объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-92-469

М.Н.Тентюков

О СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Направлено в труды конференции
«Лобачевский и современная геометрия», Казань, 1992

1992

В недавнем цикле работ Н.А. Черникова [1-3] было показано, что в эйнштейновской теории гравитации с самого начала был потерян важный геометрический объект - фоновая связность. В результате в канонической Общей теории относительности решение проблемы локализации импульсно - энергетических характеристик гравитационного поля оказалось невозможным. Введение фоновой связности позволило построить тензорную теорию гравитации без нелокализуемых физических объектов.

В случае плоского фонового пространства уравнения теории совпадают с уравнениями Эйнштейна. Если же фоновое пространство обладает ненулевой кривизной, то, вообще говоря, уравнения, описывающие гравитацию, отличаются от уравнений Эйнштейна.

В работе [4] рассматривалось сферически-симметричное решение гравитационных уравнений на фоне пространства Лобачевского

$$d\check{s}^2 = c^2dt^2 - dr^2 - k^2\sinh^2\frac{r}{k}\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (1)$$

В настоящей работе исследуются некоторые специфические свойства подобных решений, в частности, определяется характер радиального движения фотонов. Устанавливается, что возможны вакуумные решения двух типов, один из которых напоминает метрику Шварцшильда в форме Фока; то есть аналог теоремы Биркгофа не имеет места. Имеется нетривиальное решение в абсолютно пустом пространстве.

В качестве лагранжиана гравитационного поля выбирается плотность

$$L_g = \sqrt{-g}\; g^{mn}(P^a_{mb}\,P^b_{an} - P^a_{ba}\,P^b_{mn}),$$

где невырожденная метрика g_{ik} описывает гравитацию (g^{mn} - обратный к g_{ik} тензор), $P^a_{mb} = \check{\Gamma}^a_{mb} - \Gamma^a_{mb}$ - тензор аффинной деформации, $\check{\Gamma}^a_{mb} = \check{\Gamma}^a_{bm}$ - коэффициенты фоновой связности, Γ^a_{mb} - символы Кристоффеля для g_{ik}.

Варьированием действия

$$S = \int L_g \, d^4x$$

по g_{mn} получаются уравнения гравитационного поля

$$\Psi^{mn} = 2\frac{\delta S}{\delta g_{mn}} = \tag{2}$$

$$= \sqrt{-g}\, g^{ma}g^{nb}(\check{R}_{ab} + \check{R}_{ba} - \check{R}_{lk}g^{lk}g_{ab} - 2G_{ab}) = 0.$$

Видно, что при $\check{R}_{(ab)} = 0$ из (2) следуют уравнения Эйнштейна $G_{ab} = 0$. Рассмотрим фоновую метрику (1). Будем искать сферически - симметричную статическую метрику

$$ds^2 = V^2dt^2 - F^2dr^2 - H^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{3}$$

удовлетворяющую уравнениям (2), которые в нашем случае имеют вид

$$R_{ij} = \check{R}_{ij}.$$

В (3) V, F, и H являются функциями r. Полагаем $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$.

Недиагональные компоненты как R_{ij}, так и $\check{R}_{ij}$ равны нулю, а диагональные удовлетворяют соотношениям $R_{33} = R_{22}\sin^2\theta$ и $\check{R}_{33} = \check{R}_{22}\sin^2\theta$, и остаются только три уравнения на три неизвестные функции V, F и H:

$$R_{00} = \frac{VV'}{F^2}\left(\frac{F'}{F} + \frac{2H'}{H} - \frac{V'}{V}\right) + \frac{d}{dr}\left(\frac{VV'}{F^2}\right) = 0, \tag{4}$$

$$R_{11} = -\frac{V''}{V} - \frac{2H''}{H} + \frac{F'}{F}\left(\frac{V'}{V} + \frac{2H'}{H}\right) = -\frac{2}{k^2}, \tag{5}$$

$$R_{22} = 1 - \frac{1}{VF}\frac{d}{dr}\left(V\frac{HH'}{F}\right) = -2\sinh^2(r/k). \tag{6}$$

Здесь $'$ означает $\frac{d}{dr}$.

Условие гармоничности $\check{\nabla}_l(\sqrt{-g}g^{l1}) = 0$ имеет вид

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{VH^2}{F}\right) = VF\, k\sinh(2r/k) \tag{7}$$

и, как следует из общей теории [5,6], является следствием всех уравнений (4)-(6). Мы воспользуемся (7) и комбинацией

$$\frac{1}{2}H\left(R_{11} + \frac{F^2}{V^2}R_{00}\right) = H'\frac{(VF)'}{VF} - H''.$$

Вместо (4)-(6) имеем

$$H'' - H/k^2 = H'\frac{(VF)'}{VF}, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{VH^2}{F}\right) = VF\, k\sinh(2r/k), \tag{9}$$

$$\frac{d}{dr}\left(V\frac{HH'}{F}\right) = VF\cosh(2r/k). \tag{10}$$

Обозначим

$$\frac{HH'}{F^2} = \alpha,\quad \frac{H^2}{F^2} = \beta,\quad \frac{H'}{H} = \gamma,\quad \frac{(VF)'}{VF} = w. \tag{11}$$

Используя (11), запишем (8)-(10) в виде

$$\gamma' + \gamma^2 - \gamma w = 1/k^2, \tag{12}$$

$$\beta' + \beta w = k\sinh(2r/k), \tag{13}$$

$$\alpha' + \alpha w = \cosh(2r/k), \tag{14}$$

$$\alpha = \beta\gamma. \tag{15}$$

Если полагать w параметром, то (13) и (14) окажутся линейными уравнениями и, следовательно, могут быть проинтегрированы без труда. Но уравнение (12) - это уравнение Риккати, которое не интегрируется в квадратурах. К счастью, правые части (4)-(6) таковы, что может быть найдено частное решение системы (12)-(15), соответствующее случаю $w = 0$. В самом деле, пусть $w = 0$. Из (13), (14) имеем

$$\alpha = (k/2)\left(\sinh(2r/k) + a/2\right),$$

$$\beta = (k^2/2)\left(\cosh(2r/k) + b/2\right),$$

где a и b - константы интегрирования. Разделяя переменные в (12), получаем

$$\frac{d\gamma}{1/k^2 - \gamma^2} = dr. \qquad (16)$$

Интегрируя (16), приходим к

$$(k/2)\ \ln\left|\frac{1 + \gamma k}{1 - \gamma k}\right| = r + r_0, \qquad (17)$$

где r_0 - константа интегрирования.

Обозначим

$$D = \exp(r_0/k).$$

Из (17) имеем две ветви. Первая:

$$\frac{\gamma k + 1}{\gamma k - 1} = D^2\exp(2r/k), \qquad (18)$$

$$\gamma < -(1/k);\ \gamma > (1/k); \qquad (19)$$

вторая:

$$\frac{1 + \gamma k}{1 - \gamma k} = D^2\exp(2r/k), \qquad (20)$$

$$-(1/k) < \gamma < 1/k. \qquad (21)$$

В гиперболических функциях из (18) получается

$$\gamma_1 = (1/k)\ \tanh^{-1}\left((r + r_0)/k\right),$$

а из (20) -

$$\gamma_2 = (1/k)\ \tanh\left((r + r_0)/k\right). \qquad (22)$$

Как видим, (19) и (21) удовлетворяются. Остаётся подобрать a и b такие, чтобы удовлетворить (15). Подставляя γ, α и β в (15), получаем

$$\alpha_1 = (k/2)\left(\sinh(2r/k) - \sinh(2r_0/k)\right),$$

$$\beta_1 = (k/2)\left(\cosh(2r/k) - \cosh(2r_0/k)\right),$$

$$\gamma_1 = (1/k)\ \tanh^{-1}\left((r + r_0)/k\right)$$

для первой ветви, и

$$\alpha_2 = (k/2)\left(\sinh(2r/k) + \sinh(2r_0/k)\right),$$

$$\beta_2 = (k/2)\left(\cosh(2r/k) + \cosh(2r_0/k)\right),$$

$$\gamma_2 = (1/k)\ \tanh\left((r + r_0)/k\right)$$

для второй. Интегрируя (11), получаем окончательно

$$H_1 = P\ \sinh\frac{r + r_0}{k};\quad F_1^2 = \frac{P^2}{k^2}\ \frac{\sinh\dfrac{r + r_0}{k}}{\sinh\dfrac{r - r_0}{k}};\quad V_1^2 = \frac{Q^2}{F_1^2},$$

$$H_2 = P\ \cosh\frac{r + r_0}{k};\quad F_2^2 = \frac{P^2}{k^2}\ \frac{\cosh\dfrac{r + r_0}{k}}{\cosh\dfrac{r - r_0}{k}};\quad V_2^2 = \frac{Q^2}{F_2^2},$$

где P и Q - константы интегрирования. Требуя, чтобы асимптотика g_{mn} совпадала с $\check{g}_{mn}$, находим $P^2 = k^2\exp(-2r_0/k)$, $Q^2 = c^2$. Обозначая

$$\Lambda_1 = \exp(2r_0/k)\ \frac{\sinh\dfrac{r - r_0}{k}}{\sinh\dfrac{r + r_0}{k}},\quad \Lambda_2 = \exp(2r_0/k)\ \frac{\cosh\dfrac{r - r_0}{k}}{\cosh\dfrac{r + r_0}{k}},$$

два решения (8)-(10) можно записать как

$$ds_1^2 = \Lambda_1 c^2 dt^2 - \Lambda_1^{-1} dr^2 - \exp(-2r_0/k)\ k^2 \sinh^2\frac{r + r_0}{k}\, d\Omega^2, \qquad (23)$$

$$ds_2^2 = \Lambda_2 c^2 dt^2 - \Lambda_2^{-1} dr^2 - \exp(-2r_0/k)\ k^2 \cosh^2\frac{r + r_0}{k}\, d\Omega^2, \qquad (24)$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2$. Метрика (23) впервые была найдена в [4].

Решение (23) похоже на метрику Фока

$$ds^2 = \frac{r - r_0}{r + r_0} c^2dt^2 - \frac{r + r_0}{r - r_0} dr^2 - (r + r_0)^2 d\Omega^2 \qquad (25)$$

и переходит в неё при $k \longrightarrow \infty$. Как и (25), (23) сингулярно при $r = r_0$.

Но второе решение (24) при $k \longrightarrow \infty$ не имеет эйнштейновского предела. Соответствующее (24) решение (22) в пределе $\lim_{r\to\infty} \gamma_2 = 0$ противоречит (8). С другой стороны, именно (24) нарушает аналог теоремы Биркгофа.

Заметим, что при $r_0 \longrightarrow 0$ (23) превращается в (1), но (24) остаётся

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - k^2\cosh^2(r/k)\, d\Omega^2$$

как решение в абсолютно пустом пространстве .

Радиальное движение фотона определяется из условия $dS = d\Omega = 0$. Для (23) имеем:

Радиальная скорость фотона

$$v_1 = dr/dt = \pm c \exp(2r_0/k) \frac{\sinh \frac{r - r_0}{k}}{\sinh \frac{r + r_0}{k}};$$

время радиального движения от R_1 до $r < R_1$

$$\tau_1 = A \ln \frac{\exp(2R_1/k) - \exp(2r_0/k)}{\exp(2r\ /k) - \exp(2r_0/k)} + B \frac{R_1 - r}{c} + \tau_1,$$

где $B = \exp(- 4r_0/k)$, $A = k(1 - B)/(2c)$, τ_1 – время, соответствующее $r = R_1$.

Для (24) соответствующие величины будут:

Радиальная скорость фотона

$$v_2 = dr/dt = \pm c \exp(2r_0/k) \frac{\cosh \frac{r - r_0}{k}}{\cosh \frac{r + r_0}{k}};$$

время радиального движения от R_1 до $r < R_1$

$$\tau_2 = A \ln \frac{\exp(2R_1/k) + \exp(2r_0/k)}{\exp(2r\ /k) + \exp(2r_0/k)} + B \frac{R_1 - r}{c} + \tau_1.$$

При $R_1 \sim r >> r_0$ как τ_1, так и τ_2 приводят к обычному выражению

$$\tau = (1 - B)\frac{R_1 - r}{c} + B \frac{R_1 - r}{c} = \frac{R_1 - r}{c}.$$

Как видим, для достижения $r = r_0$ фотону в (23) требуется бесконечное время, а в (24) это время оказывается конечным. Если $r \longrightarrow r_0$, то $v_1 \longrightarrow 0$, но из (24) имеем монотонное возрастание от $\lim_{r\to\infty} v_2 = c$ до $v_2 = c \exp(2r_0/k)$ при $r = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н.А.Черников. Препринт ОИЯИ Р2-88-778, Дубна, 1988.

[2] Н.А.Черников. Сообщение ОИЯИ Р2-89-182, Дубна, 1989.

[3] Н.А.Черников. Сообщение ОИЯИ Р2-89-224, Дубна, 1989.

[4] Н.А.Черников. Сообщения ОИЯИ Р2-92-108, Дубна, 1992.

[5] М.Н.Тентюков. Труды семинара "Гравитационная энергия и гравитационные волны", ОИЯИ Р2-92-12, Дубна, 1992, с.61-68.

[6] М.Н.Тентюков Препринт ОИЯИ Е2-92-439, Дубна, 1992.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 ноября 1992 года.