объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-92-511

Л.Г.Мардоян*, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян*,
Т.А.Чатрчян*

РАЗЛОЖЕНИЕ КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ ПО СФЕРИЧЕСКИМ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

---

*Ереванский государственный университет

1992

Мардоян Л.Г. и др. P2-92-511
Разложение кольцеобразных функций по сферическим

Получено явное выражение кольцеобразной матрицы, связывающей кольцеобразные функции, относящиеся к разным значениям параметра аксиальности. Найдена связь этой матрицы с $6j$-символами. Уделено специальное внимание разложению кольцеобразных функций по сферическим.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод авторов

Mardoyan L.G. et al. P2-92-511
Expansion of Ring-Shaped Functions over Spherical Functions

The explicit expression is derived for the matrix connecting ring-shaped functions associate with different values of the axial parameter. The relation of this matrix with $6j$-symbols is found. Special attention is paid to expansion of ring-shaped functions over spherical ones.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992

1 Введение

Рассматриваемая нами проблема относится к квантовой механике кольцеобразных потенциалов. В общем случае такие потенциалы имеют вид

$$U(r,\vartheta) = V(r) + \frac{\Lambda}{r^2 \sin^2\vartheta}.$$

Здесь $V(r)$-любое центрально-симметричное поле, ϑ- угол между осью z и радиусом-вектором частицы, Λ- неотрицательный параметр, характеризующий интенсивность аксиально-симметричной добавки к полю $V(r)$. При $V(r) = -\alpha/r$ и $V(r) = r^2/2$ говорят о кольцеобразном атоме водорода и о кольцеобразном пространственном осцилляторе. Обе послндние модели точно решаются как в классической, так и в квантовой механике [1,2]. Переменные разделяются для $V(r) = -\alpha/r$ в сферических и в параболических, а для $V(r) = r^2/2$ - в сферических и цилиндрических координатах [3,4]. Известны как базисы, соответствующие указанным координатам, так и матрицы межбазисных разложений [5,6]. Исследованы также симметрийные [7,8] и статистические аспекты [9,10] этих моделей. Модель с $V(r) = -\alpha/r$, помимо сказанного, интересна еще своим применением для описания спектроскопии бензольных колец [3].

Разделение переменных в сферических координатах r, ϑ и φ порождает функцию $Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta)$, описывающую угловую зависимость волновой функции при любом $V(r)$, т.е. функцию, играющую для кольцеобразного поля ту же роль, какую сферические функции - для центрально-симметричного поля. Параметр δ связан с параметром Λ соотношением

$$\delta = \sqrt{m^2 + 2\Lambda} - |m|,$$

а квантовые числа m и l пробегают значения $m = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm l; l = |m|, |m|+1, ...$, и при $\delta = 0$ имеют смысл орбитального и магнитного квантового числа.

В настоящей статье мы исследуем задачу о разложении кольцеобразных функций по сферическим. Такое разложение совершенно необходимо при работе с кольцеобразными моделями, т.к. оно сводит вычисление матричных элементов от операторов по кольцеобразным функциям к более простой проблеме вычисления матричных элементов от тех же операторов по сферическим функциям.

Первый раздел посвящен рассмотрению основной информации, относящейся к функциям $Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta)$. Затем решается задача о разложении функции $Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta)$ по функциям $Z_{l'm}(\vartheta,\varphi;\delta')$. Эта задача обобщает исходную, и в ней можно явно проследить за симметрией выражений по параметрам δ и δ'. Специально рассматриваются случаи четных и нечетных значений разности $l - |m|$. Отдельно обсуждается разложение кольцеобразных функций по сферическим. Устанавливается связь матрицы общего разложения с $6j$ - символами. В приложение введен частный случай $l = |m| = 0$ разложения, а также включены некоторые графики и таблицы.

2 Кольцеобразные функции

Пусть $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$ - операторы квадрата орбитального момента и его z - прекции, а оператор $\hat{M}$ имеет следующий вид:

$$\hat{M} = \hat{l}^2 + \frac{2\Lambda}{\sin^2\vartheta}.$$

Кольцеобразные функции $Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta)$ определяются как общие собственные функции операторов $\hat{l}_z$ и $\hat{M}$, соответствующие собственным значениям m и $(l+\delta)(l+\delta+1)$. Таким образом,

$$\hat{l}_z Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta) = m Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta)\,, \tag{1а}$$

$$\hat{M} Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta) = (l+\delta)(l+\delta+1) Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta). \tag{1б}$$

Функции $Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta)$ имеют вид

$$Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta) = N_{lm}(\delta)(\sin\vartheta)^{|m|+\delta} C_{l-|m|}^{|m|+\delta+1/2}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}\,. \tag{2}$$

Здесь $N_{lm}(\delta)$ - нормировочный фактор, а $C_n^\nu(x)$ - полиномы Гегенбауэра. Система кольцеобразных функций образует базис, т.е. является полной и ортонормированной. Нормировка на единицу обеспечивается при

$$N_{lm}(\delta) = (-1)^{\frac{m-|m|}{2}} 2^{|m|+\delta}\Gamma\Big(|m|+\delta+\frac{1}{2}\Big)\left\{\frac{(2l+2\delta+1)(l-|m|)!}{4\pi^2\Gamma(l+|m|+2\delta+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Фазовый множитель в $N_{lm}(\delta)$ выбран так, что при $\delta = 0$ функции $Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta)$ переходят в сферические функции с той фазой, которая принята [13]:

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\left\{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}\right\}^{\frac{1}{2}} P_l^{|m|}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}.$$

В сказанном легко убедиться с помощью формулы [13]:

$$P_l^{|m|}(x) = \frac{(-2)^{|m|}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(|m|+\frac{1}{2}\Big)(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} C_{l-|m|}^{|m|+1/2}(x).$$

Численные значения функции $Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta)$ удобно получать, пользуясь формулой [12]:

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(2\nu)\Gamma(n+1)} F\Big(-n, n+2\nu; \nu+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\Big),$$

выражающей полиномы Гегенбауэра через гипергеометрическую функцию.

3 Общее разложение

Функции $Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta)$ и $Z_{l'm'}(\vartheta,\varphi;\delta')$ относятся к различным операторам $\hat{M}$. Матрица разложения диагональна по m, так что

$$Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta) = \sum_{l'=|m|}^{\infty} T_{ll'}^m(\delta,\delta') Z_{l'm}(\vartheta,\varphi;\delta')\,. \tag{3}$$

Так как система функций $Z_{l'm}(\vartheta,\varphi;\delta')$ является ортонормированной, то матрица разложения определяется интегралом

$$T_{ll'}^m(\delta,\delta') = D_{ll'}^m \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{|m|+\frac{\delta+\delta'}{2}} C_{l-|m|}^{|m|+\delta+1/2}(x) C_{l'-|m|}^{|m|+\delta'+1/2}(x)dx\,, \tag{3а}$$

где $x = cos\vartheta$, а

$$D_{ll'}^m = 2^{2|m|+\delta+\delta'}\Gamma\Big(|m|+\delta+\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(|m|+\delta'+\frac{1}{2}\Big)\times$$

$$\left\{\frac{(2l+2\delta+1)(2l'+2\delta'+1)(l-|m|)!(l'-|m|)!}{4\pi^2\Gamma(l+|m|+2\delta+1)\Gamma(l'+|m|+2\delta'+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3б}$$

В силу симметрии

$$C_n^\nu(-x) = (-1)^n C_n^\nu(x)$$

интеграл в выражении (3а) отличен от нуля лишь тогда, когда числа l и l' имеют одинаковую четность. Этот интеграл вычислен в работе [13]. Метод вычислений существенно опирается на фиксирование отношения порядка $l' \geq l$, что приводит к потере явной симметрии.

$$T_{ll'}^m(\delta,\delta') = T_{l'l}^m(\delta',\delta).$$

Если известна формула для $T_{ll'}^m(\delta,\delta'; l' \geq l)$, то $T_{ll'}^m(\delta,\delta'; l' \leq l)$ определяется из нее и указанного свойства симметрии

$$T_{ll'}^m(\delta,\delta'; l' \leq l) = T_{ll'}^m(\delta,\delta'; l' \geq l).$$

Согласно [13]

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{\alpha+\beta-3}{2}-p} C_n^\alpha(x) C_k^\beta(x)dx = (-1)^{\frac{k-n}{2}}\frac{\pi}{2^{2\alpha-1}}\times$$

$$\frac{\Gamma(n+2\alpha)\Gamma\Big(\frac{\alpha+\beta-1}{2}-p\Big)\Gamma\Big(\frac{\alpha-\beta}{2}-p\Big)\Gamma\Big(\frac{n+k}{2}+\beta\Big)}{n!(\frac{k-n}{2})!\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma\Big(\frac{n+\alpha-k-\beta}{2}-p\Big)\Gamma\Big(\frac{n+\alpha+k+\beta}{2}-p\Big)}\times$$

$${}_4F_3\left\{\begin{matrix}\frac{\alpha-\beta}{2}+p+1, & \frac{\alpha-\beta}{2}-p, & -\frac{n}{2}, & -\frac{n-1}{2} \\ \frac{k-n}{2}+1, & -\frac{n+k}{2}-\beta+1, & \alpha+\frac{1}{2} & \end{matrix}\Bigg|\, 1\right\}.$$

Здесь предполагается, что $k \geq n$. В нашем случае $p=-1$, так что

$$T^m_{ll'}(\delta,\delta'; l'\geq l) = \frac{(-1)^{\frac{l'-l}{2}} E^m_{ll'}(\delta,\delta')}{\Gamma\left(\frac{l'-l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l-l'+\delta-\delta'}{2}+1\right)}\times$$

$$ {}_4F_3\left\{ \begin{matrix} -\frac{l-|m|}{2}, & -\frac{l-|m|-1}{2}, & \frac{\delta-\delta'}{2}, & 1+\frac{\delta-\delta'}{2} \\ |m|+\delta+1, & \frac{l'-l}{2}+1, & -\frac{l+l'-1}{2}-\delta' & \end{matrix} \middle| 1 \right\}, \qquad (4a)$$

где

$$E^m_{ll'}(\delta,\delta') = \frac{\Gamma\left(\frac{\delta-\delta'+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\delta+\delta'+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+l'+2\delta'+1}{2}\right)}{2^{\delta-\delta'+1}\Gamma\left(|m|+\delta+1\right)\Gamma\left(\frac{l+l'+\delta+\delta'+3}{2}\right)}\times$$

$$\left\{\frac{(2l+2\delta+1)(2l'+2\delta'+1)(l'-|m|)!\Gamma(l+|m|+2\delta+1)}{(l-|m|)!\Gamma(l'+|m|+2\delta'+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (4б)$$

Из разложения (3) явствует, что при $\delta'=\delta$ должно выполняться тождество

$$T^m_{ll'}(\delta,\delta) = \delta_{ll'} . \qquad (5)$$

Легко убедиться,что

$$T^m_{ll'}(\delta,\delta) = \left\{\frac{(2l+2\delta+1)(2l'+2\delta+1)(l'-|m|)!\Gamma(l+|m|+2\delta+1)}{(l-|m|)!\Gamma(l'+|m|+2\delta+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\frac{(-1)^{\frac{l'-l}{2}}}{l+l'+2\delta+1}\left\{\Gamma\left(\frac{l'-l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l-l'}{2}+1\right)\right\}^{-1}.$$

Полученное выражение обращается в нуль при $l'\neq l$ за счет гамма-функций в последних двух сомножителях и равняется единице при $l'=l$. Таким образом,мы приходим к тождеству (5).

4 Случай четных и нечетных $l-|m|$

Известно [14], что если в функции ${}_4F_3$ сумма верхних параметров больше суммы нижних параметров ровно на единицу, то справедлива формула

$${}_4F_3\left\{ \begin{matrix} x, & y, & z, & -n \\ u, & v, & w & \end{matrix} \middle| 1 \right\} = \frac{(v-z)_n(w-z)_n}{(v)_n(w)_n}\times$$

$${}_4F_3\left\{ \begin{matrix} & u-x, & u-y, & z, & -n \\ u, & 1-v+z-n, & 1-w+z-n & & \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \qquad (6)$$

В нашем случае отмеченное выше условие удовлетворяется, и поэтому можно применить формулу (6). Приведем окончательные результаты:

$$T^{m+}_{ll'}(\delta,\delta') = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi(\delta'-\delta)}{2}K^m_{ll'}(\delta,\delta')Q^{m+}_{ll'}(\delta,\delta'), \qquad (7a)$$

$$T^{m-}_{ll'}(\delta,\delta') = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi(\delta'-\delta)}{2}K^m_{l'l}(\delta',\delta)Q^{m-}_{ll'}(\delta,\delta'). \qquad (7б)$$

В этих формулах приняты следующие обозначения:

$$K^m_{ll'}(\delta,\delta') = A^m_l(\delta)B^m_{l'}(\delta'),$$

$$A^m_l(\delta) = \left\{\frac{(l+\delta+1/2)\Gamma\left(\frac{l-|m|}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l+|m|}{2}+\delta+1\right)}{\Gamma\left(\frac{l-|m|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+|m|+1}{2}+\delta\right)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$B^m_{l'}(\delta') = \left\{\frac{(l'+\delta'+1/2)\Gamma\left(\frac{l'-|m|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l'+|m|+1}{2}+\delta'\right)}{\Gamma\left(\frac{l'-|m|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l'+|m|}{2}+\delta'+1\right)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$Q^{m+}_{ll'}(\delta,\delta') = \sum_{s=0}^{(l-|m|)/2}\frac{\Gamma\left(\frac{\delta-\delta'}{2}+s+1\right)\Gamma\left(|m|+\frac{\delta+\delta'}{2}+s+1\right)}{s!\Gamma(|m|+\delta+s+1)}M^{ms}_{ll'}(\delta,\delta'),$$

$$Q^{m-}_{ll'}(\delta,\delta') = \sum_{s=0}^{(l-|m|-1)/2}\frac{\Gamma\left(\frac{\delta-\delta'}{2}+s+1\right)\Gamma\left(|m|+\frac{\delta+\delta'}{2}+s+1\right)}{s!\Gamma(|m|+\delta+s+1)}N^{ms}_{ll'}(\delta,\delta'),$$

$$M^{ms}_{ll'}(\delta,\delta') = \frac{\Gamma\left(\frac{l+|m|+1}{2}+\delta+s\right)\Gamma\left(\frac{l'-|m|-\delta+\delta'}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{l-|m|}{2}-s+1\right)\Gamma\left(\frac{l'+|m|+\delta+\delta'+3}{2}+s\right)},$$

$$N^{ms}_{ll'}(\delta,\delta') = \frac{\Gamma\left(\frac{l+|m|}{2}+\delta+s+1\right)\Gamma\left(\frac{l'-|m|-\delta+\delta'-1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{l-|m|+1}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{l'+|m|+\delta+\delta'+3}{2}+s\right)},$$

Знаки "+" и "-" относятся к четным и нечетным $l-|m|$ соответственно.

5 Разложение кольцеобразных функций по сферическим

Запишем это разложение в виде

$$Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta) = \sum_{l'=|m|}^{\infty}W^m_{ll'}(\delta)Y_{l'm}(\vartheta,\varphi). \qquad (8a)$$

Матрица $W^m_{ll'}(\delta)$ удовлетворяет условию полноты

$$\sum_{l'=|m|}^{\infty}W^m_{ll'}(\delta)W^{*m}_{ll'}(\delta) = 1.$$

Отсюда следует, что обратное разложение имеет вид

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \sum_{l'=|m|}^{\infty} W_{ll'}^{*m}(\delta) Z_{l'm}(\vartheta,\varphi;\delta)\,. \tag{8б}$$

Обращаясь к общим формулам (3), (4а) и (4б), можно показать, что

$$W_{ll'}^{m}(\delta; l'>l) = \frac{(-1)^{\frac{l'-l}{2}}}{\Gamma\left(\frac{l'-l}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l-l'+\delta}{2}+1\right)}\times$$

$$\frac{\Gamma\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\Gamma\left(|m|+\frac{\delta}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l+l'+1}{2}\right)}{2^{1+\delta}\Gamma\left(|m|+\delta+1\right)\Gamma\left(\frac{l+l'+\delta+3}{2}\right)}\times$$

$$\left\{\frac{(2l+2\delta+1)(2l'+1)(l'-|m|)!\Gamma(l+|m|+2\delta+1)}{(l-|m|)!(l'+|m|)!}\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$${}_4F_3\left\{\begin{matrix} -\frac{l-|m|}{2},\ -\frac{l-|m|-1}{2},\ \frac{\delta}{2},\ 1+\frac{\delta}{2} \\ |m|+\delta+1,\ \frac{l'-l}{2}+1,\ -\frac{l+l'-1}{2} \end{matrix}\middle|\, 1\right\} \tag{9а}$$

$$W_{ll'}^{m}(\delta; l'<l) = \frac{(-1)^{\frac{l'-l}{2}}}{\Gamma\left(\frac{l-l'}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l'-l-\delta}{2}+1\right)}\times$$

$$\frac{\Gamma\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\Gamma\left(|m|+\frac{\delta}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{l+l'+1}{2}\right)}{2^{1-\delta}|m|!\Gamma\left(\frac{l+l'+\delta+3}{2}\right)}\times$$

$$\left\{\frac{(2l'+2\delta+1)(2l+1)(l-|m|)!(l'+|m|)!}{(l-|m|)!\Gamma(l+|m|+2\delta+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$${}_4F_3\left\{\begin{matrix} -\frac{l'-|m|}{2},\ -\frac{l'-|m|-1}{2},\ -\frac{\delta}{2},\ 1-\frac{\delta}{2} \\ |m|+1,\ \frac{l-l'}{2}+1,\ -\frac{l+l'-1}{2}-\delta \end{matrix}\middle|\, 1\right\} \tag{9б}$$

6 Связь с $6j$-символами

Матрицы $T_{ll'}^{m}(\delta,\delta')$ согласно (4а) выражаются через ${}_4F_3$-функцию. Покажем, что это позволяет связать их с $6j$-символами. Для этого воспользуемся формулой [15]

$$\left\{\begin{matrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \end{matrix}\right\} = (-1)^{a+b+d+e}(a+b+d+e+1)!\times$$

$$\frac{\Delta(adc)\Delta(cde)\Delta(aef)\Delta(bdf)}{(a+b-c)!(-c+d+e)!(a+e-f)!(b+d-f)!(a+c-d+f)!(-b+c-e+f)!}\times$$

$${}_4F_3\left\{\begin{matrix} -a-b+c,\ c-d-e,\ -a-e+f,\ -b-d+f \\ -a-b-d-e-1,\ -a+c-d+f+1,\ -b+c-e+f+1 \end{matrix}\middle|\, 1\right\},$$

в которой

$$\Delta(abc) = \left\{\frac{(a+b-c)!(a-b+c)!(-a+b+c)!}{(a+b+c+1)!}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Сравнивая приведенную формулу с формулами (4а) и (4б), можно убедиться в том, что

$$T_{ll'}^{m}(\delta,\delta') = e^{-i\pi\left(\frac{l+l'+1}{2}+\delta'\right)}\left\{\begin{matrix} a, & b, & c \\ a-\frac{3}{4}, & b+\frac{1}{4}, & f \end{matrix}\right\}\times$$

$$\left\{\frac{(l+\delta+1/2)(l'+\delta'+1/2)(\delta-\delta')(2|m|+\delta+\delta')}{(l-l'+\delta-\delta')(l+l'+\delta+\delta'+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{10а}$$

где

$$a = \frac{l+|m|+\delta+\delta'}{4}, b = \frac{l'-|m|+\delta'-\delta-2}{4},$$

$$c = \frac{l'-l+2|m|+2\delta'-2}{4}, f = \frac{l+l'+2\delta-1}{4}. \tag{10б}$$

7 Рекуррентное соотношение

Подействуем оператором $\hat{M}$ на разложение (3) и воспользуемся уравнением (1б). Получим

$$(l+\delta)(l+\delta+1)Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta) = \sum_{l'=|m|}^{\infty} T_{ll'}^{m}(\delta,\delta')\left\{(l'+\delta')(l'+\delta'+1)+\frac{2(\Lambda-\Lambda')}{\sin^2\vartheta}\right\}Z_{l'm}(\vartheta,\varphi;\delta').$$

Умножим обе части этого соотношения на $\sin^2\vartheta Z_{l''m}^{*}(\vartheta,\varphi;\delta')$ и проведем интегрирование по телесному углу. Учитывая ортонормированность функций $Z_{lm}(\vartheta,\varphi;\delta)$, получим

$$2(\Lambda-\Lambda')T_{ll''}^{m}(\delta,\delta') = \sum_{l'=|m|}^{\infty} T_{ll'}^{m}(\delta,\delta')(l+\delta-l'-\delta')(l+\delta+l'+\delta'+1)(\sin^2)_{l''l'}\vartheta,$$

где

$$(\sin^2\vartheta)_{l''l'} = \int Z_{l''m}^{*}(\vartheta,\varphi;\delta')\sin^2\vartheta Z_{l'm}(\vartheta,\varphi;\delta)d\Omega.$$

Очевидно, что

$$(\sin^2\vartheta)_{l''l'} = \delta_{l''l'} - (\cos^2\vartheta)_{l''l'}.$$

Для вычисления матричного элемента $(\cos^2\vartheta)_{l''l'}$ следует использовать рекуррентное соотношение [12]

$$2(n+\nu)xC_n^{\nu}(x) = (2\nu+n-1)C_{n-1}^{\nu}(x) + (n+1)C_{n+1}^{\nu}(x).$$

Приведем окончательный результат:

$$(\sin^2\vartheta)_{l''l'} = H_{l'm}(\delta')\delta_{l'',l'-2} + R_{l'm}(\delta')\delta_{l''l'} + H_{l'+2m}(\delta')\delta_{l'',l'+2}.$$

Здесь:

$$H_{l'm}(\delta') = -\left\{\frac{(l'-|m|)(l'-|m|-1)(l'+|m|+2\delta'-1)(l'+|m|+2\delta')}{(2l'+2\delta'-1)^2(2l'+2\delta'-3)(2l'+2\delta'+1)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$R_{l'm}(\delta') = \frac{2(l'+\delta')(l'+\delta'+1)+2(|m|+\delta'-1)(|m|+\delta'+1)}{(2l'+2\delta'-1)(2l'+2\delta'+3)}$$

Пользуясь этим результатом, можно показать, что матрица $T^m_{ll'}(\delta,\delta')$ удовлетворяет следующему трехчленному рекуррентному соотношению

$$\left\{2(\Lambda-\Lambda')-(l+\delta-l'-\delta')(l+\delta+l'+\delta'+1)R_{l'm}(\delta')\right\}T^m_{ll'}(\delta,\delta') =$$

$$(l+\delta-l'-\delta'+2)(l+\delta+l'+\delta'-1)H_{l'm}(\delta')T^m_{l,l'-2}(\delta,\delta')+$$
$$(l+\delta-l'-\delta'-2)(l+\delta+l'+\delta'+3)H_{l'+2m}(\delta')T^m_{l,l'+2}(\delta,\delta').$$

Подставляя сюда (10а) и (10б), приходим к выводу о том, что наши $6j$ - символы должны подчиняться рекуррентному соотношению

$$\left\{\begin{matrix} a, & b, & c \\ a-\frac{3}{4}, & b+\frac{1}{4}, & f \end{matrix}\right\}F = \left\{\begin{matrix} a, & b-\frac{1}{2}, & c-\frac{1}{2} \\ a-\frac{3}{4}, & b-\frac{1}{4}, & f-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}G_1 + \left\{\begin{matrix} a, & b+\frac{1}{2}, & c+\frac{1}{2} \\ a-\frac{3}{4}, & b+\frac{3}{4}, & f+\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}G_2,$$

в котором

$$F = (a-b+c)(-a+b+f-1/4)-(a-b-c-1)(a+b+f+9/4)L,$$

$$L = \frac{(2b+c+f+7/4)(2b+c+f+11/4)-(2a+c-f-3/4)(2a+c-f+5/5)}{2(2b+c+f+5/4)(2b+c+f+13/4)},$$

$$G_1 = (2b+c+f+5/4)^{-1}(2b+c+f+9/4)^{-1}(-a+b+f+1/4)^{\frac{1}{2}}(-a+b+f+3/4)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left\{(a+b+c+1/2)(a+b+c+1)(a-b-c-1)(a-b-c)(a+b+f+1/4)(a+b+f+5/4)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$G_2 = (2b+c+f+9/4)^{-1}(2b+c+f+13/4)^{-1}(-a+b+f+5/4)^{\frac{1}{2}}(-a+b+f+7/4)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left\{(a+b+c+3/2)(a+b+c+2)(a-b-c-2)(a-b-c-1)(a+b+f+5/4)(a+b+f+9/4)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

Мы не нашли в [15] такого рекуррентного соотношения для $6j$-символов. Не исключено, что оно является новым.

8 Приложение

Для полноты картины рассмотрим еще несколько частных результатов.

(А). Рассмотрим разложение (3) для случая $l=|m|=0$. Имеем:

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\delta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\delta+\delta'}{2}\right)}(\sin\vartheta)^{\delta-\delta'} =$$

$$\sum_{l'=0}^{\infty}\frac{(l'+\delta'+1/2)\Gamma\left(\frac{l'+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l'-\delta+\delta'}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l'+\delta+\delta'+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l'}{2}+\delta'+1\right)}C^{\delta'+1/2}_{l'}(\cos\vartheta).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{\pi}(\sin\vartheta)^{\delta+\delta'+1}C^{\delta'+1/2}_{l'}(\cos\vartheta)d\vartheta =$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1+\frac{\delta'+\delta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+1}{2}+\delta'\right)\Gamma\left(\frac{l-\delta+\delta'}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right)\Gamma\left(\delta'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+\delta+\delta'+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right)}$$

Этот же результат можно получить независимо из интеграла [12]

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}C^{\nu}_n(x)dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+2\nu)}{n!\Gamma(2\nu)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\times$$

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix}-n, & n+2\nu, & \alpha+1 \\ \nu+\frac{1}{2}, & \alpha+\beta+2 & \end{matrix}\middle|1\right\}.$$

и формулы [14]

$${}_3F_2\left\{\begin{matrix}a, & b, & c \\ \frac{a+b+1}{2}, & 2c & \end{matrix}\middle|1\right\} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)\Gamma\left(c-\frac{a+b-1}{2}\right)\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)\Gamma\left(c-\frac{a-1}{2}\right)\Gamma\left(c-\frac{b-1}{2}\right)}.$$

Таким образом (помимо случая $\delta=\delta'$), мы нашли еще одно подтверждение правильности наших результатов.

(Б). Приведем таблицу матрицы $T^m_{ll'}(\delta,\delta')$ для некоторых частных значений квантовых чисел l и l'.

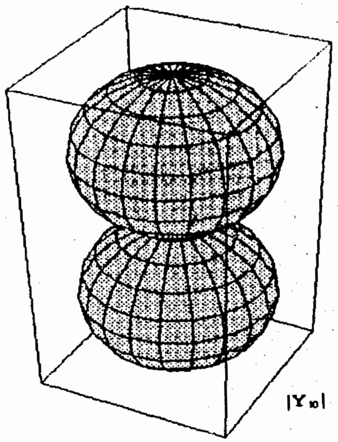
$l' \backslash l$	$\lvert m\rvert$
$\lvert m\rvert$	$\dfrac{\Gamma\left(\lvert m\rvert+\frac{\delta+\delta'}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\lvert m\rvert+\frac{\delta+\delta'+3}{2}\right)}\left\{\dfrac{\Gamma(\lvert m\rvert+\delta+3/2)\Gamma(\lvert m\rvert+\delta'+3/2)}{\Gamma(\lvert m\rvert+\delta+1)\Gamma(\lvert m\rvert+\delta'+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}$
$\lvert m\rvert+2$	$\dfrac{(\delta'-\delta)\Gamma\left(\lvert m\rvert+\frac{\delta+\delta'}{2}+1\right)}{2\Gamma\left(\lvert m\rvert+\frac{\delta+\delta'+5}{2}\right)}\times \left\{\dfrac{\Gamma(\lvert m\rvert+\delta+3/2)\Gamma(\lvert m\rvert+\delta'+7/2)}{(2\lvert m\rvert+2\delta'+3)\Gamma(\lvert m\rvert+\delta+1)\Gamma(\lvert m\rvert+\delta'+2)}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$l'\|l$	$\|m\|+1$
$\|m\|+1$	$\dfrac{\Gamma\left(\|m\|+\frac{\delta+\delta'}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\|m\|+\frac{\delta+\delta'+5}{2}\right)}\left\{\dfrac{\Gamma(\|m\|+\delta+5/2)\Gamma(\|m\|+\delta'+5/2)}{\Gamma(\|m\|+\delta+1)\Gamma(\|m\|+\delta'+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}$
$\|m\|+3$	$\dfrac{(\delta'-\delta)\Gamma\left(\|m\|+\frac{\delta+\delta'}{2}+1\right)}{2\Gamma\left(\|m\|+\frac{\delta+\delta'+7}{2}\right)}\times$ $\left\{\dfrac{3\Gamma(\|m\|+\delta+5/2)\Gamma(\|m\|+\delta'+9/2)}{(2\|m\|+2\delta'+5)\Gamma(\|m\|+\delta+1)\Gamma(\|m\|+\delta'+2)}\right\}^{\frac{1}{2}}$

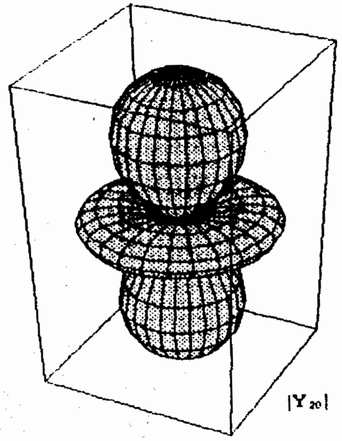
$l'\|l$	$\|m\|+2$
$\|m\|$	$\dfrac{(\delta-\delta')\Gamma\left(\|m\|+\frac{\delta+\delta'}{2}+1\right)}{2\Gamma\left(\|m\|+\frac{\delta+\delta'+5}{2}\right)}\times$ $\left\{\dfrac{\Gamma(\|m\|+\delta+7/2)\Gamma(\|m\|+\delta'+3/2)}{(2\|m\|+2\delta+3)\Gamma(\|m\|+\delta+2)\Gamma(\|m\|+\delta'+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}$
$\|m\|+2$	$\dfrac{\Gamma\left(\|m\|+\frac{\delta+\delta'}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\|m\|+\frac{\delta+\delta'+7}{2}\right)}\left(\|m\|+\delta+1-\dfrac{(\delta-\delta')(\delta-\delta'+2)}{4(2\|m\|+2\delta'+3)}\right)\times$ $\left\{\dfrac{(\|m\|+\delta'+3/2)\Gamma(\|m\|+\delta+7/2)\Gamma(\|m\|+\delta'+7/2)}{(\|m\|+\delta+3/2)\Gamma(\|m\|+\delta+2)\Gamma(\|m\|+\delta'+2)}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$l'\|l$	$\|m\|+3$
$\|m\|+1$	$\dfrac{(\delta-\delta')\Gamma\left(\|m\|+\frac{\delta+\delta'}{2}+1\right)}{2\Gamma\left(\|m\|+\frac{\delta+\delta'+7}{2}\right)}\times$ $\left\{\dfrac{3\Gamma(\|m\|+\delta+9/2)\Gamma(\|m\|+\delta'+5/2)}{(2\|m\|+2\delta+5)\Gamma(\|m\|+\delta+2)\Gamma(\|m\|+\delta'+1)}\right\}^{\frac{1}{2}}$
$\|m\|+3$	$\dfrac{\Gamma\left(\|m\|+\frac{\delta+\delta'}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\|m\|+\frac{\delta+\delta'+9}{2}\right)}\left(\|m\|+\delta+1-\dfrac{3(\delta-\delta')(\delta-\delta'+2)}{4(2\|m\|+2\delta'+5)}\right)\times$ $\left\{\dfrac{(\|m\|+\delta'+5/2)\Gamma(\|m\|+\delta+9/2)\Gamma(\|m\|+\delta'+9/2)}{(\|m\|+\delta+5/2)\Gamma(\|m\|+\delta+2)\Gamma(\|m\|+\delta'+2)}\right\}^{\frac{1}{2}}$

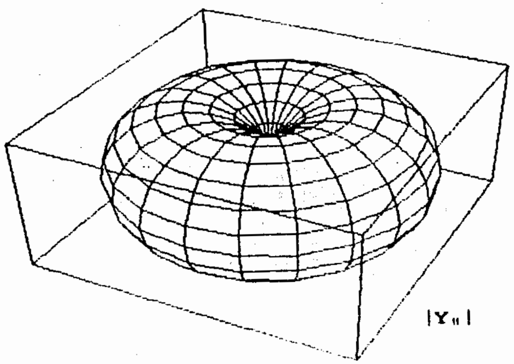
(B). **Ниже приведены пространственные графики некоторых сферических ($\Lambda = 0$) и кольцеобразных ($\Lambda = 40$) функций. Графики даны в сферических координатах θ и ϕ. Вместо радиуса r отложены модули сферических и кольцеобразных функций.**



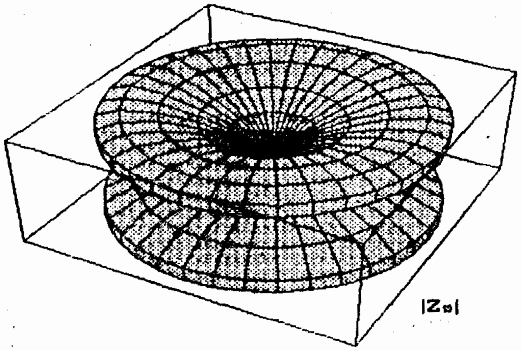
$|Y_{10}|$

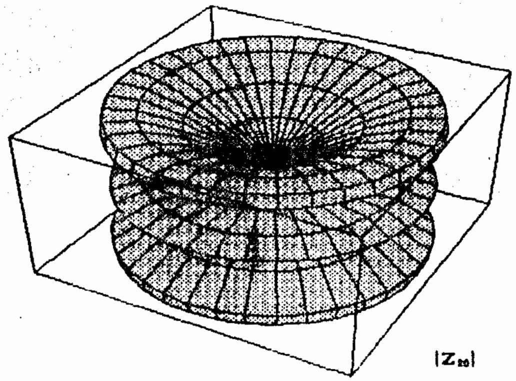


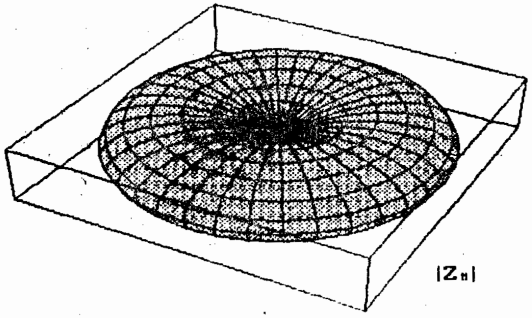
$|Y_{20}|$

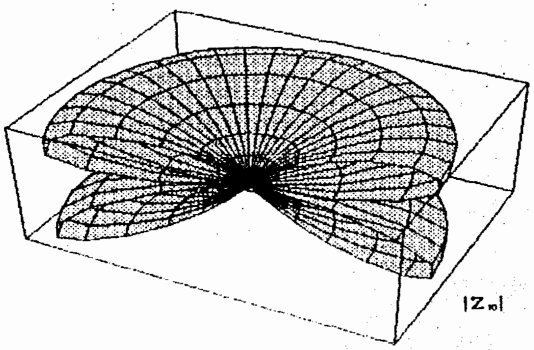


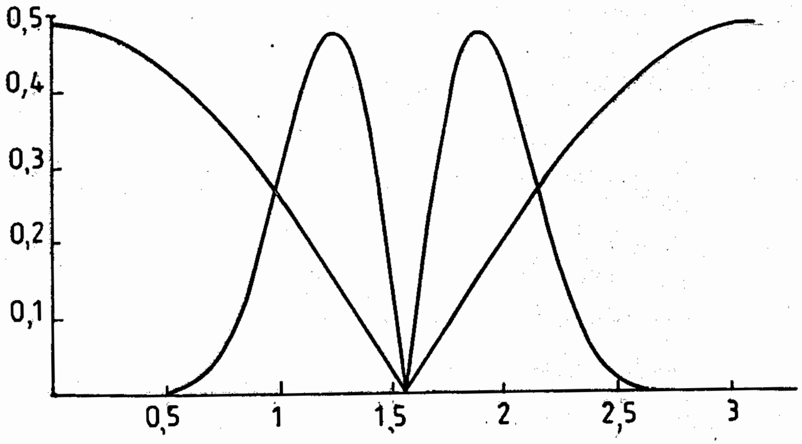
$|Y_{11}|$











На предпоследнем рисунке дан срез пространственного графика функций $|Z_{10}|$. Последний график описывает зависимость той же функции от угла θ при ($\Lambda = 0$) и ($\Lambda = 40$).

9 Заключение

Полученные в этой работе разложения относятся к разряду общих результатов кольцеобразных моделей, поскольку они не зависят от вида центрально-симметричного потенциала $V(r)$ в выражении $U(r, \vartheta)$. Отсюда следует, что его можно использовать в задачах о разложениях базисов кольцеобразных моделей по базисам соответствующих им сферических партнеров.

Мы благодарны С.И.Виницкому, И.В.Луценко за полезные обсуждения и С.В.Тер-Антоняну за построение графиков.

Литература

[1] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика. М.:Наука, 1988.

[2] A.A.Makarov, Ya.Smorodinsky, Kh.Valiev, P.Winnternitz. Nuovo Cimento, 52A, 1061, 1964.

[3] H.Hartman, D.Shuch. Int. J.of Quant.Chem. 18,125,1980.

[4] C. Quesne. J.Phys. A21, 3093,1988.

[5] И.В.Луценко, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян. ТМФ, 83, 419, 1990.

[6] А.Н.Сисакян, И.В.Луценко, Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян. Сообщения ОИЯИ, Р2-89-814, Дубна, 1989.

[7] M.Kibler, P.Winternitz. J.Phys. A20, 4097, 1987.

[8] C.Gerry. Phys. Lett. A118, 445, 1982.

[9] И.В.Луценко, А.Дж.Магакян, А.Н.Сисакян, И.М.Тер-Антонян. Сообщения ОИЯИ, Р2-92-48, Дубна,1992.

[10] И.В.Луценко, А.Дж.Магакян, А.Н.Сисакян, И.М.Тер-Антонян. Сообщения ОИЯИ, Р2-92-503, Дубна,1992.

[11] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. М.:Наука, 1989.

[12] Г.Бейтман, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т.2, М. Наука, 1973.

[13] M.Rashid. J.Phys. A19, 2505, 1986.

[14] W.Baily. Generalized Hypergeometric Series. Cambridge, 1935.

[15] Д.А.Варшалович, А.Н.Москалев, В.К.Херсонский. Квантовая теория углового момента. Л.:Наука, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 декабря 1992 года.