

сообщения
Объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

P2-92-503

И.В.Луценко¹, А.Дж.Магакян², А.Н.Сисакян,
В.М.Тер-Антонян¹

КОЛЬЦЕОБРАЗНЫЙ КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР:
СКРЫТАЯ СИММЕТРИЯ
РОЖДАЕТ СТАТИСТИКУ

¹Ереванский государственный университет

²Рокфеллеровский центр, Нью-Йорк, США

Кольцеобразный квантовый осциллятор:
скрытая симметрия рождает статистику

Выявлена статистическая природа скрытой симметрии кольцеобразного квантового осциллятора. Показано, что с ростом параметра аксиальности Λ в этой системе развиваются процессы кластеризации состояний. В пределе больших Λ стирается разница между Ψ_v - и Φ_l -состояниями.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод авторов

Lutsenko I.V. et al.

P2-92-503

Ring-Shaped Quantum Oscillator:
Hidden Symmetry Generates Statistics

The statistical nature of hidden symmetry of ring-shaped quantum oscillator is exposed. It is shown that with increasing axial parameter Λ this system undergoes the processes of state clusterisation. In the limit of large Λ the difference between the Ψ_v and Φ_l states disappears.

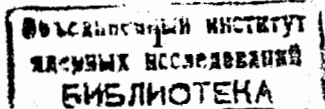
The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Введение. Кольцеобразными принято называть одночастичные модели с потенциалом $V = U + \delta U$, в котором U — это центрально-симметричное поле, а δU есть аксиально-симметричная добавка:

$$\delta U = \Lambda / (1 - (\vec{n}\vec{n}_0)^2) \dots$$

Здесь $\Lambda \geq 0$ — параметр аксиальности, а \vec{n} и \vec{n}_0 суть единичные векторы, выбранные вдоль радиус-вектора частицы и оси симметрии поля δU . При $U = -\alpha/r$ и $U = m\omega^2 r^2/2$ принято говорить о кольцеобразном атоме водорода и кольцеобразном пространственном осцилляторе. Указанные две модели точно решаются как в классической, так и в квантовой механике. Первая из них применяется для описания спектра бензольных колец [1]. Обе модели интересны тем, что имеют группы скрытых симметрий [2,3]. Конструкция поля δU такова, что переменные в уравнении Шрёдингера для любого кольцеобразного потенциала разделяются в сферических координатах. Помимо этого, для кольцеобразного атома водорода и пространственного осциллятора имеет место разделение переменных в параболических и цилиндрических координатах соответственно. Каждая из отмеченных систем, таким образом, приобретает два базиса: сферический и параболический (кольцеобразный атом водорода) и сферический и цилиндрический (кольцеобразный пространственный осциллятор).

Важной характеристикой систем с несколькими наборами разделяющихся переменных являются матрицы межбазисных разложений. В случае атома водорода и изотропного осциллятора матрицы сферо-параболического и сферо-цилиндрического разложений были вычислены в работах [4,5], а их кольцеобразные варианты — в работах [6,7].



До последнего времени матрицы межбазисных разложений в основном служили удобным техническим средством для вычисления матричных элементов. Однако эти матрицы не в меньшей мере интересны и потому, что они несут на себе статистическую информацию о группе скрытой симметрии. Именно, скрытая симметрия порождает базисы, а межбазисные разложения порождают статистику, функция распределения которой даётся квадратами модулей элементов матрицы межбазисных разложений. Таким образом, каждой квантовой модели со скрытой симметрией соответствует своя специфическая статистика.

Удобный метод обработки статистической информации подобного рода был предложен в работе [8]. Применение этого метода к матрице сферо-параболических разложений в кольцеобразном атоме водорода выявило много интересного [9]. В связи с этим мы решили в настоящей статье исследовать с аналогичных позиций также скрытую симметрию кольцеобразного пространственного осциллятора.

Функция распределения. В силу скрытой симметрии кольцеобразный пространственный осциллятор имеет четыре базиса: цилиндрический (C), сферический (S) и вытянутый и сплюснутый сфероидальный [3]. Здесь нас будут интересовать лишь первые два базиса.

Состояния удобно классифицировать с помощью квантовых чисел, относящихся к предельному случаю $\Lambda = 0$, т.е. к изотропному осциллятору. Таким образом, сферическому и цилиндрическому базису соответствуют тройки квантовых чисел (n, ℓ, m) и (n, ν, m) , смысл которых общеизвестен [10].

Межбазисные разложения могут быть записаны следующим образом

$$\Psi_\nu = \sum_{\ell} W_{\nu\ell} \Phi_{\ell}, \quad (1a)$$

$$\Phi_{\ell} = \sum_{\nu} W_{\nu\ell}^* \Psi_{\nu}. \quad (1b)$$

Известно [10], что числа n и ℓ имеют одинаковые чётности. В связи с этим суммирование в (1a) ведётся по значениям $\ell = |m|, |m| + 2, \dots, n$, либо $\ell = |m| + 1, |m| + 3, \dots, n$ при чётном и не-

чётном ν . Точно так суммирование в (1b) ведётся по значениям $\nu = 0, 2, \dots, n - |m|$ при чётных и $\nu = 1, 3, \dots, n - |m|$ при нечётных ℓ .

Величина $|W_{\nu\ell}|^2$ имеет смысл функции распределения. При фиксированном ν она характеризует картину статистической неоднородности Ψ_{ν} -состояния по наблюдаемой ℓ , а при фиксированном ℓ - статистическую неоднородность Φ_{ℓ} -состояния по наблюдаемой ν .

При данной энергии все возможные состояния $\{\Psi_{\nu}\}$ и $\{\Phi_{\ell}\}$ образуют два пакета когерентных квантовых смесей. Мера неоднородности каждого из этих пакетов, согласно [8], даётся выражениями

$$L_{\nu}^{(n)} = \sum_{\ell}' \left(1 - \frac{\ell}{\langle \ell \rangle}\right) |W_{\nu\ell}|^2, \quad (2a)$$

$$L_{\ell}^{(n)} = \sum_{\nu}' \left(1 - \frac{\nu}{\langle \nu \rangle}\right) |W_{\nu\ell}|^2. \quad (2b)$$

в которых $\langle \ell \rangle$ и $\langle \nu \rangle$ - это средние значения наблюдаемых ℓ и ν в смесях (1a) и (1b) соответственно, а суммирование ведётся по значениям, для которых $\ell \leq \langle \ell \rangle$, $\nu \leq \langle \nu \rangle$. Известно [8], что критерии L_{ν} и L_{ℓ} могут изменяться в пределах

$$0 \leq L_{\nu}^{(n)} \leq 1 - \frac{\langle \nu \rangle}{\nu_{\max}}, \quad 0 \leq L_{\ell}^{(n)} \leq 1 - \frac{\langle \ell \rangle}{\ell_{\max}}, \quad (3)$$

где ν_{\max} и ℓ_{\max} - это максимальные значения, которые принимают наблюдаемые ν и ℓ при фиксированном значении n .

В рамках отмеченного подхода каждой смеси (1a) или (1b) ставится в соответствие точка в плоскости $(\langle \nu \rangle / \nu_{\max}, L_{\nu}^{(n)})$ или $(\langle \ell \rangle / \ell_{\max}, L_{\ell}^{(n)})$. Согласно (3), множество таких точек может размещаться лишь в соответствующих равнобедренных треугольниках с единичными катетами. О каждой точке внутри такого треугольника будем говорить, согласно [8], как о состоянии смеси, а сам треугольник будем называть диаграммой состояний.

Согласно работе [7], матрица $W_{\nu\ell}$ даётся выражением

$$W_{\nu\ell} = a_{\nu\ell} b_{\nu\ell} {}_3F_2 \left\{ \begin{array}{c} -\frac{n-\ell}{2}, -\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu-1}{2} \\ \frac{\ell+|m|-\nu}{2} + 1 + \delta_m, \frac{\ell-|m|-\nu}{2} + 1 \end{array} \middle| z \right\}. \quad (4)$$

Здесь ${}_3F_2$ - это обобщённая гипергеометрическая функция :

$${}_3F_2 \left\{ \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \quad \gamma \\ \epsilon \quad \omega \end{array} \middle| z \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n (\gamma)_n}{(\epsilon)_n (\omega)_n} \frac{z^n}{n!},$$

а коэффициенты $a_{\nu\ell}$ и $b_{\nu\ell}$ имеют вид

$$a_{\nu\ell} = \frac{\left\{ \frac{2\ell + 1 + 2\delta_m}{2} \left(\frac{\ell-|m|}{2} \right)! \left(\frac{\ell+|m|}{2} + \delta_m \right)! \right\}^{1/2}}{\left(\frac{\ell-|m|-\nu}{2} \right)! \left(\frac{\ell+|m|-\nu}{2} + \delta_m \right)!},$$

$$b_{\nu\ell} = \left\{ \frac{\left(\frac{\ell + |m| + 1}{2} + \delta_m \right)! \left(\frac{n-|m|-\nu}{2} \right)! \left(\frac{n+m-\nu}{2} + \delta_m \right)!}{\left(\frac{\nu}{2} \right)! \left(\frac{\nu-1}{2} \right)! \left(\frac{n-\ell}{2} \right)! \left(\frac{n+\ell+1+2\delta_m}{2} \right)!} \right\}^{1/2}.$$

Величина

$$\delta_m = \sqrt{m^2 + 2\Lambda} - |m|$$

учитывает отклонение задачи от сферической симметрии.

Везде, где это нужно, факториалы понимаются в смысле гамма-функций. Мы собираемся, пользуясь формулой (4), вычислить $\langle \nu \rangle$, $\langle \ell \rangle$, а также $L_{\nu}^{(n)}$ и $L_{\ell}^{(n)}$ и построить соответствующие им точки на диаграмме состояний. В результате каждому уровню энергии E_n

будут соответствовать два скопления точек и по тому, какое место они занимают на диаграмме состояний, можно будет количественно судить о мере статистической неоднородности С-смеси по ℓ и s-смеси по ν . Далее, варьируя параметр Λ , мы имеем возможность проследить за эволюцией статистической картины скрытой симметрии кольцеобразного пространственного осциллятора при постепенном удалении от сферической симметрии. Наша основная цель состоит в том, чтобы установить, какие изменения будут происходить с системой в процессе указанной эволюции.

Неоднородность Ψ_{ν} -состояния. Из выражения (4) видно, что представленную выше программу вычислений возможно реализовать лишь численно. Ниже мы с этих позиций обсудим S-неоднородность цилиндрических состояний Ψ_{ν} .

На рисунках 1 и 2 изображена картина S-неоднородности Ψ_{ν} -состояний изотропного осциллятора для уровней энергии с $n = 20$, $n = 30$.

Начнем изменять параметр Λ . Точки на диаграммах состояния придут в движение. Из рисунков 3 и 4, относящихся к тем же уровням энергии, но с $\Lambda = 100$ и $\Lambda = 1000$, видно, что в системе развивается процесс образования кластеров. По числу точек в каждом таком кластере ясно, что объединяются в кластеры состояния, имеющие данное радиальное квантовое число n_{ρ} . Действительно, легко понять, что число состояний с данным n_{ρ} равно $n - 2n_{\rho} - 1$. При $n = 20$ это дает 11 кластеров, в первом из которых ($n_{\rho} = 10$) всего одна точка, во втором ($n_{\rho} = 9$) - три точки, в третьем ($n_{\rho} = 8$) - пять точек и т.д. до последнего кластера ($n_{\rho} = 0$), в котором 21 точка. При увеличении Λ одноточечный кластер отдаляется от всех других кластеров и устремляется в верхний угол диаграммы состояний. Самый "тяжелый" кластер при $\Lambda \rightarrow \infty$ стремится к нижнему углу и в конце концов им поглощается. Все другие n_{ρ} - кластеры стремятся к горизонтальному катету: каждый в определенную точку. Более четко сказанное подтверждает рисунок 5, где $n=4$ и указаны траектории одноточечного кластера $n_{\rho} = 2$ и по одной из точек "тяжелого" кластера с $n_{\rho} = 0$ и промежуточного кластера с $n_{\rho} = 1$.

Итак, мы видим, что с увеличением Λ имеют место два коллективных процесса: в начале состояния группируются в кластеры, а затем эти кластеры постепенно переходят в однородные состояния. В пределе $\Lambda = \infty$ стирается разница между S- и C-состояниями.

Неоднородность Φ_ℓ -состояний. Рассмотрим теперь разложение (1b). Рисунки 6 и 7 дают общее впечатление о C-неоднородности Φ_ℓ -состояний изотропного осциллятора при $n = 20$ и $n = 30$. Видно, что даже при $\Lambda = 0$ некоторые Φ_ℓ -состояния объединяются в кластеры.

1. Есть два кластера: из 10 точек при $n = 20$ и из 15 точек при $n = 30$. Они имеют вид дуг с левым концом вблизи верхнего угла диаграммы состояний. Это кластеры с $\ell = |m|$.
2. В правой стороне диаграммы вырисовывается скопление точек, имеющее вид "пирамиды", содержащей $L_\ell^{(n)}$ -кластеры и $\langle \ell \rangle$ -кластеры.
3. Есть кластеры с $\ell = n$ (при $n = 20$ они содержат 21 точку) с концами, уходящими в нижний угол диаграммы состояний.

С включением параметра Λ картина начинает изменяться. В частности, из рисунков 8 и 9, которые относятся к значениям $\Lambda = 100$ и $\Lambda = 1000$, видны следующие закономерности.

- (а). Кластер с $\ell = |m|$ устремляется в верхний угол и поглощается им при $\Lambda = \infty$.
- (б). "Пирамида" распадается и начинается процесс, приводящий к организации кластеров с $\ell = n - 2, n - 4, \dots, \ell = |m| + 2$ (см. рис. 8 и особенно рис. 9). При $\Lambda \rightarrow \infty$ точки, входящие в эти кластеры, стремятся попасть на нижний катет диаграммы состояний.
- (с). Кластер с $\ell = n$ стремится в нижний угол и поглощается им при $\Lambda = \infty$.

На рисунке 10 приведен пример, из которого видно, как ведут себя точки описанных выше характерных кластеров при изменении Λ от нуля до бесконечности.

Таким образом, и здесь (как и в предыдущем пункте) видны два процесса: образование кластеров и постепенное стирание различия между S- и C-состояниями.

Предел $\Lambda = \infty$. Выше мы говорили о пределе $\Lambda = \infty$, хотя вычисления относились к конечным значениям Λ . Чтобы убедиться, что наши выводы законно аппроксимировать на случай $\Lambda = \infty$, следует рассмотреть предел $\Lambda \rightarrow \infty$ в выражении (4). В этом пределе

$$\left(\sqrt{m^2 + 2\Lambda} \right)_q \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \left(m^2 + 2\Lambda \right)^{q/2}$$

и, следовательно,

$$W_{\nu\ell} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \delta_{\ell, \nu + |m|} \quad (5)$$

Теперь понятно, что предсказание рисунков 1-10 о том, что в пределе $\Lambda = \infty$ квантовые смеси (1a) и (1b) становятся однородными ($L_\nu^{(n)} = L_\ell^{(n)} = 0$), правильно. Более того, из (5) видно, что точки на диаграммах состояния скатываются в положения $(\nu + |m|)/n$. Исключение составляет смесь с $\nu = |m| = 0$, в которой $\langle \nu \rangle \rightarrow 0$ и $L_\nu^{(n)} \rightarrow 1$, что объясняет поведение односточечного кластера в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. Соотношение (5) объясняет также и другой эффект: в любом кластере с фиксированным m есть точка, которая при $\Lambda \rightarrow \infty$ стремится попасть в нижний угол диаграммы состояний. Это точка $\nu = n - |m|$.

Для разложения (1b) правую часть соотношения (5) нужно записать как $\delta_{\nu, \ell - |m|}$. Тогда с учетом того, что $\nu/(n - |m|) = (\ell - |m|)/(n - |m|)$, становится понятным, что все состояния с $\ell = |m|$ образуют кластер, который при $\Lambda \rightarrow \infty$ движется в верхний угол диаграммы состояний.

Заключение. Выше отмечалось, что матрица $W_{\nu\ell}$ несет на себе информацию о скрытой симметрии кольцеобразного квантового осциллятора. Эта информация закладывается в матрицу по следующему сценарию. Скрытая симметрия приводит к случайному вырождению энергетического спектра. Матрица становится недиагональной, что в свою очередь порождает нетривиальную статистику, обусловленную именно данным типом симметрии. Статистика эта создает картину неоднородности квантовых состояний по несовместимым наблюдаемым. На специальных диаграммах мы прослеживаем картину

такой неоднородности и по этой картине делаем выводы о самой системе.

Основное преимущество такого подхода – это наглядность, которая достигается заменой довольно сложного способа (4) записи статистической информации возможностью чисто визуального наблюдения за процессами, происходящими в системе при изменении параметра аксиальности Λ .

Мы благодарны С.И.Виницкому, В.А.Загребному, Л.Г.Мардояну, В.Б.Приезжеву и С.В.Тер-Антоняну за обсуждения.



Неоднородность Ψ_ν -состояний

- Рис.1. $n = 20$ и $\Lambda = 0$. Видна группировка состояний по кластерам. Однако кластеры накладываются друг на друга, создавая сложное скопление точек
- Рис.2. $n = 30$ и $\Lambda = 0$. Отчётливо виден "v-паспорт" изотропного осциллятора
- Рис.3. $n = 20$ и $\Lambda = 100$. Наблюдается факторизация кластеров (особенно в левой части диаграммы)
- Рис.4. $n = 20$ и $\Lambda = 1000$. Наступает практически полная факторизация кластеров
- Рис.5. Картина неоднородности трёх Ψ_ν -состояний ($n = 4, n_\rho = 0, 1, 2$). Параметр Λ изменяется от нуля до миллиона

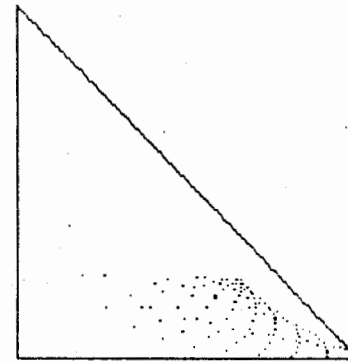


рис. 1

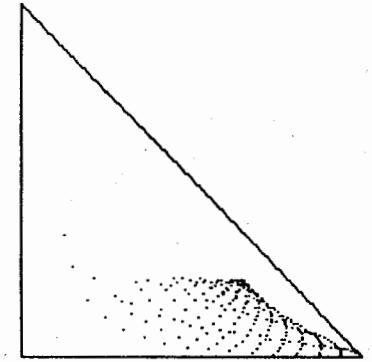


рис. 2

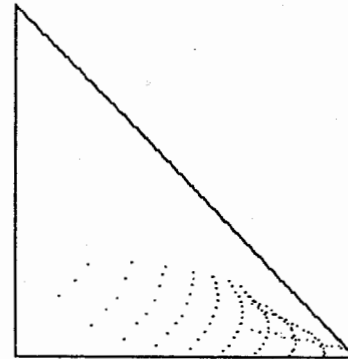


рис. 3

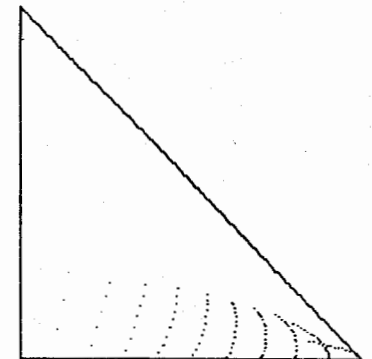


рис. 4

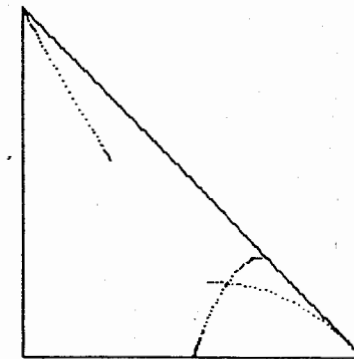


рис. 5

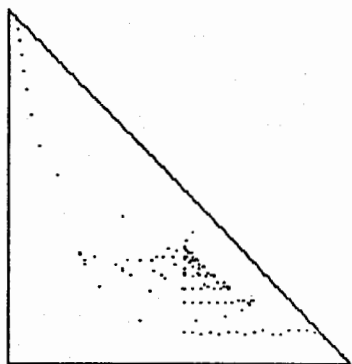


рис. 6

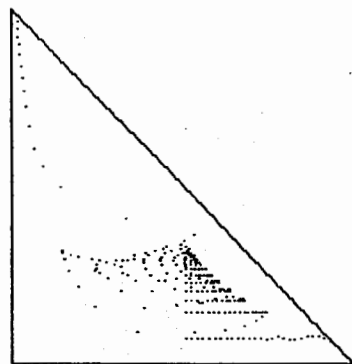


рис. 7

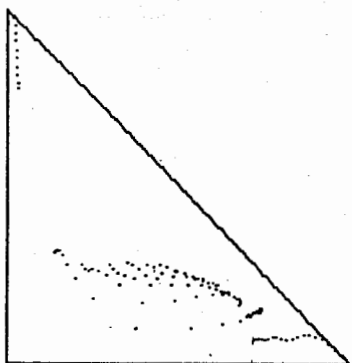


рис. 8

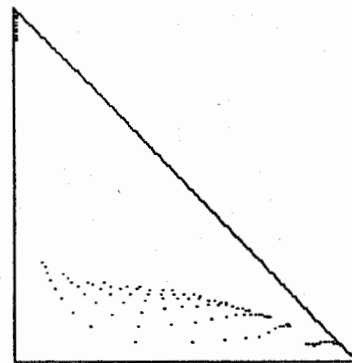


рис. 9

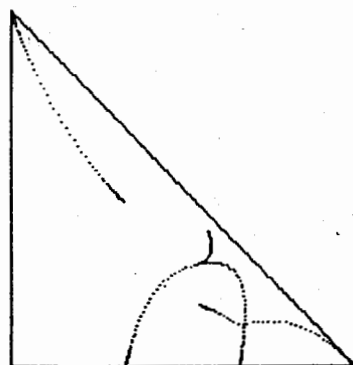


рис. 10

Неоднородность Φ_ℓ -состояний

Рис. 6. $n = 20$ и $\Lambda = 0$. Есть изначально идентифицируемая кластеризация

Рис. 7. $n = 30$ и $\Lambda = 0$. Виден " ℓ - паспорт" изотропного осциллятора. Наблюдается более чёткая изначальная кластеризация

Рис. 8. $n = 20$ и $\Lambda = 100$. Наблюдается процесс распада "пирамиды". Заметны характерные перемещения точек на диаграмме состояний

Рис. 9. $n = 20$ и $\Lambda = 1000$. "Пирамида" практически распалась. Общая картина переместилась к горизонтальному катету, т.е. произошёл переход к более однородному состоянию

Рис. 10. Картина неоднородности Φ_ℓ -состояний с $n = 6$, $m = 0$, и $\ell = 0, 2, 4, 6$. Параметр Λ изменяется от нуля до миллиона



Литература

1. H. Hartman, D. Shuch. Jnt. J. of Quant. Chem. 18, 125, 1980.
2. G. Gerry. Phys. Lett. A 118, 445, 1982; M. Kibler, P. Winternitz. J. Phys. A 20, 4097, 1987.
3. C. Quisne. J. Phys. A 21, 3093, 1988.
4. A. Stone. Proc. Camb. Phil. Soc. 52, 424, 1956; D. Park Zs. Phys. 159, 155, 1960; C. Tarter. J. Math. Phys. 11, 3192, 1970.
5. Г. Погосян, В. Тер-Антонян. ОИЯИ, P2-11-962, Дубна, 1978; Г. Погосян, Я. Смородинский, В. Тер-Антонян. ОИЯИ, P2-82-118, Дубна, 1982.
6. И. Луценко, Г. Погосян, А. Сисакян, В. Тер-Антонян. ТМФ, 83, 419, 1990.
7. А. Сисакян, И. Луценко, Л. Мардоян, Г. Погосян. ОИЯИ, P2-89-814, Дубна, 1989.
8. И. Луценко, В. Тер-Антонян. ОИЯИ, P2-90-109, Дубна, 1990.
9. И. Луценко, А. Магакян, А. Сисакян, В. Тер-Антонян. ОИЯИ, P2-92-48, Дубна, 1992.
10. Э. Флюгге. Задачи по квантовой механике. М.: Мир, 1974, том 1.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 декабря 1992 года.