СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



Р2 - 9260

Е.А.Иванов



# О $\Sigma$-МОДЕЛЯХ СПОНТАННО НАРУШЕННЫХ СИММЕТРИЙ

1975

Р2 - 9260

Е.А.Иванов

# О $\Sigma$ -МОДЕЛЯХ СПОНТАННО НАРУШЕННЫХ СИММЕТРИЙ

1. Двумя основными подходами к спонтанному нарушению симметрии являются метод нелинейных реализаций [1–4] и метод линейных $\Sigma$ - моделей [5–8].

Общая теория $\Sigma$-моделей для случая компактных групп внутренних симметрий была разработана в статьях [5–8]. Желательно обобщить эту теорию и на случай некомпактных групп - особенно в связи с поставленной в работе [9] проблемой построения $\Sigma$-моделей пространственно-временных симметрий (т.е. симметрий относительно групп, включающих подгруппу Пуанкаре).

Интересно также проследить в общем виде соответствие между $\Sigma$-моделями и нелинейными реализациями. То, что между обоими подходами к спонтанному нарушению существует тесная связь, отмечалось в работах [10–12]. Там было показано, что с помощью канонической замены в лагранжиане $\Sigma$-модели всегда можно перейти от линейно преобразующихся голдстоунов и $\Sigma$-полей к полям с нелинейным законом группового преобразования. Кроме того, для ряда частных случаев известно [10,12,13], что на уровне древесного приближения $\Sigma$-модели переходят в соответствующие нелинейные реализации при стремлении масс $\Sigma$-частиц к бесконечности. Однако общего анализа этого вопроса не проводилось.

Настоящая заметка посвящена решению перечисленных проблем.

Во втором разделе сформулированы простые условия, которым должно удовлетворять некоторое представление (унитарное или неунитарное) произвольной группы $G$, чтобы на его основе можно было реализовать спонтанное нарушение симметрии относительно группы $G$, не нарушив при этом симметрии относительно некоторой ее подгруппы H.

В третьем разделе исследуется связь между $\Sigma$-моделями внутренних симметрий и нелинейными реализациями. Приведены общие формулы, позволяющие легко выразить лагранжиан произвольной $\Sigma$ -модели через нелинейно преобразующиеся поля. В терминах нелинейно преобразующихся полей очень простыми оказываются условия "чистой" нелинейной реализации симметрии (т.е. без включения $\Sigma$ -полей). Проведен общий анализ предельных случаев, когда массы всех $\Sigma$ -полей или их части стремятся к бесконечности.

В четвертом разделе обсуждается, как обобщить на случай пространственно-временных симметрий методы, применяемые при построении $\Sigma$ -моделей внутренних симметрий. Основная трудность состоит в определении действия группы на пространственно-временных координатах. Предложено два пути решения этой трудности. Оба они требуют введения дополнительных координат, помимо 4-координаты $x_\mu$. Заметим, что до сих пор спонтанное нарушение пространственно-временных симметрий обсуждалось только в рамках нелинейных реализаций /2-4, 9,14/.

2. Пусть $G$ – некоторая группа симметрии с генераторами $Z_i\ (i=1,\dots n)$ и $V_\alpha$, причем $V_\alpha$ генерируют подгруппу $H$. Предполагается, что генераторы ортонормальны по отношению к внутреннему произведению Картана: $[Z,V]\subset Z$. Требуется построить $\Sigma$ -модель, реализующую спонтанное нарушение данной симметрии, такое, чтобы подгруппа $H$ была единственной ненарушенной подгруппой. Выясним, какие представления группы $G$ пригодны для этой цели.

Рассмотрим некоторый мультиплет эрмитовых полей $\varphi_\lambda$, преобразующийся по линейному представлению $D(g)$ группы $G$, взятому в действительной форме. Предполагается, что $D(g)$ вполне приводимо в $G$ и в $H$. Базис в пространстве $\varphi_\lambda$ выберем таким образом, чтобы диагонализовать инвариантную квадратичную форму:



$$a_{\lambda\beta}\varphi_\lambda\varphi_\beta \stackrel{def}{=} (\varphi,\varphi) = inv. \quad ^{1)} \qquad \text{(I)}$$

Действительная диагональная матрица $a$ состоит из блоков, соответствующих неприводимым по группе $G$ подпространствам в $\varphi_\lambda$. Если некоторое подпространство преобразуется по унитарному представлению, то соответствующий блок кратен единичной матрице, если же представление неунитарно, то блок кратен матрице с числами $\pm 1$ на диагонали. В представлении $D$ генераторы подчиняются соотношению

$$aZ_i = -\tilde{Z}_i a \,, \quad aV_\alpha = -\tilde{V}_\alpha a \,, \qquad (2)$$

которое следует из требования инвариантности формы (I).

Спонтанное нарушение симметрии в $\Sigma$ -моделях связано с тем, что при определенных ограничениях на затравочные параметры лагранжиана некоторые поля приобретают ненулевые вакуумные средние[2)].

---

1) Строго говоря, инвариантом является билинейная форма

$$\varphi_\lambda \bar{\varphi}_\lambda \,,$$

где поле $\bar{\varphi}_\lambda$ преобразуется по контрагредиентному представлению $\bar{D}(g)=\tilde{D}^{-1}(g)$, которое не обязательно эквивалентно $D(g)$. Однако эту форму всегда можно привести к виду (I) переходом к новым переменным $\varphi_\lambda+\bar{\varphi}_\lambda$, $\varphi_\lambda-\bar{\varphi}_\lambda$, что соответствует объединению $D(g)$ и $\bar{D}(g)$ в одно приводимое представление, которое уже эквивалентно своему контрагредиентному. Поэтому, не теряя общности, всегда можно пользоваться инвариантной формой (I).

2) К примеру, в $\Sigma$ -модели, основанной на представлении (1/2, 1/2) киральной группы $SU(2)\times SU(2)$ /15/, спонтанное нарушение до подгруппы изоспина $SU(2)$ возможно в том случае, если квадрат затравочной массы мультиплета отрицателен.

Линейная симметрия относительно подгруппы $H$ сохранится лишь в том случае, если поля с ненулевыми вакуумными средними будут инвариантами этой подгруппы. Следовательно, для реализации спонтанного нарушения до подгруппы $H$ в мультиплете $\varphi_\lambda$ должны содержаться $H$ - инварианты. Чтобы $H$ была единственной ненарушенной подгруппой теории ("малой группой вакуума"[11]), необходимо, однако, наложить на $\varphi_\lambda$ более сильное условие.

<u>I. В пространстве полей $\varphi_\lambda$ должен найтись вектор $\varphi^o_\lambda$, максимальная подгруппа инвариантности которого есть $H$.</u>

Если представление $D(g)$ унитарно, то условие I оказывается также и достаточным для построения $\Sigma$ -модели со спонтанным нарушением до подгруппы $H$. Чтобы это показать, следует проверить выполнение теоремы Голдстоуна[5] в случае, когда вектор вакуумных средних $\omega_\lambda$ отличен от нуля в направлении $\varphi^o_\lambda$

$$\omega_\lambda \sim \varphi^o_\lambda; \quad a) V_\alpha \omega = 0, \quad б) C^\kappa Z_\kappa \omega \neq 0 \tag{3}$$

($C^\kappa$ -произвольные числа). А именно, убедиться в том, что после перехода к полям $\varphi'_\lambda$ с нулевыми вакумными средними

$$\varphi'_\lambda = \varphi_\lambda - \omega_\lambda \tag{4}$$

в теории появится $n$ линейно независимых голдстоуновских полей $\Psi_i$. Голдстоуны $\Psi_i$ выделены тем, что при действии элемента группы $G$ с генераторами $Z_i$ они преобразуются неоднородно:

$$\delta_\beta \Psi_i = \beta_i + \ldots \tag{5}$$

($\beta_i$ - соответствующие групповые параметры).

Для нахождения голдстоуновских компонент мультиплета $\varphi_i$ необходимо спроецировать $\varphi_\lambda$ на набор $n$ действительных векторов $i(Z_k\omega)_\lambda$ [5-7]:

$$\varphi_\kappa = i\,(Z_k\omega, \varphi) \equiv i\, a_{\lambda\beta} Z^k_{\lambda\rho}\omega_\rho \varphi'_\beta . \tag{6}$$



Векторы $i\,(Z^k\omega)_\lambda$ и, соответственно, поля $\varphi_k$ линейно независимы, ибо в противном случае подгруппа стабильности вектора $\omega_\lambda$ была бы шире, чем $H$, что противоречило бы условию I. Используя соотношения (2), (3а), нетрудно убедиться, что в подгруппе $H$ поля $\varphi_k$ преобразуются как генераторы $Z_k$. Подчеркнем, что выполнение этих двух свойств не зависит от того, унитарно или неунитарно представление $D(g)$.

При действии генераторов $Z_k$ поля $\varphi_i$ преобразуются следующим образом:

$$\delta_\beta \varphi_k = d_{k\ell}\beta^\ell + (\omega, Z^k Z^\ell \varphi')\beta^\ell . \tag{7}$$

Здесь

$$d_{k\ell} = -(Z_k\omega, Z_\ell\omega) \tag{8}$$

- действительная симметрическая матрица. Все $n$ полей $\varphi_k$ будут голдстоунами в том и только в том случае, если они взаимнооднозначно связаны с полями $\Psi_k$, обладающими каноническими трансформационными свойствами (5). Это возможно только при условии, что матрица $d_{k\ell}$ имеет обратную. Тогда:

$$\Psi_\ell = (d^{-1})_{\ell m}\varphi_m . \tag{9}$$

Покажем, что для унитарных представлений неособенность матрицы $d$ следует непосредственно из условия I, в то время как для неунитарных представлений это не так.

Требование неособенности матрицы $d$ эквивалентно, очевидно, предположению, что не существует ни одной линейной комбинации $C^k_o Z^k\omega$, ортогональной всем векторам $i Z\omega$ (отсутствие линейных зависимостей между строками матрицы (8)). Если бы такой вектор $C^k_o Z^k\omega$ существовал, то он с необходимостью обладал бы нулевой нормой, т.е. был изотропным.

Унитарные представления действуют в пространствах с дефинитной метрикой, где из изотропности вектора следует равенство его нулю. Следовательно, в этом случае вектор $C_0^k Z^k \omega$ был бы равен нулю, что противоречит условию I, запрещающему существование таких нулевых линейных комбинаций.

В пространствах неунитарных представлений ненулевые изотропные векторы могут существовать. Чтобы матрица $d$ была неособенной и в этом случае, условие I необходимо дополнить еще одним требованием.

<u>II. В линейной оболочке векторов $iZ^\ell\omega$ не содержится ни одного ненулевого изотропного вектора, ортогонального всем векторам $iZ^\ell\omega$.</u>

Пока не ясно, каким ограничениям на структуру группы $G$ соответствует условие II. Оно было проверено автором на ряде примеров, в частности, для векторного представления псевдоортогональной группы $O(p,q)$, спонтанно нарушаемой до подгрупп а) $O(m,n)$; б) $O(m)\times O(n)$ $(m\leq p, n\leq q)$. Примера, чтобы условие II не выполнялось, не было найдено. Если таковой все же обнаружится, то это будет означать нарушение теоремы Голдстоуна. В самом деле, тогда найдется линейная комбинация $C_0^k\varphi_k$, не содержащая в своем инфинитезимальном преобразовании неоднородного члена. Таким образом, голдстоунов в теории возникнет меньше, чем имеется генераторов $Z_k$, хотя максимальной ненарушенной подгруппой теории будет $H$. Подчеркнем еще раз, что условие II является существенным только при работе с неунитарными представлениями, например, с конечномерными представлениями некомпактных групп.

Приведем теперь пример использования условия I. Пусть мы хотим построить $\Sigma$-модель, в которой киральная $SU(3)\times SU(3)$



– симметрия нарушалась бы до подгруппы изоспина и гиперзаряда $SU(2)\times Y$. Имеются два мультиплета наименьшей размерности, содержащие $SU(2)\times Y$-инварианты – $(1,8)\oplus(8,1)$ и $(3,3^*)\oplus(3^*,3)$. Легко, однако, заметить, что единственный $SU(2)\times Y$-инвариант представления $(1,8)\oplus(8,1)$ обладает более широкой максимальной стационарной подгруппой – $SU(2)\times SU(2)\times Y\times Y_5$. Поэтому на основе этого представления можно построить $\Sigma$-модель с нарушением до подгруппы $SU(2)\times SU(2)\times Y\times Y_5$, но не до $SU(2)\times Y$. В то же время из двух $SU(2)\times Y$-инвариантов мультиплета $(3,3^*)\oplus(3^*,3)$ всегда можно соорудить вектор, максимальной подгруппой стабильности которого является $SU(2)\times Y$.

Для выделения из мультиплета $\varphi_\lambda$ полей $\Sigma$-частиц удобно пользоваться формализмом проекционных операторов $P^\Psi, P^\Sigma$, введенных Вайнбергом[16]:

$$P^\Psi_{\alpha\beta} = (Z^i\omega)_\alpha (d^{-1})^{ik}(Z^k\omega)_\beta \qquad (10)$$

$$P^\Sigma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - P^\Psi_{\alpha\beta}\,. \qquad (11)$$

Легко проверяются следующие простые свойства этих операторов:

$$P^\Psi P^\Psi = P^\Psi \qquad (12)$$

$$P^\Sigma P^\Sigma = P^\Sigma \qquad (13)$$

$$P^\Sigma P^\Psi = 0$$

$$D(h)P = PD(h) \quad (h\in H)\,. \qquad (14)$$

С помощью проекционных операторов вектор $\varphi'_\lambda = \varphi_\lambda - \omega_\lambda$ разбивается на два ортогональных подпространства $\varphi^\Psi_\lambda$ и $\varphi^\Sigma_\lambda$

$$\varphi'_\lambda = \varphi^\Psi_\lambda + \varphi^\Sigma_\lambda\,,$$

где

$$\varphi^\Psi_\lambda = (P^\Psi\varphi')_\lambda = \frac{1}{i}(Z^t\omega)_\lambda \Psi^t \qquad (15)$$

$$\varphi^\Sigma_\lambda = (P^\Sigma\varphi')_\lambda = \varphi'_\lambda - \frac{1}{i}(Z^t\omega)_\lambda \Psi^t\,. \qquad (16)$$

Поле $\varphi_\lambda^\Psi$ имеет $n$ независимых компонент $\Psi_i$ и описывает голдстоуновские частицы. Поле $\varphi_\lambda^\Sigma$ преобразуется однородно и описывает $\Sigma$ -частицы.

3. Предположим, что мультиплет $\varphi_\lambda$ удовлетворяет сформулированным выше условиям I,II и максимальной подгруппой стабильности вектора вакуумных средних $\omega_\lambda$ является $H$. Покажем, что линейно преобразующиеся голдстоуны и $\Sigma$-поля (9),(16) можно связать каноническим преобразованием с нелинейно преобразующимися полями $\xi_i$, $\tilde\varphi_\lambda^\Sigma$, обладающими стандартными трансформационными свойствами относительно нелинейной реализации группы $G$ в фактор-пространстве $G/H$ /1/:

$$g e^{i\xi_i Z_i} = e^{i\xi_t'(\xi,g) Z_t} e^{iu^\alpha(\xi,g)V_\alpha} \tag{17}$$

$$\tilde\varphi_\lambda^{\Sigma\prime} = D_{\lambda\beta}\left(e^{iu^\alpha(\xi,g)V_\alpha}\right)\tilde\varphi_\beta^\Sigma . \tag{18}$$

Наложим на поля $\xi_i$, $\tilde\varphi_\lambda^\Sigma$ следующие условия:

$$P^\Psi_{\lambda\rho} D_{\rho\mu}\left(e^{-i\xi_t Z_t}\right)(\varphi_\mu' + \omega_\mu) = 0 \tag{19}$$

$$\tilde\varphi_\lambda^\Sigma + \omega_\lambda = P^\Sigma_{\lambda\rho} D_{\rho\beta}\left(e^{-i\xi_t Z_t}\right)(\varphi_\beta' + \omega_\beta) . \tag{20}$$

Используя основной закон нелинейных реализаций (17),(18), трансформационные свойства линейного мультиплета $\varphi_\lambda$ и свойство (14), нетрудно проверить, что эти условия ковариантны по отношению к группе $G$. Решая уравнения (19), (20), можно выразить поля $\xi_i$, $\tilde\varphi_\lambda^\Sigma$ через $\Psi_i$, $\varphi_\lambda^\Sigma$:

$$\xi_i = \Psi_i + O(\Psi_i, \varphi^\Sigma)$$

$$\tilde\varphi_\lambda^\Sigma = \varphi_\lambda^\Sigma + O(\Psi, \varphi^\Sigma) .$$

Поле $\tilde\varphi_\lambda^\Sigma$ имеет столько же независимых компонент, что и $\varphi_\lambda^\Sigma$, поскольку из определения (20) следует

$$P^\Psi \tilde\varphi^\Sigma = 0 . \tag{21}$$



Обратная связь между $\Psi_i$, $\varphi_\lambda^\Sigma$ и $\xi_i$, $\tilde\varphi_\lambda^\Sigma$ дается соотношением /8,11/:

$$\varphi_\lambda' + \omega_\lambda = D_{\lambda\beta}\left(e^{i\xi_t Z_t}\right)(\tilde\varphi_\beta^\Sigma + \omega_\beta) \tag{22}$$

при дополнительном условии (21). Соотношение (22) есть просто полярное разложение вектора $\varphi_\lambda$. Используя стандартное определение ковариантных дифференциалов /1-4/:

$$D(e^{-i\xi_t Z_t})\, d\, D(e^{i\xi_t Z_t}) = i\,\Omega^t(d) Z_t + i\,\Omega^\alpha(d) V_\alpha$$

$$\nabla\tilde\varphi_\lambda^\Sigma = d\tilde\varphi_\lambda^\Sigma + i\,\Omega^\alpha(d)(V^\alpha\tilde\varphi^\Sigma)_\lambda ,$$

линейный дифференциал $d\varphi_\lambda'$, преобразующийся, как и $\varphi_\lambda$, по представлению $D(g)$, можно выразить через ковариантные дифференциалы полей $\xi^i(x)$ и $\tilde\varphi_\rho^\Sigma$ — $\Omega^i(d)$ и $\nabla\tilde\varphi_\rho^\Sigma$:

$$d\varphi_\lambda' = D_{\lambda\beta}\left(e^{i\xi_t Z_t}\right)\left[i\,\Omega^k(d) Z^k_{\beta\nu}(\tilde\varphi_\nu^\Sigma + \omega_\nu) + \nabla\tilde\varphi_\beta^\Sigma\right] . \tag{23}$$

Формулы (22), (23) дают возможность любую линейную $\Sigma$-модель эквивалентно представить в терминах величин соответствующей нелинейной реализации.

Далее в этом разделе мы ограничимся случаем внутренних симметрий.

В качестве примера рассмотрим $\Sigma$ -модель на основе мультиплета (1/2,1/2) киральной группы $SU(2)\times SU(2)$ — $\varphi_4, \pi_i\ (i=1,2,3)$ с $SU(2)$-симметрией вакуума.

В этом случае

$$Z^k_{\mu\lambda} = i\,(\delta_{\lambda k}\delta_{\mu 4} - \delta_{\lambda 4}\delta_{\mu k})$$

$$P^\Psi_{\mu\lambda} = \delta_{\mu\lambda} - \delta_{\mu 4}\delta_{\lambda 4} , \quad \varphi_4 = \varphi_4' + \langle\sigma\rangle .$$

Решение уравнений (19), (20) находится легко и имеет вид:

$$\pi^k = \xi_\sigma^k(\tilde\varphi_4 + \langle\sigma\rangle) \qquad \xi_\sigma^k = [\pi^2 + (\varphi_4' + \langle\sigma\rangle)^2]^{-1/2}\pi^k$$

$$\varphi_4' = \sqrt{1-\xi_\sigma^2}\,(\tilde\varphi_4 + \langle\sigma\rangle) - \langle\sigma\rangle \qquad \tilde\varphi_4 = \sqrt{\pi^2 + (\varphi_4' + \langle\sigma\rangle)^2} - \langle\sigma\rangle ,$$

где

$$\xi_\sigma^k = \xi^k \frac{\sin\sqrt{\xi^2}}{\sqrt{\xi^2}} .$$

В более сложных $\Sigma$ -моделях решение уравнений (19), (20) было бы более трудной задачей. Однако явно их решать на самом деле не требуется. Разбиение (21) можно рассматривать как калибровочное преобразование полей $\varphi_\lambda$ с параметрами $\xi_i(x)$ , поэтому, чтобы перейти к нелинейным полям в потенциальной части лагранжиана, которая не зависит от производных и, следовательно, калибровочно инвариантна, достаточно положить там $\varphi_\lambda^\Psi = 0$ и сделать замену $\varphi_\lambda^\Sigma \to \tilde{\varphi}_\lambda^\Sigma$ . Кинетический член лагранжиана не инвариантен относительно калибровочных преобразований, поэтому после подстановки (21) он будет явно зависеть как от полей $\tilde{\varphi}_\lambda^\Sigma$ , так и от $\xi_i$:

$$a_{\rho\lambda}\partial_x^\mu\varphi_\rho\,\partial_x^\mu\varphi_\lambda = \Omega^k(\partial^\mu)\Omega^t(\partial^\mu)(\tilde{\varphi}^\Sigma+\omega, Z^k Z^t(\tilde{\varphi}^\Sigma+\omega)) - 2i\,\Omega^k(\partial^\mu)(\tilde{\varphi}^\Sigma+\omega, Z^k\nabla_\mu\tilde{\varphi}^\Sigma) + (\nabla_\mu\tilde{\varphi}^\Sigma, \nabla_\mu\tilde{\varphi}^\Sigma), \qquad (24)$$

где $\Omega^k(\partial^\mu)$ , $\nabla_\mu\tilde{\varphi}_\lambda^\Sigma = \nabla\tilde{\varphi}_\lambda^\Sigma(\partial^\mu)$ – ковариантные производные полей, $\xi_k(x)$ и $\tilde{\varphi}_\lambda^\Sigma(x)$, соответственно. Например, в случае $SU(2)$-$\Sigma$-модели соотношение (24) принимает вид:

$$\partial_\mu\pi^i\partial_\mu\pi^i + \partial_\mu\varphi_4'\partial_\mu\varphi_4' = \nabla_\mu\xi_i\nabla_\mu\xi_i(\tilde{\varphi}_4+\langle\sigma\rangle)^2 + \partial_\mu\tilde{\varphi}_4\partial_\mu\tilde{\varphi}_4 .$$

Параметризация лагранжиана $\Sigma$ -модели нелинейными полями очень удобна при рассмотрении предельного перехода к "чистой" нелинейной реализации. Условие "чистой" нелинейной реализации спонтанно нарушенной симметрии выглядит очень просто:

$$\tilde{\varphi}_\lambda^\Sigma = 0 . \qquad (25)$$

Преобразование (18) поля $\tilde{\varphi}_\lambda^\Sigma$ однородно, поэтому условие (25) является ковариантным. При этом условии потенциальная часть лагранжиана сводится к константе, а кинетический член – к стандартному неперенормируемому взаимодействию голдстоунов

$$(\partial_\mu\varphi, \partial_\mu\varphi) \to -\Omega^k(\partial_\mu)\Omega^t(\partial_\mu)d_{kt} . \qquad (26)$$

Условие "чистой" нелинейной реализации, будучи очень простым в терминах нелинейно преобразующихся полей, может оказаться довольно



сложным, если выразить его через компоненты линейного мультиплета $\varphi_\lambda$ . В рассмотренном выше примере условие нелинейной реализации имеет вид

$$\tilde{\varphi}_4 = 0 . \qquad (25')$$

Оно эквивалентно хорошо известному нелинейному соотношению между полями $\varphi_4'$, $\pi^i$:

$$\pi^2 + (\varphi_4' + \langle\sigma\rangle)^2 = \langle\sigma\rangle^2 .$$

Обсудим теперь, чему соответствует условие (25) на языке диаграмм Фейнмана в приближении деревьев . Известно, что в $SU(2)$-$\Sigma$-модели совокупность всех графиков-деревьев с внешними пионными линиями в пределе бесконечной массы $\Sigma$-частицы описывается нелинейным эффективным лагранжианом /10,12/.

Покажем, что если в некоторой $\Sigma$ -модели массы всех $\Sigma$-полей отличны от нуля, то для перехода на уровне графиков-деревьев к нелинейной реализации в фактор-пространстве $G/H$ достаточно устремить эти массы к бесконечности по одному и тому же закону, удерживая остальные параметры лагранжиана постоянными.

Доказательство проводится очень просто, если лагранжиан $\Sigma$-модели параметризован нелинейными полями. В этой параметризации, как отмечалось выше, потенциал содержит лишь взаимодействия между $\Sigma$-полями, а все вершины взаимодействия с голдстоунами определяются кинетическим членом (24). Из формулы (24) следует, что та часть совокупности графов-деревьев с испусканием и поглощением одних только голдстоунов, которая не содержит внутренних $\Sigma$-линий, полностью определяется эффективным лагранжианом (26). Остается рассмотреть диаграммы с внутренними $\Sigma$ -линиями. Константы взаимодействий $\Sigma$ -полей с голдстоунами не зависят от масс, что видно из формулы (24). Константы входящих в потенциал взаимодействий с тремя и четырьмя $\Sigma$ -полями либо не зависят от масс, либо зависят от них квадратично. Пропагаторы $\Sigma$-частиц ведут себя как $m_\Sigma^{-2}$. Ясно поэтому, что любая диаграмма с внешними голдстоуновскими линиями и хотя бы одной вершиной с $\Sigma$ - полями внутри обращается в нуль при одновременном стремлении масс всех $\Sigma$ -частиц к бесконечности. Таким образом, в этом пределе совокупность диаграмм с испусканием и поглощением голдстоунов определяется лагранжианом (26), соответствующим нелинейной реализации в фактор-пространстве $G/H$.

Может оказаться, что массы некоторых $\Sigma$ -полей равны нулю для всех допустимых значений затравочных параметров (т.е. таких, при которых возможно спонтанное нарушение до подгруппы $H$ и обеспечена перенормируемость). Это означает, что лагранжиан в действительности обладает более широкой, чем $G$, группой спонтанно нарушенной инвариантности $\overline{G}$, причем $\Sigma$ -поля с нулевой массой являются голдстоунами, соответствующими генераторам тех спонтанно нарушенных симметрий в $\overline{G}$, которые не входят в $G$ [17] 3). Одновременное устремление масс остальных $\Sigma$ -частиц к бесконечности приводит к нелинейной реализации в фактор-пространстве $\overline{G}/\overline{H}$, где $\overline{H}$ - максимальная ненарушенная подгруппа в $\overline{G}$. Разумеется, $\overline{H}$ включает в себя $H$. Таким образом, в этом случае условие (25) не воспроизводится в теории возмущений предельным переходом по массам. Воспроизводится вместо этого условие нелинейной реализации в фактор-пространстве $\overline{G}/\overline{H}$, которое можно получить, производя полярное разложение вектора $\varphi_\lambda$ в фактор-пространстве

3) Такие поля называются "псевдоголдстоуновскими"[17]. После $G$ -инвариантного включения связей с калибровочными и прочими полями $G$ -инвариантной в общем случае останется лишь потенциальная часть лагранжиана, и "псевдоголдстоуны" приобретут массу за счет радиационных поправок.



$\overline{G}/\overline{H}$ (вместо полярного разложения (22) в пространстве $G/H$) и приравнивая нулю переопределенные $\Sigma$ -поля (канонически связанные с массивными $\Sigma$ -полями в линейной параметризации). Новое условие будет явно ковариантно относительно группы $\overline{G}$, в то время как (25) ковариантно только относительно группы $G$.

4. В заключение обсудим ряд проблем, возникающих при приложении общего формализма $\Sigma$-моделей к случаю спонтанного нарушения пространственно-временных симметрий, т.е. симметрий относительно групп, содержащих в качестве нетривиальной подгруппы группу Пуанкаре $P_4 ⓢ L$. Однородная группа Лоренца $L$ при этом предполагается включенной в подгруппу стабильности вакуума $H$. В работе[9] высказана надежда, что на основе $\Sigma$ -моделей симметрий такого типа удастся построить перенормируемую теорию гравитации (переходящую в эйнштейновскую в длинноволновом пределе) и, возможно, объяснить некоторые черты спектра масс частиц. Кроме того, $\Sigma$ -модели пространственно-временных симметрий могут иметь непосредственное отношение к дуальным моделям сильных взаимодействий.

Главный вопрос состоит в том, как определить действие данной группы на точках пространства-времени. В нелинейных реализациях пространственно-временных симметрий 4-координата $x_\mu$ трактуется как голдстоун, соответствующий генератору $P_\mu$ [2-4]. Все поля параметризуются этим голдстоуном.

По аналогии, при построении $\Sigma$ -модели некоторой пространственно-временной симметрии 4-координату можно отождествить, с точностью до канонического преобразования, с голдстоуном, возникающим при спонтанном нарушении линейной симметрии относительно генератора $P_\mu$. В отличие от случая внутренних симметрий, где $x_\mu$ играет роль внешнего параметра, здесь $x_\mu$ будет преобразовываться через остальные компоненты исходного мультиплета[4]. Поэтому дифференциал $dx_\mu$ и, соответственно, необходимая для построения кинетических членов лагранжиана производная $\partial/\partial x_\mu$ окажутся нековариантными.

Чтобы определить линейный ковариантный объект, который содержал бы в качестве своей компоненты обычную производную, необходимо перейти в пространство размерности больше 4-х. Выберем "затравочный" мультиплет в виде прямой суммы двух неприводимых пространств $\varphi_I^\lambda$ и $\varphi_{II}^\lambda$, причем первое из них (поля) параметризуем точками второго (координатами). При действии группы $G$

$$\varphi^\lambda = \varphi_I^\lambda(\varphi_{II}) + \varphi_{II}^\lambda \longrightarrow \varphi_I'^\lambda(\varphi_{II}') + \varphi_{II}'^\lambda = \varphi'^\lambda .$$

Производная $d\varphi_I^\lambda(\varphi_{II})/d\varphi_{II}^\beta$ преобразуется линейно, по представлению $D_I(g)\otimes\bar{D}_{II}(g)$, и может быть использована для построения инвариантных кинетических членов. После спонтанного нарушения симметрии поля и координаты выразятся через различные линейные комбинации голдстоунов и $\Sigma$-компонент. Следует подчеркнуть, что максимальные подгруппы инвариантности $H_I$ и $H_{II}$ неприводимых компонент $\omega_I^\lambda$ и $\omega_{II}^\lambda$ вектора $\omega^\lambda$, определяющего направление спонтанного нарушения в пространстве $\varphi^\lambda$, могут быть шире, чем подгруппа $H$, но должны по ней пересекаться, чтобы $H$ была максимальной стационарной подгруппой полного вектора $\omega^\lambda$.

В рассмотренном формализме спонтанное нарушение реализуется как в пространстве полей, так и в пространстве координат методами $\Sigma$-моделей. Другой, менее прямой путь обобщения на случай пространственно-временных симметрий техники, опробованной на внутренних симметриях, состоит в рассмотрении нелинейной реализации для координат и использовании методов $\Sigma$-моделей при введении спонтанного нарушения в пространстве полей. Будем считать мультиплет полей $\varphi_\lambda$ зависящим от точки фактор-пространства $G/H_{II}$, которое включает в себя обычное пространство-время в качестве гиперповерхности. Спонтанное нарушение в линейное пространство полей $\varphi_\lambda$ введем стандартным путем, выделив в этом пространстве постоянный вектор $\omega_\lambda$ с подгруппой стабильности $H_I$, пересекающейся с $H_{II}$ по $H$. В таком подходе ковариантные производные линейны по полям, но могут быть существенно нелинейными по координатам. Заметим, что описанный способ параметризации используется в концепции суперполей/18/, которые параметризуются точками фактор-пространства $\tilde{G}/L$, где $\tilde{G}$ – группа суперсимметрии.

4) Лишь в частном случае групп, представимых в виде полупрямого произведения $P_4 \subset G'$, координата $x_\mu$ преобразуется при действии генераторов из $G'$ однородно, сама через себя.



Общей чертой обоих рассмотренных подходов является необходимость расширения пространства-времени. Чтобы число дополнительных координат было минимальным, в обоих случаях подгруппу $H_{II}$ следует выбирать как можно более широкой, причем второй подход оказывается более экономным. Поля в расширенном пространстве эквивалентны набору обычных полей – конечному, если дополнительные координаты – антикоммутирующие грассмановы числа (случай суперполей)/18/, и бесконечному, если эти координаты – обычные числа (бозоны), как это имеет место, к примеру, в теории поля на релятивистской струне/19/.

Подчеркнем, что цель анализа, проведенного в этом разделе, состояла в выяснении формальных принципов построения $\Sigma$-моделей пространственно-временных симметрий. Вопросы квантования, интерпретации дополнительных измерений, предельного перехода к нелинейным реализациям и рассмотрение конкретных примеров требуют отдельного исследования.

Автору приятно выразить глубокую благодарность В.И.Огиевецкому за постоянный интерес к работе и полезную критику. Автор признателен А.-З.Дубничковой и В.Н.Первушину за обсуждение ряда вопросов.

## Литература


1. S.Coleman, J.Wess, B.Zumino. Phys.Rev.,177,2239 (1969); C.L.Callan, Jr. and S.Coleman,J.Wess and Zumino. Phys.Rev., 177, 2247 (1969). Д.В.Волков.Препринт ИТФ 69-75, Киев (1969). C.Isham. Nuovo Cim., v.LIXA, No.3, 356 (1969).
2. A.Salam, J.Strathdee. Phys.Rev.,184, 1750 (1969). C.Isham, A.Salam, J.Strathdee. Ann.Phys.,(N.Y.), 62, 98 (1973).
3. Д.В.Волков, ЭЧАЯ, 4, 3 (1973).
4. V.I.Ogievetsky. Proc. of X-th Winter School of Theoretical Physics in Karpacz, v.1, p.117, Wroclaw, 1974.
5. J.Goldstone, A.Salam, S.Weinberg. Phys.Rev.127, 965 (1962).
6. S.Weinberg. Phys.Rev., D7, 1068 (1973).
7. B.W.Lee, E.Abers. Physics Reports, 9C, No 1; 1 (1973).
8. B.W.Lee, J.Zinn-Justin. Phys.Rev., D5, 3137 (1972).
9. А.Б.Борисов, В.И.Огиевецкий, ТМФ 21, 329 (1974).
10. S.Weinberg. Phys.Rev.Lett., 18, 188 (1967).
11. T.W.B.Kibble. Phys.Rev.,155, 1554 (1967).
12. W.A.Bardeen, B.W.Lee. Phys.Rev.,177, 2389 (1969).
13. A.Z.Dubničkova. Preprint JINR E2-8696, Dubna (1975).
14. E.A.Ivanov, V.I.Ogievetsky. Preprint JINR E2-8593, Dubna (1975).
15. M.Gell-Mann, M.Levy. Nuovo Cim., 16, 705 (1960).
16. S.Weinberg. Phys.Rev.Lett., 29, 388 (1972).
17. S.Weinberg. Phys.Rev.Lett., 29, 1698 (1972).
18. A.Salam, J.Strathdee. Nucl.Phys., B76, 477 (1974).
19. M.Kaku, K.Kikkawa. Phys.Rev., D10, 1110 (1974).



Рукопись поступила в издательский отдел
29 октября 1975 года