92-554

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-92-554

С.А.Гогилидзе[1], В.В.Санадзе[1], Ю.С.Суровцев,
Ф.Г.Ткебучава[1]

О КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ В ТЕОРИЯХ СО СВЯЗЯМИ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

[1]Институт физики высоких энергий ТГУ

1992

Гогилидзе С.А. и др. P2-92-554
О калибровочных преобразованиях в теориях со связями

Предложен метод построения инфинитезимальных калибровочных преобразований для произвольного вырожденного лагранжиана без ограничений на алгебру связей. Тем самым доказано в общем случае, что вырожденность теории обусловлена ее калибровочной инвариантностью.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1992

Перевод авторов

Gogilidze S.A. et al. P2-92-554
On Gauge Transformations in Constrained Theories

The method for constructing infinitesimal gauge transformations for an arbitrary degenerate Lagrangian without any restrictions on the algebra of constraints is suggested. Thereby, it is proved in the general case that the degeneration of the theory is caused by its gauge invariance.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1992

1. В последнее время стало популярным использовать методы ковариантного квантования—БРСТ [1] и $Sp(2)$ [2]—в калибровочных теориях. Для реализации этих методов нужно знать явный вид калибровочных преобразований. Этот вопрос уже примерно десятилетие обсуждается в разных работах как в гамильтоновом (например, [3–5]), так и в лагранжевом [6] подходах. Однако во всех этих работах генератор калибровочных преобразований строился при определённых ограничениях на структуру алгебры связей. Общим во всех случаях было предположение о том, что скобки Пуассона (СП) первичных связей со всеми связями являются линейными комбинациями первичных связей (здесь и в дальнейшем без ограничения общности можно рассматривать теорию со связями первого рода, поскольку именно эти связи ответственны за калибровочные степени свободы). В ряде работ, например [7,8], вводились дополнительные ограничения, которые для рассматриваемого вопроса не принципиальны.

В наших предыдущих работах [9] из вариационного принципа для действия был получен генератор калибровочных преобразований при указанном выше предположении. Однако в работах [8,10] приведены примеры лагранжианов, для которых это ограничение на связи не выполняется. В настоящей работе мы покажем, что в случае произвольного вырожденного лагранжиана всегда можно перейти к эквивалентному набору связей, для которого вышеуказанное ограничение на алгебру связей уже выполняется. Тем самым разработанный нами ранее метод получения калибровочных преобразований применим к любому вырожденному лагранжиану без каких-либо ограничений на структуру алгебры связей. Этот метод проиллюстрирован на примере лагранжиана, приведённого в [10].

2. Как известно, большинство существующих в настоящее время полевых теорий элементарных частиц относится к классу вырожденных, то есть когда ранг гессиана не является максимальным. Для простоты и без ограничения общности будем рассматривать систему с ко-

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

нечным числом степеней свободы, описываемую вырожденным лагранжианом $L(q,\dot q)$, где $q=(q_1,\cdots,q_N)$ и $\dot q=\frac{d}{dt}q=(\dot q_1,\cdots,\dot q_N)$ — обобщенные координаты и скорости. Тогда вырожденность теории означает, что

$$\operatorname{rang}\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}\right\| = R < N, \qquad i,j=1,\cdots,N. \tag{1}$$

Гамильтонова формулировка таких теорий была разработана Дираком [3], ей мы и будем следовать. Условие (1) означает, что не все импульсы

$$p_i(q,\dot q)=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$$

независимы, и в теории возникает $N-R$ первичных связей

$$\phi^1_\alpha(q,p)=0, \qquad \alpha=1,\cdots,N-R. \tag{2}$$

Уравнение движения произвольной динамической величины g, записанное с помощью стандартных СП, имеет вид

$$\dot g=\{g,H_c+v_\alpha\phi^1_\alpha\}, \tag{3}$$

где H_c — канонический гамильтониан, v_α — произвольные функции времени.

Из требования стационарности во времени первичных связей возникают вторичные связи между q и p, которые,в свою очередь,должны удовлетворять условию стационарности и приводить к связям следующего этапа. Ясно, что этот процесс следует продолжить до тривиального удовлетворения условий стационарности для связей. Обозначим вторичные связи всех этапов через $\phi^{m_\alpha}_\alpha$, где $\alpha=1,\cdots,N-R$, а индекс $m_\alpha=2,\cdots,M_\alpha$ указывает на этап вышеприведённой процедуры (значение $m_\alpha=1$ будет соответствовать далее первичным связям).

В последующем будем считать, что у нас возникают связи только первого рода [3], как ответственные за калибровочные степени свободы, то есть они и H_c (тоже величина первого рода) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\{\phi^{m_\alpha}_\alpha,\phi^{m_\beta}_\beta\}&=f^{m_\alpha}_{\alpha}{}^{m_\beta}_{\beta}{}^{m_\gamma}_{\gamma}\phi^{m_\gamma}_\gamma,\\ \{\phi^{m_\sigma}_\sigma,H_c\}&=g^{m_\sigma}_{\sigma}{}^{m_\tau}_{\tau}\phi^{m_\tau}_\tau,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\alpha,\beta,\gamma;\sigma,\tau=1,\cdots,N-R, \quad m_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}=1,\cdots,M_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}, \quad m_\tau=1,\cdots,m_\sigma+1.$$

(Здесь и далее по повторяющимся как верхним, так и нижним индексам подразумевается суммирование.)

В работах [9,11], исходя из вариационного принципа для действия нами были получены инфинитезимальные калибровочные преобразования в фазовом пространстве: [2]

$$\delta q_i(t)=\{q_i(t),G\},$$
$$\delta p_i(t)=\{p_i(t),G\},$$

где

$$G=\varepsilon^{m_\alpha}_\alpha\phi^{m_\alpha}_\alpha, \qquad \alpha=1,\cdots,N-R, \qquad m_\alpha=1,\cdots,M_\alpha, \tag{5}$$

а $\varepsilon^{m_\alpha}_\alpha$ удовлетворяют соотношениям

$$\dot\varepsilon^{m_\alpha}_\alpha+g^{m_\beta}_{\beta}{}^{m_\alpha}_{\alpha}\varepsilon^{m_\beta}_\beta=0, \qquad m_\beta\ge m_\alpha-1. \tag{6}$$

Эти преобразования были получены при условии, что СП первичных связей со всеми связями выражаются через первичные связи:

$$\{\phi^1_\beta,\phi^{m_\gamma}_\gamma\}=f^1_{\beta}{}^{m_\gamma}_{\gamma}{}^1_\alpha\phi^1_\alpha. \tag{7}$$

Условия, аналогичные (7), использовались также и другими авторами при получении калибровочных преобразований на основе иных подходов [7,8], связь которых с нашим мы предполагаем обсудить в следующей статье. Выполнение условия (7) является принципиальным при применении вариационного принципа, так как с его помощью устраняются нежелательные члены, пропорциональные множителям Лагранжа, в вариации действия. Нужно сказать, что условие (7) выполняется в физически интересных теориях, например в электродинамике, в теориях Янга–Миллса и т. д.. Однако в литературе есть примеры лагранжианов, где это условие не выполняется [8,10]. Поэтому естественно встаёт вопрос, можно ли получить калибровочные преобразования для таких теорий, и вообще, какова природа вырожденности лагранжианов в этом случае? Например, в работе [8] утверждается, что в приведённом там примере не существует генераторов калибровочных преобразований в гамильтоновом формализме, хотя в лагранжевом могут быть сконструированы калибровочные преобразования.

[2] Соответствующие калибровочные преобразования в лагранжевом формализме определяются следующим образом:

$$\delta q_i(t)=\{q_i(t),G\}\Big|_{p=\frac{\partial L}{\partial \dot q}}, \qquad \delta\dot q(t)=\frac{d}{dt}q(t).$$

3. Чтобы прояснить ситуацию со случаем, когда не выполняется условие (7), вспомним о произволе, который присущ обобщённому гамильтонову формализму Дирака. При наличии полного набора связей, определённых согласно процедуре Дирака ($\phi_\alpha^{m_\alpha}$, $\alpha = 1, \cdots, N - R$, $m_\alpha = 1, \cdots, M_\alpha$), которые функционально независимы, всегда можно перейти к эквивалентному набору связей с помощью преобразования

$$\bar{\phi}_\beta^{m_\beta} = C_\beta^{m_\beta}{}_\alpha^{m_\alpha} \phi_\alpha^{m_\alpha}, \tag{8}$$

где

$$\det \left\| C_\beta^{m_\beta}{}_\alpha^{m_\alpha} \right\|_\Sigma \neq 0, \tag{9}$$

то есть отличен от нуля указанный детерминант на поверхности Σ, определяемой полной системой связей.

Рассмотрим частный случай преобразования (8), в котором оставим без изменения первичные связи, т.е.

$$C_\beta^{1}{}_\alpha^{m_\alpha} = \delta_{\beta\alpha} \qquad \text{для любого } m_\alpha.$$

Нетрудно видеть, что с учётом (4) получается

$$\{\phi_\alpha^1, \bar{\phi}_\beta^{m_\beta}\} = \left[\{\phi_\alpha^1, C_\beta^{m_\beta}{}_\gamma^{m_\gamma}\} + f_\alpha^{1}{}_\delta^{m_\delta}{}_\gamma^{m_\gamma} C_\beta^{m_\beta}{}_\delta^{m_\delta}\right] \phi_\gamma^{m_\gamma} + f_\alpha^{1}{}_\delta^{m_\delta}{}_\gamma^{1} C_\beta^{m_\beta}{}_\delta^{m_\delta} \phi_\beta^1, \tag{10}$$

$$m_\beta, m_\delta, m_\gamma \geq 2.$$

Из выражения (10) видно, что если удастся подобрать $C_\beta^{m_\beta}{}_\gamma^{m_\gamma}$ таким образом, чтобы коэффициенты перед вторичными связями обращались в нуль

$$\{\phi_\alpha^1, C_\beta^{m_\beta}{}_\gamma^{m_\gamma}\} + f_\alpha^{1}{}_\delta^{m_\delta}{}_\gamma^{m_\gamma} C_\beta^{m_\beta}{}_\delta^{m_\delta} = 0, \tag{11}$$

то условие (7) будет выполнено для нового набора связей $\bar{\phi}_\beta^{m_\beta}$. Итак, для $C_\beta^{m_\beta}{}_\gamma^{m_\gamma}$ мы получили систему (25) линейных неоднородных уравнений в частных производных первого порядка. Можно показать, что эта система вполне интегрируема. Условие интегрируемости для систем уравнений типа (11) имеет вид [12]:

$$\left\{\phi_\sigma^1, \{\phi_\alpha^1, C_\beta^{m_\beta}{}_\gamma^{m_\gamma}\}\right\} - \left\{\phi_\alpha^1, \{\phi_\sigma^1, C_\beta^{m_\beta}{}_\gamma^{m_\gamma}\}\right\} = 0. \tag{12}$$

С использованием (11), свойств СП и после некоторых преобразований соотношение (12) запишется в виде

$$\Big[\{\phi_\alpha^1, f_\sigma^{1}{}_\delta^{m_\delta}{}_\gamma^{m_\gamma}\} - f_\alpha^{1}{}_\delta^{m_\delta}{}_\tau^{m_\tau} f_\sigma^{1}{}_\tau^{m_\tau}{}_\gamma^{m_\gamma} - \{\phi_\sigma^1, f_\alpha^{1}{}_\delta^{m_\delta}{}_\gamma^{m_\gamma}\} + \tag{13}$$
$$+ f_\sigma^{1}{}_\delta^{m_\delta}{}_\tau^{m_\tau} f_\alpha^{1}{}_\tau^{m_\tau}{}_\gamma^{m_\gamma}\Big] C_\beta^{m_\beta}{}_\delta^{m_\delta} = 0, \qquad m_\beta, m_\delta, m_\tau \geq 2.$$

Используя следующее тождество Якоби

$$\left\{\phi_\alpha^1, \{\phi_\sigma^1, \phi_\beta^{m_\beta}\}\right\} + \left\{\phi_\beta^{m_\beta}, \{\phi_\alpha^1, \phi_\sigma^1\}\right\} + \left\{\phi_\sigma^1, \{\phi_\beta^{m_\beta}, \phi_\alpha^1\}\right\} = 0, \qquad m_\beta \geq 2$$

и соотношение (4), получаем

$$\Big[\{\phi_\alpha^1, f_\sigma^{1}{}_\delta^{m_\delta}{}_\gamma^{m_\gamma}\} - f_\alpha^{1}{}_\delta^{m_\delta}{}_\tau^{m_\tau} f_\sigma^{1}{}_\tau^{m_\tau}{}_\gamma^{m_\gamma} - \{\phi_\sigma^1, f_\alpha^{1}{}_\delta^{m_\delta}{}_\gamma^{m_\gamma}\} + \tag{14}$$
$$+ f_\sigma^{1}{}_\delta^{m_\delta}{}_\tau^{m_\tau} f_\alpha^{1}{}_\tau^{m_\tau}{}_\gamma^{m_\gamma}\Big] \phi_\gamma^{m_\gamma} = \left\{\{\phi_\alpha^1, \phi_\sigma^1\}, \phi_\delta^{m_\delta}\right\},$$

$$m_\beta \geq 2, \qquad m_\gamma, m_\delta, m_\tau \geq 1.$$

Далее заметим, что СП между первичными связями можно без ограничения общности считать равными нулю в строгом смысле во всём фазовом пространстве. Так как каждая первичная связь содержит хотя бы одну импульсную переменную, то всегда существуют канонические преобразования, переводящие первичные связи в новые импульсные переменные (см. ниже). Поэтому выражения в квадратных скобках перед связями $\phi_\gamma^{m_\gamma}$ в левой части тождества (14), как коэффициенты перед функционально независимыми величинами, по отдельности обращаются в нуль. А поскольку в условии (13) перед $C_\beta^{m_\beta}{}_\delta^{m_\delta}$ стоят те же коэффициенты, то оно удовлетворяется тождественно. Этим доказано, что система уравнений (11) вполне интегрируема. Поэтому всегда существует набор связей, эквивалентный первоначальному, для которого условие (7) выполняется.

Теперь дадим метод перехода хотя бы к одному, выделенному, набору эквивалентных связей $\bar{\phi}_\beta^{m_\beta}$, когда все первичные связи являются импульсными переменными. Этого можно добиться с помощью итерационной процедуры, учитывая следующее свойство первичных связей:

$$\{\phi_\alpha^1, \phi_\beta^1\} = f_\alpha^{1}{}_\beta^{1}{}_\gamma^{1} \phi_\gamma^1,$$

которое следует из условия стационарности ϕ_α^1 и того, что мы рассматриваем связи только первого рода. Всегда существуют канонические преобразования следующего вида [13]:

$$\bar{P}_1 = \phi_1^1(q,p), \qquad \{\bar{Q}_1, \bar{P}_1\} = 1, \qquad \{\bar{Q}_\sigma, \bar{P}_\tau\} = \delta_{\sigma\tau},$$
$$\{\bar{P}_1, \bar{P}_\tau\} = \{\bar{Q}_1, \bar{P}_\tau\} = \{\bar{P}_1, \bar{Q}_\tau\} = \{\bar{Q}_1, \bar{Q}_\tau\} = 0, \tag{15}$$

$$\sigma, \tau = 2, \cdots, N.$$

(Черта над буквой символизирует первый этап итерационной процедуры.) Все оставшиеся первичные связи примут вид

$$\Phi^1_\alpha(\bar{Q},\bar{P}) = \phi^1_\alpha\big(q(\bar{Q},\bar{P}),p(\bar{Q},\bar{P})\big)\Big|_{\bar{P}_1=0}, \qquad \alpha = 2,\cdots,N-R.$$

С учётом каноничности преобразования запишем

$$\{\bar{P}_1,\Phi^1_\alpha\} = -\frac{\partial\Phi^1_\alpha}{\partial\bar{Q}_1} = \bar{f}^1{}_1{}^1{}_\alpha{}^1{}_\gamma\Phi^1_\gamma, \qquad \alpha,\gamma\geq 2,$$

причём Φ^1_α имеют следующую структуру [14]:

$$\Phi^1_\alpha = \bar{D}^1_\alpha{}^1_\gamma\bar{\Phi}^1_\gamma, \qquad \det\bar{D}\big|_\Sigma \neq 0, \tag{16}$$

где выполняются условия

$$\frac{\partial\bar{\Phi}^1_\gamma}{\partial\bar{Q}_1} = \frac{\partial\bar{\Phi}^1_\gamma}{\partial\bar{P}_1} = 0, \qquad \gamma\geq 2.$$

Поскольку все связи $\bar{\Phi}^1_\gamma$ не зависят $\bar{Q}_1$ и $\bar{P}_1$, проведём аналогичную процедуру для связи $\bar{\Phi}^1_2$ в подпространстве $2N-2$ измерений $(\bar{Q}_\sigma,\bar{P}_\sigma)(\sigma = 2,\cdots,N)$, т. е. не затрагивая $\bar{Q}_1$ и $\bar{P}_1$. Тогда все связи $\bar{\bar{\Phi}}{}^1_\alpha(\alpha = 3,\cdots,N-R)$, возникающие в формуле, аналогичной (30), не зависят от $\bar{Q}_1,\bar{P}_1$ и $\bar{\bar{Q}}_2$, $\bar{\bar{P}}_2$. Далее,проводя эту процедуру поэтапно $N-R-2$ раз, окончательно получим, что все первичные связи будут выступать в роли импульсов, поэтому они коммутируют между собой (окончательные импульсы и координаты будем обозначать P_α и Q_α, $\alpha = 1,\cdots,N-R$).

Все вторичные связи примут вид

$$\Phi^{m_\alpha}_\alpha(Q,P) = \phi^{m_\alpha}_\alpha\big(q(Q,P),p(Q,P)\big)\Big|_{P_\alpha=0}, \quad \alpha = 1,\cdots,N-R;\ m_\alpha = 2,\cdots,M_\alpha.$$

Благодаря каноничности преобразований можем записать

$$\{P_\alpha,\Phi^{m_\beta}_\beta\} = -\frac{\partial\Phi^{m_\beta}_\beta}{\partial Q_\alpha} = f^1_\alpha{}^{m_\beta}_\beta{}^{m_\gamma}_\gamma\Phi^{m_\gamma}_\gamma,$$

причём $\Phi^{m_\alpha}_\alpha$ имеют следующую структуру [14]:

$$\Phi^{m_\alpha}_\alpha = A^{m_\alpha}_\alpha{}^{m_\beta}_\beta\widetilde{\Phi}^{m_\beta}_\beta, \qquad \det A\big|_\Sigma \neq 0, \tag{17}$$

где выполняются условия

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}^{m_\alpha}_\alpha}{\partial Q_\beta} = \frac{\partial\widetilde{\Phi}^{m_\alpha}_\alpha}{\partial P_\beta} = 0, \qquad \alpha,\beta = 1,\cdots,N-R, \quad m_\alpha\geq 2.$$

Построенный набор связей (первичных в роли импульсов и вторичных $\widetilde{\Phi}^{m_\alpha}_\alpha$) удовлетворяет условию (7) с обращающейся в нуль правой частью, то есть получен искомый набор связей. Заметим, что $(A^{-1})^{m_\alpha}_\alpha{}^{m_\beta}_\beta$ в (17) являются одним из решений системы уравнений (11).

Из рассмотрений этого раздела можно заключить, что трудность, связанная с невыполнением условия (7) для конкретного вырожденного лагранжиана, устранима посредством перехода к эквивалентному набору связей. Поэтому предложенный нами ранее способ построения калибровочных преобразований [9;11] применим в общем случае.

4. Примеры того, как строить калибровочные преобразования для вырожденных систем при выполнении условия (7), были рассмотрены в наших предыдущих статьях [9,11]. Теперь мы рассмотрим пример, когда условие (7) нарушается.

Возьмём лагранжиан [10]:

$$L = \frac{1}{2}\left[\mathbf{q}^2\dot{\mathbf{q}}^2 - \mathbf{q}\cdot\dot{\mathbf{q}}^2\right], \tag{18}$$

где $\mathbf{q} = (q_1,\cdots,q_N)$, $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_N)$.

Тогда гамильтониан имеет вид

$$H_c = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{q}^2},$$

кроме того, имеются одна первичная и одна вторичная связи первого рода (других связей не возникает):

$$\phi^1_1 = \mathbf{q}\cdot\mathbf{p}, \qquad \phi^2_1 = \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{q}^2}.$$

Прямой проверкой можно убедиться, что

$$\{\phi^1_1,\ \phi^2_1\} = 4\phi^2_1,$$

то есть условие (7) не выполняется. Поэтому перейдём к эквивалентному набору связей по формуле [8]

$$\bar{\phi}^1_1 = \phi^1_1, \qquad \bar{\phi}^2_1 = C\phi^2_1.$$

Тогда уравнение (11) для C примет вид

$$p_i\frac{\partial C}{\partial p_i} - q_i\frac{\partial C}{\partial q_i} + 4C = 0.$$

Возьмём одно из частных решений:

$$C = q_1^4.$$

Для нового набора связей условие (7) выполняется с нулевой правой частью, и можно использовать процедуру, описанную в разделе 2. Уравнение (6) запишется как

$$\varepsilon_1^2 + \frac{2}{q_1^4}\,\varepsilon_1^1 + \frac{4p_1}{q_1\mathbf{q}^2}\,\varepsilon_1^2 = 0. \tag{19}$$

Обозначая $\varepsilon_1^2 = \varepsilon$, выражая ε_1^1 через соотношение (19) и подставляя их в формулу (5), запишем калибровочные преобразования в фазовом пространстве:

$$\begin{aligned} \delta q_i &= -\frac{1}{2}q_1^4\, q_i\, \dot{\varepsilon} - 2\frac{q_1^3}{\mathbf{q}^2}\,(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}\,\delta_{i1} + p_1\, q_i - q_1\, p_i)\,\varepsilon, \\ \delta p_i &= q_1^3\,(2\mathbf{q}\cdot\mathbf{p}\,\delta_{i1} + \frac{1}{2}\,q_1\,p_i)\,\dot{\varepsilon} + 2\frac{q_1^2}{\mathbf{q}^2}\,\big[(3p_1\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{p} - 2q_1\,\mathbf{p}^2)\,\delta_{i1} + \\ &\qquad + q_1\,p_1\,p_i + \frac{q_1}{\mathbf{q}^2}\,(q_1\,q_i\,\mathbf{p}^2 - 2p_1\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{p})\big]\,\varepsilon. \end{aligned} \tag{20}$$

Переходя в конфигурационное пространство, имеем (см. формулы сноски 2 на стр.3)

$$\delta q_i = -\frac{1}{2}q_1^4\, q_i\, \dot{\varepsilon} - 2q_1^3\,(\dot{q}_1\, q_i - \dot{q}_i\, q_1)\,\varepsilon, \qquad \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\,\delta q_i, \tag{21}$$

и можно убедиться, что

$$\delta L = \frac{d}{dt}\big[q_1^4\,(\mathbf{q}^2\,\dot{\mathbf{q}}^2 - \mathbf{q}\cdot\dot{\mathbf{q}}^2\,)\,\varepsilon\big], \tag{22}$$

то есть, что преобразования (21) являются преобразованиями симметрии во второй теореме Нётер.

Тот же результат можно получить, следуя схеме, описанной в предыдущем разделе, с применением канонических преобразований (15), которые в данном случае примут вид

$$P_1 = \mathbf{q}\cdot\mathbf{p}, \qquad Q_1 = \ln q_1,$$

$$P_i = p_i\, q_i, \qquad Q_i = \ln\frac{q_i}{q_1}, \qquad i \geq 2.$$

В последней строчке, в отличие от всего предыдущего текста статьи, нет суммирования по повторяющимся индексам.

В новых координатах имеем

$$\Phi_1^2 = e^{-4Q_1}\,\Big[\big(\sum_{i=2}^{N} P_i\big)^2 + \sum_{i=2}^{N}(P_i)^2 c^{-2Q_i}\,\Big]\Big/\Big[1 + \sum_{i=2}^{N} e^{2Q_i}\,\Big].$$

Отсюда видно, что матрица в формуле (17) имеет единственный элемент:

$$A_{1\ 1}^{2\ 2} = e^{-4Q_1}.$$

5. Итак, показано, что предложенный в наших предыдущих работах [9,11] метод построения калибровочных преобразований применим для произвольных вырожденных лагранжианов. Причём для получения явного вида этих преобразований не требуется ничего, кроме конкретного вида лагранжиана. Отметим практическое достоинство нашего метода, не требующего при своей реализации явного разрешения первичных связей относительно импульсных переменных, в отличие от других подходов [5,6,14], где это требуется с самого начала. Как в этом моменте, так и в вопросе классификации связей мы остаёмся в рамках дираковского подхода.

Как известно, калибровочно-инвариантные теории относятся к вырожденному типу. Так как доказана возможность построения калибровочных преобразований для любых вырожденных лагранжианов, то справедливо и следующее утверждение: вырожденность теорий со связями первого рода обусловлена их калибровочной инвариантностью. Закон калибровочных преобразований зависит от $N - R$ существенных параметров ($N - R$— количество первичных связей), а также от их производных по времени, причём высшая производная входит в него с необходимостью, и её порядок на единицу меньше числа этапов при получении вторичных связей согласно процедуре Дирака.

Выясненный ранее [11] в классе теорий с ограничением на алгебру связей (7) механизм появления высших производных от координат в законе преобразования симметрии во второй теореме Нётер оказывается действующим в общем случае (без ограничений на алгебру связей). Заметим также, что при использовании предлагаемого метода получения калибровочных преобразований не возникает дополнительных трудностей и не требуется дополнительных предположений по сравнению с подходом Дирака.

Авторы выражают благодарность А.Б.Говоркову, А.Н.Квинихидзе, В.В.Нестеренко и А.М.Хведелидзе за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fradkin E.S., Vilkovisky G.A.* Phys. Lett. 1975. V.B 55. No.2. P.224-226.
   Batalin I.A., Fradkin E.S. Phys. Lett. 1983. V.B 122. No.2. P.157-164; Riv. Nuovo Cim. 1986. V.9. No.10. P.1.
   См. обзор: *Henneaux M.* Phys. Rep. 1985. V.126. No.1. P.1-66.
2. *Batalin I.A., Lavrov P.M., Tyutin I.V.* J. Math. Phys. 1990. V.31. No.1. P.6-13.
3. *Dirac P.A.M.* Can. J. Math. 1950. V.2. P.129; Lectures on Quantum Mechanics. New York: Yeshiva Univ.Press, 1964.
4. *Anderson J.L., Bergmann P.G.* Phys. Rev. 1951. V.83. No.5. P.1018-1025.
   Bergmann P.G., Goldberg J. Phys. Rev. 1955. V.98. No.2. P.531-538.
5. *Castellani L.* Ann. Phys. 1982. V.143. No.2. P.357-371.
6. *Sudarshan E.C.G., Mukunda N.* Classical Dynamics–A Modern Perspective. New York: Wiley-Interscience, 1974. P.78-107.
7. *Henneaux M., Teitelboim G., Zanelli J.* Nucl. Phys. 1990. V.B 332. No.1. P.169–188.
8. *Gràcia X., Pons J.M.* Lagrangian gauge transformations without Hamiltonian counterpart. Preprint UB-ECM-PF 13/90. Barcelona: Universitat de Barcelona, 1990.
9. *Gogilidze S.A., Sanadze V.V., Surovtsev Yu.S., Tkebuchava F.G.* The theories with higher derivatives and gauge transformation construction. JINR Communication E2-87-390. Dubna: JINR, 1987; Int. J. Mod. Phys. 1989. V.A 4. No.16. P.4165–4175.
10. *Нестеренко В.В., Червяков А.М.* Сингулярные лагранжианы. Классическая динамика и квантование. Препринт ОИЯИ Р2-86-323. Дубна: ОИЯИ, 1986.
11. *Гогилидзе С.А., Санадзе В.В., Суровцев Ю.С., Ткебучава Ф.Г.* Высшие производные в калибровочных преобразованиях. Препринт ОИЯИ Р2-92-454. Дубна: ОИЯИ, 1992.

12. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т.4. Ч.2. М.: Наука, 1981.
13. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947.
14. *Гитман Д.М., Тютин И.В.* Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 декабря 1992 года.