сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-92-66

Р.М.Ямалеев

МОДЕЛЬ ПОЛИЛИНЕЙНОГО БОЗЕ- И ФЕРМИ-ПОДОБНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

1992

Ямалеев Р.М. P2-92-66
Модель полилинейного бозе- и ферми-подобного осциллятора

Предложена модель полилинейного ферми- и бозе- подобного осциллятора, оператор Гамильтона которого имеет полилинейную зависимость от порождающих операторов. Даны правила действия порождающих операторов бозе- и ферми-типа в дискретном гильбертовом пространстве собственных состояний гамильтониана. Показано, что N-линейная модель описывает процесс рождения и уничтожения N-частиц, соотносящихся друг с другом как античастицы. Построена суперсимметричная модель полилинейного осциллятора.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод автора

Yamaleev R.M. P2-92-66
Model of Polylinear Bose- and Fermi-Like Oscillator

The model of polylinear bose- and fermi-like oscillator, Hamiltonian of which has a polylinear dependence on generators, is suggested. The rules of operation of fermi- and bose-type generators in the discrete Hilbert space of Hamiltonian are defined. It is proved, N-linear oscillator model may be used for the description of the process of creation and annihilation of the N particles which are related to each other similar to particles and antiparticles. The supersymmetric model of polylinear oscillator is built.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992

В настоящей работе мы строим модели бозе-подобного и ферми-подобного осциллятора, операторы Гамильтона которого имеют полилинейную зависимость от порождающих операторов. N-линейная модель осциллятора строится на базе N операторов, часть из которых относится к типу повышающих, часть — к типу понижающих операторов. Из этих операторов можно образовать операторы-мономы, обладающие свойствами обычных операторов рождения и уничтожения. Таким образом, оператор Гамильтона может быть редуцирован к квадратичному выражению от операторов рождения и уничтожения.

Модель квантового осциллятора дает начало той или иной статистике. Теория бозе-статистики начинается с бозе-подобного осциллятора, простейшая модель ферми-статистики может быть построена на основе ферми-подобного осциллятора. Осциллятор с нестандартной нулевой энергией ведет к парастатистике. Наша модель осциллятора также ведет к новым условиям квантования и к новой статистике. Безусловно, при этом необходимо перейти от теории одиночного осциллятора к теории системы осцилляторов.

1. КВАДРАТИЧНАЯ МОДЕЛЬ БОЗЕ- И ФЕРМИ-ПОДОБНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Традиционная модель осциллятора строится на базе двух операторов: a^+ и a^- [6]. Оператор a^+ действует как оператор повышающего типа, переводя состояние Φ_n в состояние Φ_{n+1} по правилу

$$a^+\Phi_n = \sqrt[2]{n+1}\,\Phi_{n+1}, \tag{1.1}$$

а оператор a^- относится к типу понижающих операторов и действует по правилу

$$a^-\Phi_n = \sqrt[2]{n}\,\Phi_{n-1}. \tag{1.2}$$

Наинизшее состояние (состояние вакуума) Φ_0, соответствующее минимуму энергии оператора Гамильтона бозе-подобного осциллятора

$$H = \frac{1}{2}\left(a^+a^- + a^-a^+\right), \tag{1.3}$$

определяется из решения уравнения

$$a^-\Phi_0 = 0. \tag{1.4}$$

Операторы a^+, a^- удовлетворяют каноническим условиям квантования

$$[a^-, a^+] = a^-a^+ - a^+a^- = 1. \tag{1.5}$$

Собственные значения эрмитова оператора H положительны, дискретны, и существует минимум спектра $E_0 > 0$:

$$H\,|n> = (E_0 + n)|n>. \tag{1.6}$$

Билинейное соотношение (1.5) находится в прямой зависимости от значения E_0. В общем случае имеет место следующая зависимость матричных элементов коммутатора $[a^-, a^+]$ от E_0 [7]:

$$<n\,|[a^-, a^+]|\,n'> = \delta_{nn'} \times \begin{cases} 2E_0 & \text{для четных } n \\ 2(1 - E_0) & \text{для нечетных } n. \end{cases}$$

Как видно, только при $E_0 = 1/2$ эта зависимость дает (1.5). При $E_0 = 1$ она приводит к трилинейным соотношениям парастатистики

$$a^-a^-a^+ - a^+a^-a^- = 2a^-. \tag{1.7}$$

Теперь вкратце перечислим основные свойства традиционного ферми-осциллятора.

Операторы рождения—уничтожения a^+, a^- ферми-подобного осциллятора подчиняются билинейным соотношениям [8]:

$$a^+a^- + a^-a^+ = 1,\ a^\pm a^\pm + a^\pm a^\pm = 2(a^\pm)^2 = 0. \tag{1.8}$$

Минимальный порядок матриц a^+, a^- равен двум. Как правило, используются матрицы вида

$$a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad a^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Пространство Фока в этом случае состоит из двух векторов:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Действие операторов a^+, a^- выражается формулами

$$a^-\Phi_0 = 0,\ a^+\Phi_0 = \Phi_1,\ a^-\Phi_1 = \Phi_0. \tag{1.10}$$

Отсюда следует интерпретация a^- как оператора уничтожения, a^+ как оператора рождения. Оператор числа частиц есть диагональная матрица

$$\mathcal{N}_1 = a^+a^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Оператор Гамильтона, как и в случае бозе-подобного осциллятора, выбирается в виде

$$H_1 = \mathcal{N}_1 + c. \tag{1.12}$$

Постоянная c имеет определенное значение. Одно из условий, которое позволяет определить c, есть требование унитарности оператора $\exp(iH_1)$. Этот оператор унитарен, если

$$\mathrm{tr} H_1 = 0. \tag{1.13}$$

Отсюда находим

$$2c = -\,\mathrm{tr}\,\mathcal{N}_1 = -1,\ c = -\frac{1}{2}.$$

Для ферми-подобной модели также справедливы осцилляторные уравнения движения

$$\dot{a}^\pm = [a^\pm, H_1] = \mp a^\pm.$$

Рассматриваемая модель замечательна тем, что она взаимообратима. В выражениях (1.8)—(1.11) мы с одинаковым успехом можем интерпретировать $a^- = b^+$ как оператор рождения, в то время как $a^+ = b^-$ будет играть роль оператора уничтожения. Соответственно $\Psi_0 = \Phi_1$ становится состоянием вакуума $b^-\Psi_0 = 0$ и $b^+\Psi_0 = \Psi_1 = \Phi_0$. Мы также имеем

$$\mathcal{N}_2 = b^+b^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \dot{b}^\pm = [b^\pm, H_2] = \mp b^\pm, \tag{1.14}$$

где $H_2 = \mathcal{N}_2 + c$ — оператор Гамильтона.

Легко заметить, что операторы a^+, a^- и b^+, b^- связаны между собой унитарным преобразованием:

$$b^\mp = Ua^\pm U^{-1},\ U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

следовательно, физически эквивалентны.

В физической модели, если оператор a^+ соответствует оператору рождения частицы, то $b^+ = a^-$ есть оператор рождения античастицы. Таким образом, данная схема одинаковым способом описывает как частицу, так и ее античастицу. Также заметим, что

$$H_1 + H_2 = 0. \tag{1.16}$$

2. МОДЕЛЬ БОЗЕ-ПОДОБНОГО ТРИЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Определим три оператора a_1, a_2, a_3 в некотором гильбертовом пространстве $\{\Phi_n\}$, действующих на заданный вектор Φ_n по правилу [1—3]:

$$a_3\Phi_n = \sqrt[3]{n}\,\Phi_{n-1},\ a_2\Phi_n = \sqrt[3]{n+1}\,\Phi_{n-1},\ a_1\Phi_n = \sqrt[3]{n+2}\,\Phi_{n+2}. \quad (2.1)$$

Здесь a_1 действует как оператор повышающего типа, операторы a_2, a_3 являются понижающими операторами. Для каждого из понижающих операторов существует свой "нулевой вектор":

$$a_3\Phi_0 = 0, \quad a_2\Phi_{-1} = 0. \quad (2.2)$$

Таким образом, мы предполагаем, что определения (2.1) справедливы также для отрицательных n.

В данном случае мы можем построить три монома, которые имеют целочисленный спектр:

$$\begin{gathered}\mathfrak{N}_1 = a_2a_3a_1,\ \mathfrak{N}_2 = a_3a_1a_2,\ \mathfrak{N}_3 = a_1a_2a_3\\ \mathfrak{N}_1\Phi_n = (n+2)\Phi_n,\ \mathfrak{N}_2\Phi_n = (n+1)\Phi_n,\ \mathfrak{N}_3\Phi_n = n\Phi_n.\end{gathered} \quad (2.3)$$

Поэтому оператор Гамильтона мы определяем как сумму:

$$H = \frac{1}{3}(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3). \quad (2.4)$$

Из (2.3) находим спектр оператора H:

$$H\Phi_n = (E_0 + n)\Phi_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots \quad (2.5)$$

Здесь $E_0 = 1$ соответствует вектору Φ_0:

$$H\Phi_0 = E_0\Phi_0,$$

который находится из решения уравнения

$$a_3\Phi_0 = 0.$$

Из операторов a_1, a_2, a_3 можно построить три типа операторов, повышающих и понижающих заданное состояние:

$$\begin{gathered}b_1^- = a_2a_3,\ b_2^+ = a_3a_1,\ b_3^+ = a_1a_2,\\ b_1^+ = a_1,\ b_2^- = a_2,\ b_3^- = a_3.\end{gathered} \quad (2.6)$$

Они удовлетворяют следующим комутационным соотношениям:

$$[b_1^-, b_1^+] = 2,\ [b_k^-, b_k^+] = 1,\ k = 2, 3. \quad (2.7)$$

Из определений (2.3) и (2.6) получим

$$\mathfrak{N}_1 = b_1^-b_1^+ = b_2^-b_2^+,\ \mathfrak{N}_2 = b_2^+b_2^- = b_3^-b_3^+,\ \mathfrak{N}_3 = b_1^+b_1^- = b_3^+b_3^-. \quad (2.8)$$

Эти равенства позволяют придать H следующий вид:

$$H = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{3}(b_k^+b_k^- + b_k^-b_k^+). \quad (2.9)$$

Заметим, что операторы $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3$ не независимы, а удовлетворяют линейному соотношению

$$\mathfrak{N}_1 + \alpha\mathfrak{N}_2 + \beta\mathfrak{N}_3 = 2 + \alpha, \quad (2.10)$$

где α, β — произвольные c-числа, связанные между собой равенством

$$1 + \alpha + \beta = 0.$$

Пользуясь (2.7)—(2.10), получим три типа выражений для H:

$$\begin{aligned}&(I)\ \ H = b_1^+b_1^- + 1,\\ &(II)\ \ H = b_2^+b_2^-,\\ &(III)\ \ H = b_3^+b_3^- + 1.\end{aligned} \quad (2.11)$$

Как только вектор основного состояния Φ_0 найден, собственные векторы H, соответствующие положительным n, находятся по формуле:

$$\Phi_n = \frac{(b_3^+)^n\Phi_0}{((n+1)!)^{3/2}},\ n = 1, 2, \ldots \quad (2.12)$$

Уравнения движения

Зависимость от времени операторов $a_k, b_k^{\pm}$ находим, подставляя эти операторы и оператор Гамильтона (2.4), (2.11) в уравнение движения Гейзенберга. Используя коммутационные соотношения (2.7) и определяя (2.6), получим

$$\begin{gathered}\dot a_1 = [a_1, H] = -2a_1,\ \dot a_k = [a_k, H] = a_k,\\ \dot b_1^{\pm} = [b_1^{\pm}, H] = \mp 2b_1^{\pm},\ \dot b_k^{\pm} = [b_k^{\pm}, H] = \mp b_k^{\pm},\ k = 2, 3.\end{gathered}$$

3. МОДЕЛЬ N-ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В гильбертовом пространстве $\{\Phi_n\}$ зададим N операторов, действующих на базисные векторы пространства по следующему правилу:

$$a_1\Phi_n = (n+N-1)^{1/N}\Phi_{n+N-1},$$
$$a_k\Phi_n = (n+N-k)^{1/N}\Phi_{n-1},\ k = 2, 3, 4, \ldots \tag{3.1}$$

Рассмотрим действие N-линейных операторов:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}_N &= a_1 a_2 a_3 \ldots a_N\\
\mathfrak{N}_1 &= a_2 a_3 \ldots a_N a_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{N}_k &= a_{k+1}\ldots a_N a_1 \ldots a_{k-1}a_k\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{N}_{N-1} &= a_N a_1 a_2 \ldots a_{N-1}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

на заданный вектор пространства Φ_n.

Пользуясь (3.1), получим

$$\mathfrak{N}_k\Phi_n = (n+N-k)\Phi_n. \tag{3.3}$$

По аналогии с (2.3) определим оператор Гамильтона как сумму

$$H = \frac{1}{N}\Big(\sum_{k=1}^{N}\mathfrak{N}_k\Big). \tag{3.4}$$

Спектр H находим, подставляя (3.3) в уравнение

$$H\Phi_n = E_n\Phi_n. \tag{3.5}$$

Находим $E_n = E_0 + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Значение E_0 еще предстоит определить. Для определения собственных функций оператора H представим его через обычные порождающие операторы. Каждый из операторов $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_N$ можно представить через операторы рождения и уничтожения двумя способами.

Например:

$$(1)\ \mathfrak{N}_1 = b_2^- b_2^+,\quad (2)\ \mathfrak{N}_1 = b_1^- b_1^+, \tag{3.6}$$

где $b_2^- = a_2$, $b_2^+ = a_3 a_4 \ldots a_N a_1$, $b_1^- = a_2 a_3 \ldots a_N$, $b_1^+ = a_1$. Далее, положим

$$b_k^- = a_k,\ b_k^+ = a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_N \ldots a_{k-1},\ k = 2, 3, \ldots, N.$$

Из определения (3.2) следует:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \mathfrak{N}_k = b_k^- b_k^+,\quad (2)\ \mathfrak{N}_k = b_{k-1}^+ b_{k-1}^-,\ k = 2, 3, \ldots, N-1,\\
&(1)\ \mathfrak{N}_N = b_1^+ b_1^-,\quad (2)\ \mathfrak{N}_N = b_{N-1}^+ b_{N-1}^-.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Подставив (3.6) и (3.7) в (3.4), находим выражение H в терминах операторов b_k^+, b_k^-, $k = 1, \ldots, N$:

$$H = \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N}(b_k^+ b_k^- + b_k^- b_k^+). \tag{3.8}$$

Операторы b_k^+, b_k^-, $(k = 2, 3, \ldots, N)$ удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям

$$[b_k^-, b_k^+] = 1. \tag{3.9}$$

Операторы b_1^+, b_1^- подчиняются другим соотношениям:

$$[b_1^-, b_1^+] = N-1. \tag{3.10}$$

Пользуясь (3.3), мы можем получить линейные соотношения между операторами $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_N$:

$$\mathfrak{N}_{k-p} - \mathfrak{N}_k = p,\ p = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{3.11}$$

Таким образом, оператор H может быть выражен через $\mathfrak{N}_p$:

$$H = \mathfrak{N}_p + p - (N+1)/2. \tag{3.12}$$

Отсюда, пользуясь (3.7), легко получить выражение H в терминах b_p^+, b_p^- для заданного p:

$$H = \begin{cases} b_1^+ b_1^- + (N-1)/2\\ b_p^+ b_p^- + p - (N+1)/2,\ p = 2, \ldots, N. \end{cases} \tag{3.13}$$

Рассмотрим представление H при $p = N$:

$$H = b_N^+ b_N^- + (N-1)/2. \tag{3.14}$$

Основное состояние определяется из условия

$$b_N^-\Phi_0 = 0. \tag{3.15}$$

Вектору Φ_0 соответствует

$$E_0 = (N-1)/2. \tag{3.16}$$

Как только вектор Φ_0 найден, вектор Φ_n, соответствующий собственному значению $E_n = E_0 + n$, может быть получен по формуле

$$\Phi_n = \frac{(b_N^+)\Phi_0}{((n+1)!)^{(N-1)/N}}. \tag{3.17}$$

Уравнения движения Гейзенберга для операторов a_k и $b_k^{\pm}$ имеют вид:

$$\dot{a}_1 = [a_1, H] = -(N-1)a_1, \ \dot{a}_k = [a_k, H] = a_k$$

$$\dot{b}_1^{\pm} = [b_1^{\pm}, H] = \mp(N-1)b_1^{\pm}, \ \dot{b}_k^{\pm} = [b_k^{\pm}, H] = \mp b_k^{\pm}, \ k = 2, 3, \ldots, N.$$

4. МОДЕЛЬ ПОЛИЛИНЕЙНОГО ФЕРМИ-ПОДОБНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Определим оператор рождения a^+, удовлетворяющий условиям

$$(a^+)^N = 0, \ (a^+)^{N-1} \neq 0. \tag{4.1}$$

Ясно, что оператор a^+, определенный таким образом, действует в N-мерном векторном пространстве. По аналогии с (1.15) определим унитарный оператор U такой, что

$$U^N = 1, \tag{4.2}$$

и введем $N-1$ операторов с помощью преобразований

$$a^{(k)} = U^{k-1}a^+U^{-(k-1)}, \ k = 2, 3, \ldots, N, \tag{4.3}$$

и положим $a^{(1)} = a^+$.

Как известно [9], циклическая матрица $N \times N$, состоящая из единичных элементов, удовлетворяет (4.2). Поэтому матрица

$$(U)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i+1,j} & i < N \\ \delta_{i-n+1,j} & i = N \end{cases} \tag{4.4}$$

может быть выбрана в качестве одной из реализаций оператора U. Наша цель — придать оператору

$$\mathfrak{N} = \prod_{k=1}^{N} a^{(k)} \tag{4.5}$$

смысл оператора числа частиц с собственными значениями 0, 1, 2, ..., $N-1$. С этой целью выберем матричную реализацию оператора a^+ в следующем виде:

$$(a^+)_{ij} = (i-1)^{1/N}\delta_{i,j+1}. \tag{4.6}$$

Утверждение

Оператор (4.5) есть диагональная матрица

$$(\mathfrak{N})_{ij} = (i-1)\delta_{ij} \tag{4.7}$$

в представлении a^+ и U с помощью матриц (4.4) и (4.6).

Доказательство

Согласно (4.3) и (4.5) оператор $\mathfrak{N}$ можно записать так:

$$\mathfrak{N} = a^{(1)}a^{(2)}\ldots a^{(N)} =$$

$$= a^+(Ua^+U^{-1})(U^2a^+U^{-2})\ldots(U^{N-1}a^+U^{1-N}) = U^{-1}(Ua^+)^N U.$$

Из определений (4.4) и (4.6) следует

$$(Ua^+)^N = \begin{cases} i\delta_{i+1,k+1} & i < n \\ 0 & i = 0. \end{cases}$$

Подставив это выражение в предыдущее, получим (4.7). Утверждение доказано.

Базис пространства Фока, в котором действуют операторы, определенные в (4.6), состоит из векторов

$$\Phi_{(i)m} = \delta_{i,m+1} \ (i = 1, \ldots, N; \ m = 0, \ldots, N-1).$$

Действие a^+ на Φ_m выражается формулой

$$a^+\Phi_m = \sqrt[N]{m+1}\,\Phi_{m+1}, \tag{4.8}$$

или в матричных обозначениях:

$$\sum_j (a^+)_{ij}\Phi_{(j)m} = \sqrt[N]{m+1}\,\delta_{i,m+2}.$$

Таким образом, оператор a^+ является оператором "повышения" данного состояния на единицу.

Обозначим через a^- оператор

$$a^- = a^{(2)}a^{(3)}\ldots a^{(N)}.$$

Как следует из формул (4.5), (4.7) и (4.8), оператор a^- играет роль "понижающего" оператора:

$$a^-\Phi_m = \sqrt[N]{m^{N-1}}\,\Phi_{m-1}. \tag{4.9}$$

Используя (4.8) и (4.9), получим, что оператор числа частиц $\mathfrak{N}_1 = a^+a^-$ имеет собственные значения $m = 0, 1, \ldots, N-1$.

Рассматриваемая модель имеет следующую замечательную особенность. Здесь все операторы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(N)}$ пригодны на роль "повышающего" оператора. Действительно, сделаем в произведении (4.5) циклическую перестановку:

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_2 = a^{(2)}a^{(3)}\ldots a^{(N)}a^{(1)}.$$

Из (4.3) имеем $a^+ = U^{-1}a^{(2)}U$.

Подставив это выражение в (4.8), получим

$$a^+\Phi_m = U^{-1}a^{(2)}U\Phi_m = \sqrt[N]{m+1}\,\Phi_{m+1},\quad a^{(2)}\Phi_m^{(2)} = \sqrt[N]{m+1}\,\Phi_{m+1}^{(2)}, \qquad (4.10)$$

где $\Phi_m^{(2)} = U\,\Phi_m$.

Таким образом, $a_2^+ = a^{(2)}$ является повышающим оператором в базисе $\{\Phi_m^{(2)}\}$. Соответственно, роль понижающего оператора в этом базисе будет играть

$$a_2^- = a^{(3)}a^{(4)}\dots a^{(N)}a^{(1)},$$

поскольку

$$a_2^-\Phi_m^{(2)} = \sqrt[N]{m^{N-1}}\,\Phi_{m-1}^{(2)}. \qquad (4.11)$$

Так как

$$\mathfrak{N}_2 = U\mathfrak{N}_1U^{-1},$$

то последовательность собственных значений $\mathfrak{N}_2$ имеет вид: $m+1, 2, \dots, N-1, 0$. Для операторов $a_2^+, a_2^-, \mathfrak{N}_2$ также справедливо соотношение

$$[\mathfrak{N}_2, a_2^\pm] = \pm\, a_2^\pm. \qquad (4.12)$$

Продолжая эту процедуру, после k-й перестановки операторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots$ получим

$$a_k^+ = a^{(k)},\ a_k^- = a^{(k+1)}a^{(k+2)}\dots a^{(N)}a^{(1)}\dots a^{(k-1)},\ \mathfrak{N}_k = a_k^+a_k^-,$$

причем

$$[\mathfrak{N}_k, a_k^\pm] = \pm\, a_k^\pm \qquad (4.13)$$

Таким образом, мы показали, что каждый из операторов $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \dots$ является оператором повышающего типа, в то время как оператор понижающего типа факторизуется в произведение $N-1$ операторов рождения. Это означает, что рассмотренная модель описывает группу из N частиц, которые соотносятся друг с другом как античастицы.

Гамильтониан мы определяем обычным способом:

$$H = \frac{1}{N}(a^-a^+ - a^+a^-). \qquad (4.14)$$

Отметим также, что операторы рождения $a^{(k)}$, $k = 1, \dots, N$ подчиняются следующему условию:

$$\{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(N)}\} = N(N-1)/2, \qquad (4.15)$$

где $\{\dots\}$ обозначает сумму мономов $a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(N)}$ с циклической перестановкой сомножителей.

5. СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ПОЛИЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Подобно тому, как бозе- и ферми-осцилляторы объединяются в суперсимметричную модель осциллятора [16], бозе- и ферми-подобные полилинейные осцилляторы объединяются в единую суперсимметричную модель. Как и в предыдущих разделах, рассмотрим сначала трилинейный случай. Обозначим через b_1, b_2, b_3 — бозе-, а через f_1, f_2, f_3 — ферми-генераторы трилинейных осцилляторов. Действия операторов b_1, b_2, b_3 на бозонное состояние $|n_B\rangle$ определено в (2.1), а фермионные операторы, действующие на фермионное состояние $|n_F\rangle$, имеют вид матрицы 3x3:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{2} & 0 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt[3]{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (5.1)$$

Введем суперзаряды третьего порядка

$$Q_k = f_kb_k,\ k = 1, 2, 3 \qquad (5.2)$$

и трилинейный супергамильтониан

$$H = \frac{1}{3}(Q_1Q_2Q_3 + Q_2Q_3Q_1 + Q_3Q_1Q_2) \equiv \frac{1}{3}\{Q_1, Q_2, Q_3\}. \qquad (5.3)$$

Операторы Q_1, Q_2, Q_3 действуют на состояние $|n_Fn_B\rangle$. Распишем более подробно оператор H:

$$H = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3n+5 & 0 & 0 \\ 0 & 3n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 3n+2 \end{pmatrix} = H_B + H_F,\ H_B = (n+1)\delta_{ki},\ H_F = q_k\delta_{ki}, \qquad (5.4)$$

где

$$q_1 = 2/3,\ q_2 = q_3 = -1/3, \qquad (5.5)$$

что соответствует спектрам трилинейных бозонного и фермионного осцилляторов.

Трилинейный суперсимметричный гамильтониан H состоит из трех частей:

$$H = H_1 + H_2 + H_3,$$

где

$$H_1 = \frac{1}{3}Q_1Q_2Q_3,\ H_2 = \frac{1}{3}Q_2Q_3Q_1,\ H_3 = \frac{1}{3}Q_3Q_1Q_2.$$

Операторы H_k, $k = 1, 2, 3$,имеют одинаковый спектр, за исключением одного собственного значения. Пусть Φ_n — собственная функция H_1 с собственным значением E_n, так что

$$H_1\Phi_n = \frac{1}{3} Q_1Q_2Q_3\Phi_n = E_n\Phi_n.$$

Умножая это уравнение на Q_3, получим

$$H_3(Q_3\Phi_n) = E_n(Q_3\Phi_n).$$

Умножая последнее соотношение на Q_2, имеем

$$H_2(Q_2Q_3\Phi_n) = E_n(Q_2Q_3\Phi_n).$$

Действия операторов Q_k, $k = 1, 2, 3$, на состояние $|n_Fn_B$ можно схематично выразить так:

$$\begin{aligned} Q_1|n_Fn_B> &\sim |n_F-2, n_B+2> \\ Q_2|n_Fn_B> &\sim |n_F+1, n_B-1> \\ Q_3|n_Fn_B> &\sim |n_F+1, n_B-1>. \end{aligned}$$

Эти соотношения ясно раскрывают смысл суперзарядов третьего порядка.

В заключение обобщим предыдущие формулы на случай N-линейного суперсимметричного осциллятора.

Определим N-линейные операторы $\mathfrak{N}_n$, $n = , 2, ..., N$, имеющие такую же форму, что и в (3.2), где a_n заменен на Q_n. В этих терминах супергамильтониан имеет вид (3.4):

$$H = \frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N} \mathfrak{N}_n\right) = \frac{1}{N}\{Q_1, Q_2, ..., Q_N\}. \tag{5.6}$$

Этот оператор имеет спектр, равный сумме спектров бозе-подобного и ферми-подобного осцилляторов:

$$H = H_B + H_F\ ,$$

где H_B определен в (3.5), H_F — в (4.14). С другой стороны, H состоит из N слагаемых вида $H_n = \frac{1}{N}\mathfrak{N}_n$, $n = 1, ..., N$. Операторы H_n имеют одинаковый спектр за исключением собственного значения, соответствующего состоянию Φ_0:

$$Q_N\Phi_0 = 0.$$

Собственные функции связаны с помощью операторов: Q_N, $Q_{N-1}Q_N$, ..., ..., $Q_2Q_3 \dots Q_{N-1}Q_N$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как известно [10], порождающие операторы ферми-осциллятора принадлежат алгебре Грассмана и могут быть построены из элементов алгебры Клиффорда. Подобно этому операторы рождения для полилинейного ферми-подобного осциллятора тесно связаны с обобщенной алгеброй Клиффорда [9,11—14] и обобщенной алгеброй типа Грассмана, элементы которой подчиняются полилинейному антикоммутатору (4.15). Предложенные модели бозе- и ферми-подобных полилинейных осцилляторов не совпадают с осциллятором парастатистики. Модель полилинейного осциллятора приводит к новой статистике, называемой "метастатистика".

Метастатистика есть статистика метабозонов и метафермионов. Метафермионы описываются метаспинорами [1,9,15] и дифференциальными уравнениями высших (больше двух) порядков. Метабозоны и фермионы порядка N образуют группу из N частиц, соотносящихся друг с другом как античастицы (для $N = 4$ см. [15]).

В последнем разделе мы указали путь построения суперсимметрии между метабозонами и фермионами.

В случае группы Пуанкаре будем иметь

$$\{Q_{\alpha_1^{(0)}}, Q_{\alpha_2^{(1)}}, ..., Q_{\alpha_n^{(n-1)}}\} = N\sigma^m_{\alpha_1^{(0)}\alpha_2^{(1)}\dots\alpha_n^{(n-1)}}P_m,$$

где $\sigma^m_{\alpha_1^{(0)}\dots\alpha_n^{(n-1)}}$ — тензор Паули в пространстве метаспиноров, а суперзаряды $Q_{\alpha_n^{(n-1)}}$ в системе покоя $P_m = (-M, 0, 0, 0)$ нами уже были определены в п.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ, Р2-88-147, Дубна, 1988; Yamaleev R. — JINR Commun., E2-89-326, Dubna, 1989.
2. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ, Р2-89-269,Дубна,1989; Р2-90-129, Дубна, 1990.
3. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ, Р2-88-871, Дубна, 1988.
4. Schwinger J. — Nuclear Development Corp. of America Rept. NYO-3071, 1952.
5. Гюрши Ф. — Введение в теорию групп. В кн.: "Теория групп и элементарные частицы". Под ред. Д.Иваненко, М.: Мир, 1967.

6. Фок В.А. — Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976.
7. Ohnuki Y., Kamefuchi S. — Quantum Field Theory and Parastatistics. University of Tokyo Press, 1982.
8. Вейль Г. — Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986.
9. Fleury N., Raush de Traubenberg M. — Beyond Spinors — in Leite Jopes Festschrift. Singapore: World Scientific, 1988, p.79.
10. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
11. Morris A.O. — Q.J.Math.Oxford, 1967, Ser(2)18,7; 1968, 19,289.
12. Kwasniewski A.K. — Preprint Warsaw Uniwersity, IP WUD, No.6, 1991.
13. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ, Р5-87-766, Дубна, 1987.
14. Семерджиев Х.И., Ямалеев Р.М. — Докл. АН Болгарии, 1989, т.42, 7—8.
15. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ, Р2-91-460, Дубна, 1991.
16. Witten E. — Nucl. Phys., 1981, vol. B185, p.513.

Рукопись поступила в издательский отдел 20 февраля 1992 года.