объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-92-504

И.В.Луценко*, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян*

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА

Направлено в журнал «Physics Letters A»

*Ереванский государственный университет

1992

Луценко И.В., Сисакян А.Н., Тер-Антонян В.М. P2-92-504
Относительные корреляции и корреляционная матрица

Найдена связь критериев относительных парных корреляций с корреляционной матрицей $\langle x^{\alpha} y^{\beta}\rangle - \langle x^{\alpha}\rangle\langle y^{\beta}\rangle$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод авторов

Lutsenko I.V., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M. P2-92-504
Relative Correlations and Correlation Matrix

Direct relationship between criteria of relative pair correlations and the correlation matrix $\langle x^{\alpha} y^{\beta}\rangle - \langle x^{\alpha}\rangle\langle y^{\beta}\rangle$ is derived.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992

В сложных системах очень важно уметь правильно оценивать степень корреляции между признаками. В первую очередь это относится к наиболее простым, т.е. парным корреляциям. Считается самоочевидным, что корреляция является количественным отражением общего для двух признаков статистического свойства: насколько признак x зависит от признака y, настолько же признак y зависит от признака x. Сказанное неявно предполагается, когда для оценки парных корреляций используется критерий $K = \langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle$. Если $K = 0$, то к делу привлекаются более сложные конструкции $K^{\alpha\beta} = \langle x^{\alpha}y^{\beta}\rangle - \langle x^{\alpha}\rangle\langle y^{\beta}\rangle$, в которых α и β – целые положительные числа. Но и в этом случае требование корреляционной симметрии приводит к выбору $\alpha = \beta$. Правда, вопрос о том, чему должно быть равно α, остаётся деликатным и его стараются не замечать [1].

В то же время ясно, что для большинства систем (в частности, геологических, биологических, экономических и экологических) указанная выше корреляционная симметрия сильно нарушена: в системе есть лидирующие признаки и есть признаки, подчиненные им. Поясним сказанное на простом, но абстрактном примере, в котором элементы системы (клетки) распределены по признаку x (точкам) и признаку y (крестам), как это показано в следующей таблице.

• ++	• ++	•• +++	• ++	•••• ++
•••• ++	••• ++++	• ++	•••• ++	• ++
• ++	•••• ++	• ++	•• ++++	•• +++
• ++	•• +++	•••• ++	••• ++++	• ++

В клетках с заданным количеством точек встречается лишь определённое количество крестов, в то время как в клетки с заданным количеством крестов попало разное число точек. Понятно,

что точки связаны с крестами максимальным образом, а связь крестов с точками гораздо слабее.

Таким образом, парные корреляции по самой своей сути относительны и потому для их описания требуется не один, а два критерия: критерий L^{xy}, служащий мерой корреляции признака x с признаком y, и критерий L^{yx}, служащий мерой корреляции признака y с признаком x. Получить два критерия можно, например, нарушив симметрию выражения $\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle$, разделив один раз его на $\langle x\rangle$, а другой раз на $\langle y\rangle$. Можно было бы использовать также критерий $K^{\alpha\beta}$ с $\alpha\neq\beta$. Однако эти возможности в достаточной мере произвольны и потому не могут отражать сути дела.

Совершенно иная точка зрения на обсуждаемую проблему была высказана в работе [2]. Корреляция там трактуется как один из итогов, к которым приводят процессы смешивания и разделения признаков в системе, т.е. процессы, которые, собственно, порождают статистику системы. Такая точка зрения приводит к следующим двум критериям [2]:

$$L^{xy} = \sum_{q}{}' \sum_{p} \left(1 - \frac{x_p}{\langle x\rangle}\right) \gamma(x_p, y_q) \quad , \tag{1a}$$

$$L^{yx} = \sum_{p}{}' \sum_{q} \left(1 - \frac{y_q}{\langle y\rangle}\right) \gamma(x_p, y_q) \ . \tag{1b}$$

Здесь $\gamma(x_p, y_q)$ – это функция распределения вероятностей по признакам x и y, а суммирование ведётся по следующему правилу. В сумме по p в (1a) учитываются все значения признака x, а в сумме по q учитываются лишь те значения признака y, для которых первая сумма положительна. Аналогичное правило работает в отношении формулы (1b).

Цель настоящей статьи – установить связь критериев (1a) и (1b) с корреляционной матрицей $K^{\alpha\beta}$, о которой говорилось выше. Такая связь пролила бы свет на два интересных вопроса. Во-первых, станет ясно, в каком соответствии находится подход работы [2] с методами математической статистики [3]. Во-вторых, вопрос о том, сколько корреляционных моментов нужно учитывать при оценке парных корреляций,"перестанет висеть в воздухе".

Начнём с того, что по определению

$$< x^{\alpha}y^{\beta} > = \sum_{ij} \gamma(x_i, y_j)\ x_i^{\alpha}\ y_j^{\beta} \ , \tag{2}$$

где $i,\alpha = 0,1,\ldots n$, а $j,\beta = 0,1,\ldots m$. Введём матрицы $Q_p^{\alpha}(z)$, такие, что

$$\sum_{\alpha} z_i^{\alpha}\ Q_p^{\alpha}(z) = \delta_{ip} \ . \tag{3}$$

Если такие матрицы существуют, то умножив (2) на $Q_p^{\alpha}(x)\ Q_q^{\beta}(y)$, взяв сумму полученного выражения по α и β и учтя условие (3), приходим к следующему результату:

$$\gamma(x_p, y_q) = \sum_{\alpha\beta} < x^{\alpha}y^{\beta} > Q_p^{\alpha}(x)\ Q_q^{\beta}(y) \ . \tag{4}$$

Легко показать из (3), что

$$Q_p^{\alpha}(z) = \frac{(-1)^{\alpha+p}\ \Delta_{p\alpha}(z)}{W(z)} \ , \tag{5}$$

где W(z) - известный определитель Вандермонда [4]

$$W(z) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 \ldots\ldots & z_0^{n-1} \\ 1 & z_1 \ldots\ldots & z_1^{n-1} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 1 & z_{n-1} \ldots\ldots & z_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \ ,$$

а $\Delta_{p\alpha}(z)$ есть минор этого определителя, соответствующий элементу z_p^{α}. Таким образом, матрицы $Q_p^{\alpha}(x)$ и $Q_q^{\beta}(y)$ не зависят от средних величин, и потому формула (4) - это разложение функции распределения $\gamma(x_p, y_q)$ по матрице моментов $<x^{\alpha}y^{\beta}>$.

Из (5) следует, что матрица $Q_p^{\alpha}(z)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{p} z_p^{\alpha}\ Q_p^{\alpha'}(z) = \delta_{\alpha\alpha'} \ . \tag{6}$$

Пользуясь условием (6), легко показать, что

$$L^{xy} = {\sum_q}' \sum_{\beta} \frac{< x\ y^{\beta} > - < x >< y^{\beta} >}{< x >}\ Q_q^{\beta}(y) \ , \tag{7a}$$

$$L^{yx} = {\sum_p}' \sum_{\alpha} \frac{< y\ x^{\alpha} > - < y >< x^{\alpha} >}{< y >}\ Q_p^{\alpha}(x) \ . \tag{7b}$$

Мы видим, что информация о средних величинах факторизуется в каждом слагаемом в (7a) и (7b) от информации о спектрах случайных величин x и y. Наличие такой факторизации позволяет трактовать формулы (7a) и (7b) как разложения критериев относительных корреляций по элементам корреляционной матрицы, т.е. как соотношения, связывающие фундаментальные понятия подхода [2] с фундаментальным понятием математической статистики.

В критерии L^{xy} фигурируют лишь средние значения выражений, зависящих от x линейно. В то же время эти выражения содержат все допустимые степени признака y. Иными словами, в организации относительной корреляции признака x с признаком y эти признаки играют разные роли. Именно, признак x принимает пассивное участие, а признак y за счёт нужного числа своих степеней формирует структуру соответствующей относительной корреляции. В случае критерия L^{yx} роли признаков x и y меняются местами. Замечательно также, что критерии L^{xy} и L^{yx} сами отбирают те элементы корреляционной матрицы, которые причастны к делу. Тем самым автоматически решается отмеченный выше вопрос об участии корреляционной матрицы в формировании относительных корреляций.

Мы благодарны В.И.Луценко за стимулирующие обсуждения.

Литература

1.D.Bohm.Quantum Theory. New York. Prentice-Hall.Inc. 1952.
2.И.В.Луценко,В.М.Тер-Антонян. ОИЯИ Р2-90-109, Дубна, 1990.
3.Г.Крамер. Математические методы статистики.М.: ИЛ, 1948.
4.R.Horn,C.Tohnson. Matrix Analysis. Cambr. Univ. Press,1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 декабря 1992 года.