объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-92-472

Н.С.Шавохина

ЗАДАЧА О МИРОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ, СТЯГИВАЮЩЕЙ МИРОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ

Направлено в труды Международной конференции
«Лобачевский и современная геометрия», Казань, 1992

1992

Идея о мировой двумерной поверхности, стягивающей мировые траектории частиц, была выдвинута Н.А.Черниковым [1] с целью преодолеть трудности релятивистской механики двух частиц. В работах [2] эта идея была применена к релятивистскому описанию движения двух частиц, взаимно притягивающихся с постоянной по модулю силой. В таком случае стягивающая поверхность оказывается минимальной поверхностью в четырехмерном мире Пуанкаре-Минковского. В работах [3] рассмотрен частный случай, когда частицы одинаковы и ось времени t лежит на стягивающей поверхности. В этом случае стягивающая поверхность следующим образом описывается с помощью скалярной функции $\xi(t)$ и векторной функции $\mathbf{k}(t)$.

Рассматриваемую поверхность можно задать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{y}(\eta, t) , \tag{1}$$

где параметры принимают значения

$$- \xi(t) \leqslant \eta \leqslant \xi(t) , \quad - \infty < t < \infty , \tag{2}$$

а функция $\mathbf{y}$ нечётна относительно первого аргумента. Краевые линии $\eta = - \xi(t)$ и $\eta = \xi(t)$ являются мировыми траекториями частиц. Мировую траекторию первой частицы можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{y}(- \xi(t), t) = - \mathbf{x}(t) , \tag{3}$$

а мировую траекторию второй - в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{y}(\xi(t), t) = \mathbf{x}(t) . \tag{4}$$

Если импульс первой частицы равен $-\mathbf{p}(t)$, то импульс второй частицы равен $\mathbf{p}(t)$. Если энергия первой частицы равна $\varepsilon(t)$, то энергия второй частицы равна тоже $\varepsilon(t)$. Из релятивистской механики материальной точки известно, что

$$\mathbf{p}(t) = \varepsilon(t)\ \dot{\mathbf{x}}(t)\ , \tag{5}$$

где точка над фунцией означает производную по её аргументу,

$$\varepsilon(t) = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}(t)|^2\ c^{-2}}\ . \tag{6}$$

В свою очередь, m – масса покоя частицы, c – скорость света. Если $m = 0$, то

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = c\ , \tag{7}$$

а если $m > 0$, то

$$\varepsilon(t) = m\ /\ \sqrt{1 - |\dot{\mathbf{r}}(t)|^2 /\ c^2}\ . \tag{8}$$

В силу уравнений движения рассматриваемой системы стягивающая поверхность минимальна и удовлетворяет двум краевым условиям, одно из которых можно записать в виде закона сохранения энергии

$$\varepsilon(t) + \frac{F}{c^2}\ \xi(t) = E\ , \tag{9}$$

где величины E и F не зависят от времени t. Константа E равна половине энергии системы. Константа F равна модулю силы, с которой частицы притягиваются друг к другу. Пересекая поверхность (1) гиперплоскостью $t = \text{const}$, видим, что рассматриваемую систему можно считать состоящей из двух частиц и стягивающей их "струны". Ось времени t делит "струну" на две одинаковые части. В соответствии с (9) энергия каждой из этих частей равна $F\ c^{-2}\ \xi(t)$. Заметим, что энергия E положительна, так как $\varepsilon > 0$, $\xi > 0$ и $F > 0$.

Согласно формулам Монжа на минимальной поверхности существует изотропная сеть переноса. В соответствии с этим функция $\mathbf{y}$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \mathbf{y}(\eta,\ t) = 0\ . \tag{10}$$

Так как она нечётна относительно η, то её можно представить в виде

$$\frac{F}{c^2}\ \mathbf{y}(\eta,\ t) = -\ \frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial \eta} [\ \mathbf{k}(t + \frac{\eta}{c}) + \mathbf{k}(t - \frac{\eta}{c})\ ]\ , \tag{11}$$

где $\mathbf{k}(t)$ – векторная функция, вторая производная которой равна

$$\ddot{\mathbf{k}}(t) = -\ F\ \frac{\partial}{\partial \eta}\ \mathbf{y}(\eta,\ t)|_{\eta = 0}\ . \tag{12}$$

Так как сеть переноса минимальной поверхности изотропна, то модуль второй производной равен константе F, то есть

$$|\ddot{\mathbf{k}}(t)| = F\ . \tag{13}$$

Из (4) и (11) следует, что

$$\frac{F}{c}\ \mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\ [\ \dot{\mathbf{k}}(v(t)) - \dot{\mathbf{k}}(u(t))\ ]\ , \tag{14}$$

где

$$u(t) = t + \frac{\xi(t)}{c}\ , \qquad v(t) = t - \frac{\xi(t)}{c}\ , \tag{15}$$

а также, что

$$\mathbf{k}(t) - \frac{F}{c^2} \int_0^{\xi(t)} \mathbf{y}(\eta,t)\ d\eta = \frac{1}{2}\ [\ \mathbf{k}(u(t)) + \mathbf{k}(v(t))\ ]\ , \tag{16}$$

$$\dot{\mathbf{k}}(t) - \frac{F}{c^2} \int_0^{\xi(t)} \frac{\partial}{\partial t}\ \mathbf{y}(\eta,t)\ d\eta = \frac{1}{2}\ [\ \dot{\mathbf{k}}(u(t)) + \dot{\mathbf{k}}(v(t))\ ].$$

Первое краевое условие (см.(9)) связывает скалярную функцию $\xi(t)$ с энергией частицы. Второе краевое условие связывает векторную функцию $\mathbf{k}(t)$ с импульсом частицы. Согласно второму условию

$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{2}\,[\,\dot{\mathbf{k}}(u(t) + \dot{\mathbf{k}}(v(t)\,]\,. \qquad (17)$$

Рассмотрим разность

$$\mathbf{N} = \varepsilon(t)\,\mathbf{x}(t) - \frac{1}{2}\,[\,\mathbf{k}(u(t)) + \mathbf{k}(u(t))\,]\,. \qquad (18)$$

Согласно (5) и (14) её производная по времени t равна

$$\mathbf{p}(t) - \frac{1}{2}\,[\,\dot{\mathbf{k}}(u(t) + \dot{\mathbf{k}}(v(t)\,] + [\,\dot{\varepsilon}(t) + \frac{F}{c^2}\,\dot{\xi}(t)\,]\,\mathbf{x}(t)\,. \qquad (19)$$

Следовательно, в силу краевых условий (9) и (17) она равна нулю и вектор $\mathbf{N}$ не зависит от времени. Но ни одна из первых семнадцати формул не изменится, если к вектору $\mathbf{k}(t)$ прибавить какой-нибудь постоянный вектор. Последний можно подобрать так, что станет $\mathbf{N} = 0$, а

$$\varepsilon(t)\,\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\,[\,\mathbf{k}(u(t)) + \mathbf{k}(u(t))\,]\,. \qquad (20)$$

При этом согласно (16) получится

$$\mathbf{k}(t) = \varepsilon(t)\,\mathbf{x}(t) + \frac{F}{c^2}\int_0^{\xi(t)} \mathbf{y}(\eta,t)\,d\,\eta\,. \qquad (21)$$

Наоборот, если вектор $\mathbf{k}(t)$ положить равным (21), то вектор (18) станет равным нулю. Поэтому без ограничения общности можно считать верными равенства (20) и (21).

Из (9), (14) и (20) получается следующая зависимость между функциями $\xi(t)$ и $\mathbf{k}(t)$:

$$\begin{aligned} [\,E\,c^2 - F\,\xi(t)\,]\,[\,\dot{\mathbf{k}}(u(t)) - \dot{\mathbf{k}}(v(t))\,] &= \\ = -\,F\,c\,[\,\mathbf{k}(u(t)) + \mathbf{k}(v(t))\,]\,. \end{aligned} \qquad (22)$$

Заметим, что мировые траектории рассматриваемых частиц являются линиями постоянной кривизны, так как квадрат модуля 4-силы (при $m > 0$) равен

$$\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^2 \left[\left(\frac{d\,\mathbf{p}}{d\,t}\right)^2 - c^2\left(\frac{d\,\varepsilon}{d\,t}\right)^2\right] = F^2\,. \qquad (23)$$

В силу тождества

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{d\,t}\left\{\varepsilon^2\left[\left(\frac{d\,\mathbf{p}}{d\,t}\right)^2 - c^2\left(\frac{d\,\varepsilon}{d\,t}\right)^2\right]\right\} = \dot{\mathbf{x}}\,\dot{\mathbf{p}} \qquad (24)$$

из (23) следует, что

$$\dot{\mathbf{x}}\,(t)\,\dot{\mathbf{p}}\,(t) = 0\,. \qquad (25)$$

Мировые траектории рассматриваемых тел являются асимптотическими линиями на поверхности (1), что видно из равенства

$$\varepsilon\,(t)\,\ddot{\mathbf{x}}\,(t) = \frac{1}{2}\,[\,\ddot{\mathbf{k}}(u(t) + \ddot{\mathbf{k}}(v(t)\,]\,\dot{u}(t)\,\dot{v}(t)\,. \qquad (26)$$

Из равенств (13) и (25) следует,что

$$\ddot{\mathbf{k}}(u(t))\,\dddot{\mathbf{k}}(v(t))\,\dot{v}^2(t) + \ddot{\mathbf{k}}(v(t))\,\dddot{\mathbf{k}}(u(t))\,\dot{u}^2(t) = 0\,, \qquad (27)$$

$$|\dddot{\mathbf{k}}(u(t))|\,\dot{u}^2\,(t) = |\dddot{\mathbf{k}}(v(t))|\,\dot{v}^{\,2}(t)\,. \qquad (28)$$

Имеем три выражения для функции $\varepsilon(t)$. Первое выражение даёт закон сохранения энергии (9). Второе получаем, подставляя в (6) функцию (17).Третье получаем, подставляя в (8) функцию(14):

$$\varepsilon^2(t)\,\dot{u}(t)\,\dot{v}(t)\,[\,F^2 + \ddot{\mathbf{k}}(u(t)\;\ddot{\mathbf{k}}(v(t)\,] = 2\,F^2\,m^2\,. \qquad (29)$$

Итак, релятивистская задача двух одинаковых тел с постоянной по модулю силой притяжения сводится к тому, чтобы по приведённым выше формулам найти функции $\xi(t)$ и $\mathbf{k}(t)$, а значит, и решить уравнение (22).

В работах [3] детально исследованы прямолинейное и круговое движения частиц. Доказано, что при круговом движении стягивающая поверхность является частью геликоида, ограниченного линиями $\xi = \mathrm{const}$, и , наоборот, если ξ не зависит от времени t, то единственным решением сформулированной выше задачи о стягивающей поверхности является часть геликоида, ограниченная винтовыми линиями. При прямолинейном движении стягивающая поверхность является частью плоскости, ограниченной двумя "пилами", состоящими из дуг гиперболы (если $m > 0$) или из прямолинейных отрезков (если $m = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черников Н.А. Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1973, т. 4, вып. 3, с. 773.
2. Черников Н.А., Шавохина Н.С. ТМФ, 1980, т. 42, № 1, с. 59. ТМФ, 1980, т. 43, № 3, с. 356. Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, Крым, 5-9 мая 1981. ОИЯИ, Д2-81-543, Дубна: 1984,с. 85. Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 14.- М.: Энергоатомиздат, 1984, с. 113.
3. Шавохина Н.С. ДАН СССР, 1982, т. 265, № 4, с. 852. Изв. вузов, Физика, 1981, № 7, с. 91. Изв. вузов, Физика, 1982, № 7, с. 66, Изв. вузов, Физика, 1983, № 12, с. 46. В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. - М.: Энергоатомиздат, Вып. 15, 1985, с. 141. Вып. 16, 1985, с. 189. Вып. 17, 1986, с. 187. Труды VII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, Крым, 20-25 апреля 1984. ОИЯИ, Д2-84-366. Дубна: 1984, с. 411. Труды VIII Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, Крым, 11-16 октября 1987. ОИЯИ, Д2-87-798. Дубна: 1987, с. 246.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 ноября 1992 года.