92-549

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-92-549

Н.А.Черников

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ

Направлено в труды Международной конференции «Лобачевский и современная геометрия», Казань, 1992

1992

Черников Н.А. P2-92-549
Геометрия Лобачевского и современная теория тяготения

В работе рассмотрены основы современной теории тяготения в пространстве Лобачевского. Фоновая связность в пространственно-временном мире задается уравнениями движения свободной материальной точки в пространстве Лобачевского. Приведено полученное ранее автором решение задачи о гравитационном поле точечной массы. В решение входят три константы γ, k и c. Первая константа принадлежит Ньютону, вторая — Лобачевскому. Третья константа, скорость света c, играет ту же роль в пространстве скоростей, какую константа Лобачевского играет в видимом нами мире. По приглашению Оргкомитета работа была доложена автором на общем пленарном заседании Международной конференции «Лобачевский и современная геометрия», посвященной двухсотлетию со дня рождения Н.И.Лобачевского (Казань, 1992).

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1992

Перевод автора

Chernikov N.A. P2-92-549
The Lobachevsky Geometry and the Modern Gravity Theory

In the paper the principles of Modern Gravity Theory in the Lobachevsky space are considered. The equations of motion of a point particle in the Lobachevsky space define the background connection in the space-time. The solution of the problem of a gravitational field of a point mass obtained earlier by the author is given. The solution contains three constants γ, k and c. The first constant is introduced by Newton; the second, Lobachevsky. The third constant, the light velocity c, is the Lobachevsky constant for the velocity space. The investigation has been presented as an invited talk at the International conference «Lobachevsky and Modern Geometry» devoted to the 200th anniversary of N.I. Lobachevsky (Kazan, 1992).

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1992

Лобачевский внёс "*новые начала*" не только в геометрию. Его мысль о том, "*что силы всё производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы*" [1], выводит теоретическую физику за пределы механики Ньютона и за пределы ньютоновской и эйнштейновской теорий тяготения. Более семидесяти лет спорили о сути эйнштейновского псевдотензора энергии. Геометрия Лобачевского помогла разобраться в этом трудном вопросе. Не секрет, что "*среди тех, кто любит порассуждать об ошеломляющих трудах Эйнштейна, мало кто представляет себе суть законов Ньютона*" [2]. Геометрия Лобачевского помогает разобраться и в этом вопросе.

1. ВВЕДЕНИЕ ФОНОВОЙ СВЯЗНОСТИ

Известно, что эйнштейновская теория тяготения состоит из двух частей. Её первая часть характеризуется метрическим тензором g_{ab} и тензором массы M_{ab}, которые связываются тензорным уравнением

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8 \pi \gamma M_{ab} . \qquad (1)$$

Эта часть имеет ярко выраженный тензорный характер и не вызывает возражений. Назовём её гильбертовской частью эйнштейновской теории, поскольку она совпадает с теорией Гильберта.

Вторая часть эйнштейновской теории тяготения имеет псевдотензорный характер, за что её порицают, хотя благодаря как раз такому её характеру во второй части решается проблема энергии гравитационного поля. Главный критический аргумент - плотность энергии в эйнштейновской теории зависит от выбора координатной карты. Последнее следует из того, что псевдотензор энергии, будучи квадратичной формой относительно аффинной связности

$$\Gamma^{a}_{mn} = \frac{1}{2} g^{as} (\partial_m g_{sn} + \partial_n g_{sm} - \partial_s g_{mn}) , \qquad (2)$$

в любой наперёд заданной точке при подходящем выборе координат вместе со связностью (2) обращается в нуль.

Между тем, как показано в работах [3], понятие псевдотензора энергии нетрудно примирить с тензорным анализом, если наряду с (2) ввести ещё одну аффинную связность без кручения. Назовём её фоновой и обозначим $\check{\Gamma}^{a}_{mn}$. Первая связность определяется уравнениями свободного падения материальной точки (в гравитационном поле), вторая - уравнениями свободного движения материальной точки (в отсутствие гравитационного поля). Тензоры кривизны, задаваемые связностями Γ^{a}_{mn} и $\check{\Gamma}^{a}_{mn}$, обозначим, соответственно, $R_{mnb}{}^{a}$ и $\check{R}_{mnb}{}^{a}$. Имеем тензор

$$R_{mnb}{}^{a} = \partial_m \Gamma^{a}_{nb} - \partial_n \Gamma^{a}_{mb} + \Gamma^{a}_{ms} \Gamma^{s}_{nb} - \Gamma^{a}_{ns} \Gamma^{s}_{mb} \qquad (3)$$

и тензор, по такому же правилу задаваемый фоновой связностью. Свёрнутые тензоры кривизны R_{ab} и $\check{R}_{ab}$, определим по правилу

$$R_{ab} = R_{sab}{}^{s} . \qquad (4)$$

Заменив эйнштейновский псевдоскалярный лагранжиан

$$\mathcal{L} = g^{mn} (\Gamma^{a}_{mb} \Gamma^{b}_{an} - \Gamma^{a}_{ab} \Gamma^{b}_{mn}) \qquad (5)$$

гравитационного поля на скалярный

$$\check{\mathcal{L}} = g^{mn} (P^{a}_{mb} P^{b}_{an} - P^{a}_{ab} P^{b}_{mn}) , \qquad (6)$$

где

$$P^{a}_{mn} = \check{\Gamma}^{a}_{mn} - \Gamma^{a}_{mn} , \qquad (7)$$

и сохранив без каких-либо изменений лагранжиан "материи", получаем следующий рецепт перехода от эйнштейновской к новой теории тяготения. В гравитационном уравнении (1) тензор (4) надо заменить на разность

$$S_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} (\check{R}_{a} + \check{R}_{ba}) . \qquad (8)$$

В результате получится новое гравитационное уравнение

$$S_{ab} - \frac{1}{2} S_{mn} g^{mn} g_{ab} = 8 \pi \gamma M_{ab} . \qquad (9)$$

В эйнштейновских псевдотензорах, подобно (5), полиномиально зависящих от связности Кристоффеля (2), последнюю надо заменить на разность (7). В результате вместо *псевдо* получаются истинные тензоры, такие как (6). Новая теория гравитации не вступает в противоречие с тензорным анализом, так как разность двух любых аффинных связностей является тензором. Условия гармоничности в новой теории выглядят следующим образом:

$$\Phi^{a} = 0 , \qquad (10)$$

где

$$\Phi^{a} = g^{mn} P^{a}_{mn} . \qquad (11)$$

Получающийся по вышеуказанному рецепту тензор энергии равен

$$\varepsilon^{a}_{b} = \Phi^{mn}{}_{b} (P^{a}_{mn} - P_m \delta^{a}_{n}) - \check{\mathcal{L}} \delta^{a}_{b} , \qquad (12)$$

где

$$P_m = P^{a}_{ma} , \qquad (13)$$

δ^{a}_{b} - единичный аффинор,

$$\Phi^{mn}{}_{a} = g^{ms} P^{n}_{sa} + g^{ns} P^{m}_{sa} - g^{mn} P_a . \qquad (14)$$

Располагая двумя связностями, удобно для каждого тензора T составлять две ковариантные производные ∇T и $\check{\nabla} T$. В связи с теоремой Гаусса для пространства с римановой метрикой g_{ab} полезно заметить правильное для всякого вектора V^{a} равенство

$$(\check{\nabla}_a - P_a)\, V^a = \nabla_a\, V^a \, . \tag{15}$$

Тензор (7) можно представить в виде

$$P_{mn}^{\ \ a} = -\frac{1}{2}\, g^{as}\, (\check{\nabla}_m g_{sn} + \check{\nabla}_n\, g_{sm} - \check{\nabla}_s\, g_{mn}) \, , \tag{16}$$

а тензор (14) – в виде

$$\Phi^{mn}_{\ \ a} = (\check{\nabla}_a - P_a)\, g^{mn} \, . \tag{17}$$

Вектор (11) равен

$$\Phi^a = \Phi^{an}_{\ \ n} = (\check{\nabla}_n - P_n)\, g^{na} \, . \tag{18}$$

Тензор (12) можно представить в виде

$$\mathcal{E}^a_b = 2\, g^{an}\, S_{nb} - S_{mn}\, g^{mn}\, \delta^a_b + (\check{\nabla}_n - P_n)\, (\Phi^{na}_{\ \ b} - \delta^n_b\, \Phi^a - U^{an}_{\ \ b}), \tag{19}$$

где

$$U^{an}_{\ \ b} = g^{ns}\, P_{bs}^{\ \ a} - g^{as}\, P_{bs}^{\ \ n} + \delta^a_b\, (\Phi^n - P^n) - \delta^n_b\, (\Phi^a - P^a) \, . \tag{20}$$

В свою очередь,

$$P^a = g^{as}\, P_s \, . \tag{21}$$

Интересно также равенство

$$\nabla_a\, g^{an}\, (\check{R}_{nb} + \check{R}_{bn}) - \nabla_b\, g^{mn}\, \check{R}_{mn} = \tag{22}$$

$$= (\check{\nabla}_a - P_a)\, [g^{an}\, (\check{R}_{nb} + \check{R}_{bn})] - g^{mn}\, \check{\nabla}_b\, \check{R}_{mn} \, .$$

С его помощью из гравитационного уравнения (9) нетрудно получить следствие

$$(\check{R}_{nb} + \check{R}_{bn})\, \Phi^n = 0 \, , \tag{23}$$

коль скоро фоновая связность удовлетворяет условию

$$\check{\nabla}_a\, (\check{R}_{nb} + \check{R}_{bn}) = 0 \, . \tag{24}$$

Изложенная теория содержит эйнштейновскую как частный случай. Действительно, если

$$(\check{R}_{ab} + \check{R}_{ba}) = 0 \, , \tag{25}$$

то уравнение (9) совпадает с уравнением (1), а при более сильном условии

$$\check{R}_{mnb}^{\ \ \ a} = 0 \tag{26}$$

найдётся такая координатная карта, в которой всюду

$$\check{\Gamma}_{mn}^{\ \ a} = 0 \, . \tag{27}$$

В такой карте тензор энергии (12) совпадает с эйнштейновским псевдотензором.

Если условие (25) не выполняется, то вышеизложенная теория выступает в бесспорно новом виде. Равномерное прямолинейное движение материальной точки в абсолютно покоящемся пространстве Лобачевского задаёт фоновую связность, при которой отклонения от условия (25) минимальны. При этом в теорию тяготения вводится новая для неё константа Лобачевского k.

2. КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО СКОРОСТЕЙ [4]

Пространственно-временной мир X четырёхмерен. Поэтому мир P (x) касательных к нему прямых в точке $x \in X$ является трёхмерным проективным пространством. Проективными координатами в P (x) являются дифференциалы $d\, x^a$. Рассмотрим проходящую через x мировую траекторию материальной точки (частицы). Прямую, касательную к мировой траектории в точке x, назовём мировой скоростью частицы в этой точке. В пространстве P (x) мировые скорости составляют трёхмерную область V (x), в которой реализуется абсолютная геометрия, основывающаяся на всех евклидовых постулатах, кроме пятого. Эта область называется пространством скоростей в точке x. Она задаётся неравенством

$$\theta_{ab}\, d\, x^a\, d\, x^b > 0 \, , \tag{28}$$

где θ_{ab} – тензор времени. Левая часть последнего неравества является квадратом $d\,\tau^2$ дифференциала собственного времени τ материальной точки.

Существуют два и только два способа выделить область V(x). При одном способе пятый постулат Евклида принимается, при другом - отвергается. В первом случае в пространстве скоростей V(x) реализуется геометрия Евклида и теория называется нерелятивистской. Во втором - реализуется геометрия Лобачевского и теория называется релятивистской. Аналогом вышеупомянутой константы Лобачевского для пространства V (x) является скорость света c. Различие между двумя константами состоит только в том, что константа k характеризует геометрию видимого мира и измеряется единицами длины, а константа c характеризует геометрию незримого мира и измеряется единицами скорости. Согласно этому определению, ньютоновская теория тяготения является нерелятивистской, а эйнштейновская - релятивистской. Обе эти теории не содержат константы k. Нерелятивистская же теория тяготения Лобачевского [5], напротив, содержит константу k; при $k \to \infty$ она переходит в теорию тяготения Ньютона. В работах [6] построена релятивистская теория тяготения, содержащая константу k; последняя при $k \to \infty$ переходит в теорию тяготения Эйнштейна, а при $c \to \infty$ переходит в теорию тяготения Лобачевского.

В нерелятивистском случае тензор времени представляется в виде произведения

$$\theta_{ab} = \theta_a\,\theta_b\,, \qquad (29)$$

где θ_a - ковектор времени. В соответствии с (28) область V (x) в этом случае задаётся неравенством

$$\theta_a\,d\,x^a \neq 0\,, \qquad (30)$$

которое к тому же задаёт в V (x) аффинную геомерию. Ковектор θ_a вместе с ортогональным к нему кометрическим тензором g^{ab} задает в V (x) геометрию Евклида. Условие ортогональности означает

$$g^{ab}\,\theta_b = 0. \qquad (31)$$

Можно так подобрать координаты

$$x^1 = x,\quad x^2 = y,\quad x^3 = z,\quad x^4 = t, \qquad (32)$$

что в рассматриваемой мировой точке следующие формы приведутся к каноническому виду

$$\theta_a\,d\,x^a = d\,t, \qquad g^{ab}\,\partial_a\,\partial_b = \partial_1\,\partial_1 + \partial_2\,\partial_2 + \partial_3\,\partial_3\,. \qquad (33)$$

В релятивистском случае тензор времени сопряжён с кометрическим тензором условием

$$g^{as}\,\theta_{sb} = -\,c^{-2}\,\delta^a_b\,. \qquad (34)$$

В пределе $c \to \infty$ он принимает вид (29). В координатах (32)

$$g^{ab}\,\partial_a\,\partial_b = \partial_1\,\partial_1 + \partial_2\,\partial_2 + \partial_3\,\partial_3 - c^{-2}\,\partial_4\,\partial_4\,, \qquad (35)$$

$$\theta_{ab}\,d\,x^a\,d\,x^b = d\,t^2 - (d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2)\,/\,c^2\,. \qquad (36)$$

В нерелятивистском случае имеется ковектор времени θ_a, но нет метрического тензора. В релятивистском случае, наоборот, имеется метрический тензор

$$g_{ab} = -\,c^2\,\theta_{ab}\,, \qquad (37)$$

но нет ковектора времени.

Итак, геометрия Евклида в пространстве скоростей V (x) приводит к галилеевой метризации многообразия X, а геометрия Лобачевского - к лоренцевой. В первом случае геометрия касательного мира T (x) определяется группой Галилея, а во втором - группой Лоренца.

3. СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Свободное движение материальной точки задаёт в мире X фоновую связность $\overset{\times}{\Gamma}{}^a_{mn}$.

Если материальная точка движется в пространстве Евклида, то фоновая связность примитивна. Найдётся координатная карта у, в которой все компоненты примитивной связности равны нулю. В произвольной карте x её компоненты равны

$$\check{\Gamma}^{a}_{mn} = \frac{\partial x^a}{\partial y^s} \frac{\partial^2 y^s}{\partial x^m \partial x^n} . \qquad (38)$$

Эти компоненты при желании можно представить в виде символов Кристоффеля для метрического тензора

$$\check{g}_{ab} = C_{mn} \frac{\partial y^m}{\partial x^a} \frac{\partial y^n}{\partial x^b} , \qquad (39)$$

где (C_{mn}) - произвольная невырожденная матрица, не зависящая от координат. Но такое представление необязательно, так как в теорию тяготения в качестве фона входят только компоненты связности $\check{\Gamma}^{a}_{mn}$.

Перейдём к материальной точке в пространстве Лобачевского. Введём абсолютное, по Ньютону, время t и абсолютно покоящееся пространство Лобачевского. Введём пространственные координаты x^1, x^2, x^3 и обозначим $t = x^4$. Метрическую форму пространства Лобачевского обозначим

$$d\, l^2 = L_{\alpha\beta}\, d x^\alpha\, d x^\beta . \qquad (40)$$

Кометрический тензор, связность Кристоффеля и тензор кривизны для этой метрики обозначим, соответственно, $L^{\alpha\beta}$, $L^{\alpha}_{\mu\nu}$ и $L^{\ \ \ \alpha}_{\mu\nu\beta}$. Последний равен

$$L^{\ \ \ \alpha}_{\mu\nu\beta} = (L_{\mu\beta}\, \delta^{\alpha}_{\nu} - L_{\nu\beta}\, \delta^{\alpha}_{\mu}\,)\, k^{-2}. \qquad (41)$$

Утверждение Галилея о том, что свободная материальная точка движется прямолинейно и равномерно, вводит в мир X фоновую связность с компонентами

$$\check{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = L^{\alpha}_{\mu\nu} , \quad \check{\Gamma}^{\alpha}_{\mu 4} = 0, \quad \check{\Gamma}^{\alpha}_{4\nu} = 0, \quad \check{\Gamma}^{4}_{mn} = 0, \quad \check{\Gamma}^{\alpha}_{44} =0. \qquad (42)$$

Эти компоненты можно представить в виде символов Кристоффеля

для метрики

$$d\, \check{s}^{\,2} = L_{\alpha\beta}\, d x^\alpha\, d x^\beta - C^2\, d\, t^2 , \qquad (43)$$

где C - любая константа. Полагая C = c, заключаем, что и релятивистское движение свободной материальной точки приводит к фоновой связности (42).

В случае связности (42) свёрнутый тензор кривизны равен

$$\check{R}_{\alpha\beta} = - 2\, k^{-2}\, L_{\alpha\beta} , \quad \check{R}_{\alpha 4} = 0, \quad \check{R}_{4\beta} = 0, \quad \check{R}_{44} = 0. \qquad (44)$$

Полученные результаты будут применены к гравитационному полю, создаваемому точечной массой. При этом наиболее удобны сферические координаты ρ, θ и φ. В этих координатах метрика (40) принимает следующий вид:

$$d\, l^2 = d\, \rho^2 + r^2\, (d\, \theta^2 + \sin^2 \theta\, d\, \varphi^2), \qquad (45)$$

где

$$r = k\, sh\, \frac{\rho}{k} . \qquad (46)$$

4. СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Свободное падение материальной точки задаёт в мире X аффинную связность Γ^{a}_{mn}.

В релятивистском случае эта связность представляется символами Кристоффеля (2) для метрического тензора (37). Геодезические, определяемые этой связностью и удовлетворяющие условию (28), являются мировыми траекториями свободно падающей материальной точки.

В нерелятивистском случае свободное падение материальной точки задаётся функцией Лагранжа

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2} v^2 - U , \qquad (47)$$

где v - скорость частицы, U - гравитационный потенциал. Если частица падает в пространстве Лобачевского, то

$$v^2 = L_{\alpha\beta} \frac{d\, x^\alpha}{d\, t} \frac{d\, x^\beta}{d\, t} . \tag{48}$$

Определяемые функцией (47) уравнения Лагранжа задают в мире X аффинную связность, отличающуюся от связности (42) лишь компонентами

$$\Gamma_{44}^{\alpha} = L^{\alpha\nu} \partial_\nu U . \tag{49}$$

В данном случае тензор аффинной деформации (7) равен

$$P_{mn}^{\ \ a} = - \theta_m \theta_m \ g^{as} \partial_s U . \tag{50}$$

При этом независимо от U кометрический тензор в X имеет следующие компоненты:

$$g^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} , \ g^{\alpha 4} = 0, \ g^{4\beta} = 0, \ g^{44} = 0, \tag{51}$$

а ковектор времени - компоненты:

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = 0, \quad \theta_4 = 1. \tag{52}$$

Свёрнутый тензор кривизны для аффинной связности, задаваемой потенциалом U, отличается от (44) лишь компонентами

$$R_{44} = \Delta U , \tag{53}$$

где ΔU - второй дифференциальный параметр Бельтрами:

$$\Delta = L^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu - L_{\mu\nu}^{\sigma} \partial_\sigma). \tag{54}$$

Следовательно, в данном случае

$$R_{ab} - \check{R}_{ab} = \theta_a \theta_b \Delta U. \tag{55}$$

Поэтому в нерелятивистском случае гравитационное уравнение

$$\Delta U = 4 \pi \gamma \rho, \tag{56}$$

где ρ - плотность массы в пространстве Лобачевского, можно записать в виде

$$R_{ab} - \check{R}_{ab} = 4 \pi \gamma M_{ab} , \tag{57}$$

где M_{ab} - нерелятивистский тензор массы, равный

$$M_{ab} = \rho\, \theta_a \theta_b . \tag{58}$$

Гравитационное же уравнение Ньютона, поскольку оно рассматривается в пространстве Евклида, можно записать в виде

$$R_{ab} = 4 \pi \gamma M_{ab} . \tag{59}$$

5. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ

В задаче о гравитационном поле точечной массы фигурируют константы k и c, каждая из которых либо равна бесконечности, либо меньше её. Поэтому имеется $2^2 = 4$ варианта:

1) $k = \infty$, $c = \infty$. Вариант Ньютона.
2) $k < \infty$, $c = \infty$. Вариант Лобачевского.
3) $k = \infty$, $c < \infty$. Вариант Шварцшильда.
4) $k < \infty$, $c < \infty$. Самый общий вариант.

Четвертый вариант так относится к третьему варианту, как вариант Лобачевского к варианту Ньютона. Если $k < \infty$, то гравитационное поле погружено в пространство Лобачевского; если $k = \infty$, то поле погружено в пространство Евклида. Если $c < \infty$, то теория считается релятивистской; если $c = \infty$, то теория считается нерелятивистской.

Из четвёртого варианта в качестве предельных получаются три предыдущих. Поэтому приведём здесь решение лишь четвёртого варианта. Решение представляется следующей метрикой:

$$e^{-2\alpha} k^2 \{ \Xi^{-1} d \xi^2 + sh^2(\xi + \alpha) d \Omega^2 \} - e^{2\alpha} c^2 \Xi d t^2,$$

где

$$\Xi = \frac{sh (\xi - \alpha)}{sh (\xi + \alpha)} , \quad \xi = \frac{\rho}{k} ,$$

$$d \Omega^2 = d \theta^2 + sin^2 \theta d \varphi^2 ,$$

$$\frac{1}{2} sh 2 \alpha = \frac{\gamma m}{k c^2} ,$$

m - масса источника гравитационного поля. Эта метрика удовлетворяет уравнению $R_{ab} = \check{R}_{ab}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лобачевский Н.И. *Новые начала геометрии с полной теорией параллельных.* Полн. собр. соч., Т. 2. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949, с.159.
2. Честертон Г.К. Писатель в газете. М. : Прогресс, 1984, с.254.
3. Черников Н.А. Сообщения Объединённого института ядерных исследований Р2-87-683, Р2-88-27, Р2-88-778, Р2-89-224, Р2-90-399. Дубна.
4. Черников Н.А. *Геометрия Лобачевского как физическая наука.* В сб. "150 лет геометрии Лобачевского." М. : ВИНИТИ, 1977, с.146.
5. Черников Н.А. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1992, Т. 23, вып. 5, с. 1155-1191.
6. Черников Н.А. Сообщения Объединённого института ядерных исследований Р2-92-108, Р2-92-192. Дубна.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 декабря 1992 года.