7. ЭФФЕКТИВНАЯ ВЕЛИЧИНА ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

7.1. Появление в окружающем движущийся точечный заряд пространстве индуцированных зарядов и токов вызывает своеобразное экранирование последнего, в силу чего изменяется его эффективная величина. Для ее определения воспользуемся уравнением (3m) и под эффективной величиной e движущегося заряда условимся понимать величину, следующую из теоремы Остроградского-Гаусса,

$$e = \frac{1}{4\pi}\int_S e dS , \tag{31}$$

где интеграл берется по замкнутой поверхности S, окружающей заряд в данный момент времени.

7.2. Рассмотрим точечный заряд e_o, движущийся с постоянной скоростью вдоль оси x, и в качестве замкнутой поверхности S выберем сферу радиуса r_1, в центре которой находится рассматриваемый заряд в данный момент времени. Бесконечно малый элемент поверхности dS этой сферы в введенных выше сферических координатах имеет вид

$$dS = r_1^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi .$$

Радиальная компонента электрического поля рассматриваемого заряда определена выражением (17а) при $\beta < 1$ и (22а) - при $\beta > 1$. Видно, что e_r не зависит от угла φ, поэтому можно считать

$$dS = - 2\pi r_1^2 d(\cos\vartheta),$$

что после подстановки в выражение (31) и интегрирования по ϑ (в пределах от $\vartheta_1 = 0$ до $\vartheta_2 = \pi$) дает следующую эффективную величину движущегося заряда при $\beta < 1$:

$$e = \frac{e_o}{2}(1 - \beta^2)(1 + \frac{1 - \beta^2}{\beta}\mathrm{Arth}\beta) . \tag{32}$$

Очевидно, что интеграл (31) по λ-сфере всегда равен e_o, но в центре λ-сферы нет заряда в момент t.

7.3. Если $\beta > 1$, то суммарная величина (здесь λ имеет два значения) r-компоненты электрического поля равна

$$e_r = \frac{4\beta e_o}{r_1^2}\left[1 - 2\beta^2\sin^2\vartheta\right]\cos\vartheta .$$

Интегрируя это выражение в пределах от $\vartheta_1 = \pi - \mathrm{arctg}(1/\sqrt{\beta^2 - 1})$ до $\vartheta_2 = \pi$, находим, что при $\beta > 1$

$$e = 0 . \tag{33}$$

Из выражения (32) находим, что если $\beta \to 1$ со стороны $\beta < 1$, то $e \to 0$. Отсюда заключаем, что эффективная величина движущегося равномерно и прямолинейно заряда, как и электромагнитное поле, описывается непрерывной функцией β, и при $\beta \geq 1$ эта функция тождественно равна нулю.

7.4. В специальной теории относительности считается, что для движущегося точечного заряда

$$e = e(\beta) = e_o ,$$

$$m = m(\beta) = m_o/\sqrt{1 - \beta^2} ,$$

а m_o и e_o суть постоянные. Тогда очевидно

$$\frac{e}{m} = \frac{e_o}{m_o}\sqrt{1 - \beta^2} , \tag{34}$$

и $e/m \to 0$, если $\beta \to 1$.

Согласно же формуле (32) $e/e_o \to 0$, когда β приближается к 1 за счет возбуждения зарядов в окружающем движущийся заряд пространстве. Покажем, что согласно принципу Гюйгенса масса движущегося заряда остается конечной.

7.5. Если для покоящейся частицы ее масса m_o, заряд e_o и классический радиус a связаны соотношением

$$m_o c^2 = e_o^2/a \ ,$$

то очевидно, что здесь справа стоит полная электромагнитная энергия неподвижной сферы радиуса a, равномерно заряженной по поверхности. Массу движущейся частицы m определим тогда как

$$mc^2 = W \ ,$$

где W - полная электромагнитная энергия

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_V (\mathbf{e}^2 + \mathbf{h}^2)dv + \frac{1}{2}\int \Phi dq$$

движущейся сферы; dq - элемент заряда на ней.

Скалярный потенциал (3i) равномерно заряженной по поверхности диэлектрической сферы остается конечным при любой скорости ее равномерного и прямолинейного движения/2/. Таким же будет и ее векторный потенциал (1).

В самом деле, скалярный потенциал Φ заряженной сферы находился интегрированием потенциалов $d\Phi$ точечных зарядов dq, находящихся на ее поверхности, т.е.

$$\Phi = \int d\Phi \ , \qquad d\Phi = \frac{dq}{\lambda} \ ,$$

где интеграл брался по всей "видимой" поверхности сферы/2/.

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ определится тогда как аналогичный интеграл потенциалов $d\mathbf{A}$ точечных зарядов

$$\mathbf{A} = \int d\mathbf{A} \ , \qquad d\mathbf{A} = \frac{dq}{\lambda}\mathbf{1} \ .$$

Но согласно определению (1) вектор $d\mathbf{A}$ можно представить как

$$d\mathbf{A} = (\mathbf{i}\cos\alpha_x + \mathbf{j}\cos\alpha_y + \mathbf{k}\cos\alpha_z)d\Phi \ ,$$

где α_x, α_y и α_z - соответствующие углы между вектором $d\mathbf{A}$ и осями координат. При этом всегда выполняется равенство

$$\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1 \ .$$

Отсюда заключаем, что любая компонента вектора $\mathbf{A}$, например A_x, удовлетворяет следующему неравенству

$$A_x = \int dA_x = \int \cos\alpha_x d\Phi \le \int d\Phi \ ,$$

т.е.

$$A_x \le \Phi \ .$$

Следовательно, из конечности скалярного потенциала Φ движущейся заряженной сферы с очевидностью следует конечность векторного потенциала $\mathbf{A}$, а следовательно, и полей $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$ такой сферы. Поэтому полная энергия W равномерно заряженной сферы радиуса a остается конечной при любой величине β. Но тогда при $\beta \to 1$ масса m также остается конечной величиной, а с ней и отношение e_o/m.

Напротив, с учетом зависимости $e(\beta)$ отношение e/m даже при конечном значении m обратится в нуль, когда β приближается к 1.

7.6. Таким образом, расширенный принцип Гюйгенса дает другое объяснение наблюдаемому в ускорителях высоких энергий обращению в нуль отношения e/m: движущийся монопольный заряд по мере роста его скорости оказывается все более похожим на дипольный и все менее управляемым внешними электромагнитными полями, хотя полная энергия заряда остается конечной.

Возможно, что последующий анализ позволит найти конфигурацию внешних полей, обеспечивающую ускорение зарядов с $\beta > 1$.

8. *ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ЛОРЕНЦА ИЛИ ГЮЙГЕНСА?*

Изложенное выше позволяет говорить о двух электродинамиках: электродинамике Лоренца, исходящей из запаздывающих потенциалов, и электродинамике Гюйгенса, основанной на потенциалах (3i) и (1).

В таблице 1 сведены основные уравнения этих двух электродинамик, показывающие их сходство и различия.

Исходными уравнениями той и другой являются уравнения (2i) и (4i), но определения потенциалов оказываются различными. Если в электродинамике Гюйгенса потенциалы определяются только положением точечного заряда в момент времени $t - \lambda(\mathbf{r}, t)/c$, т.е. функцией λ, и имеют общую эквипотенциальную поверхность, то в лоренцевой формулировке потенциалы определяются функцией λ и ее частными производными по времени, а направление вектора $\mathbf{A}$ не остается постоянным на поверхности Φ = const.

Из четырех уравнений Максвелла два уравнения совпадают, а два других различны лишь в том, что *предполагается*, но, на мой взгляд, *не имеет* экспериментальной проверки. В электродинамике Лоренца для точечного заряда принимается, что условия

$$\rho = 0\,, \tag{35}$$

$$\mathbf{j} = 0 \tag{36}$$

выполняются всюду за исключением точки пространства, занятой то-

Таблица 1

<table>
<tr><th>Электродинамика Лоренца</th><th>Электродинамика Гюйгенса</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\vec{\lambda} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t - \lambda/c)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$|\mathbf{l}| = 1$</td></tr>
<tr><td>$\Phi = \dfrac{e}{\lambda}\left(1 - \dfrac{\partial\lambda}{c\partial t}\right)$
$\mathbf{A} = \dfrac{\bar{\beta} e}{\lambda}\left(1 - \dfrac{\partial\lambda}{c\partial t}\right)$</td><td>$\Phi = \dfrac{e}{\lambda}$
$\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{l}e}{\lambda}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{e} = -\,\mathrm{grad}\Phi - \dfrac{\partial\mathbf{A}}{c\partial t}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{h} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{rot}\mathbf{e} = -\dfrac{\partial\mathbf{h}}{c\partial t}$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{rot}\mathbf{h} = \dfrac{\partial\mathbf{e}}{c\partial t}$
$\mathrm{div}\mathbf{e} = 0$</td><td>$\mathrm{rot}\mathbf{h} = \dfrac{\partial\mathbf{e}}{c\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}$
$\mathrm{div}\mathbf{e} = 4\pi\rho$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{div}\mathbf{h} = 0$</td></tr>
<tr><td>$\rho = 0$
$\mathbf{j} = 0$</td><td>$\rho = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial\sigma}{c\partial t}, \quad \sigma = \dfrac{e}{\lambda^2}$
$\mathbf{j} = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial\bar{\sigma}}{c\partial t}, \quad \bar{\sigma} = \sigma\mathbf{l}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{div}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$</td></tr>
</table>

чечным зарядом в данный момент. Из электродинамики Гюйгенса следует, что эти условия выполняются только для покоящегося точечного заряда, его же движение вызывает поляризацию пространства, разрушающую условия (35, 36), и экранирование самого заряда.

Возможно, прямая экспериментальная проверка условий (35, 36) позволит ответить на вопрос, вынесенный в название этого параграфа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расширенный принцип Гюйгенса позволил "разделить" движение точечного заряда и создаваемого им поля: заряд движется произвольно, а движение каждой отдельной эквипотенциальной поверхности сводится к ее равномерному расширению относительно единственной точки пространства - центра эквипотенциальной сферы, находящегося на траектории заряда в момент образования сферы. Разумеется, поле заряда состоит из множества таких сфер. Распределение центров сфер в пространстве задается траекторией заряда, но установившееся распределение поля далее движется как единое целое со скоростью заряда. По-видимому, верно и обратное: центры множества эквипотенциальных сфер образуют траекторию, пройденную точечным зарядом к моменту наблюдения поля.

Определение векторного потенциала (1) задает непротиворечащее опыту магнитное поле систем движущихся зарядов. Совместно же с определением (3i) оно полностью определяет электромагнитное поле движущегося заряда. Более того, такое поле удовлетворяет всем уравнениям Максвелла и имеет физический смысл при любой скорости заряда. Уравнения Максвелла можно рассматривать как математическое следствие расширенного принципа Гюйгенса. Из них следует, что движение точечного заряда сопровождается поляризацией окружающего пространства - появлением объемной плотности заряда (8) и плотности тока (7). Эта поляризация экранирует движущийся точечный заряд, эффективная величина которого при $\beta \geq 1$ оказывается равной нулю. Последний результат дает иное, чем специальная теория относительности, объяснение причины ограниченности скорости заряженных частиц величиной $\beta < 1$ в современных ускорителях.

Принцип Гюйгенса заставляет по-иному рассматривать проблему излучения электромагнитной энергии, т.к. отвечающее этому принципу собственное поле движущегося точечного заряда всегда оказывается кулоновским, не содержащим волновых компонент. Для понимания же природы излучения нужны дополнительные предположения.

В оправдание приводимых здесь предположений сошлемся на Х.Гюйгенса: "Доказательства, приводимые в этом трактате, отнюдь не обладают той же достоверностью, как геометрические доказательства, и даже весьма сильно от них отличаются, так как в то время как геометры доказывают свои предложения с помощью достоверных и неоспоримых принципов, в данном случае принципы подтверждаются с помощью выводимых из них выводов; природа изучаемого вопроса не допускает, чтобы это происходило иначе. Все же при этом можно достигнуть такой степени правдоподобия, которая часто вовсе не уступает полной очевидности. Это случается именно тогда, когда вещи, доказанные с помощью этих предполагаемых принципов, совершенно согласуются с явлениями, обнаруживаемыми на опыте, особенно, когда таких опытов много и - что еще важнее - главным образом, когда открываются и предвидятся новые явления, вытекающие из применяемых гипотез, и оказывается, что успех опыта в этом отношении соответствует нашему ожиданию" /4/.

Возникший в начале этого века известный кризис классической физики до сих пор не получил соответствующего разъяснения. Анализ этой ситуации показывает, что наибольшее расхождение между классической теорией и экспериментом связано именно с описанием электромагнитного поля точечного заряда, основанным на запаздывающих потенциалах. Напротив, выбор потенциалов в соответствии с расширенным принципом Гюйгенса дает возможность построить новую электродинамику, более точно отвечающую, по мнению автора, эксперименту.

Автор выражает глубокую признательность академику А.М.Балдину за предоставленную возможность выполнить эту работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.А.Шелаев. Принцип Гюйгенса и поле движущегося заряда. Точечный заряд. Сообщения ОИЯИ, Р2-90-27, Дубна, 1990.
2. И.А.Шелаев. Принцип Гюйгенса и поле движущегося заряда. Заряженная сфера. Сообщения ОИЯИ, Р2-90-30, Дубна, 1990.
3. И.Н.Бронштейн и К.А.Семендяев. Справочник по математике. М: Наука, 1964, с. 469.
4. Х.Гюйгенс. Трактат о свете. М.-Л.: Объединенное Научно-техническое изд-во НКТП СССР, 1935, с. 6.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 мая 1993 года.