объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-92-454

С.А.Гогилидзе[1], В.В.Санадзе[1], Ю.С.Суровцев,
Ф.Г.Ткебучава[1]

ВЫСШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

---

[1] Институт физики высоких энергий
Тбилисского государственного университета

1992

1. Введение

Известно, что калибровочные теории относятся к классу вырожденных. Для этих теорий разработан как гамильтонов [1–5], так и лагранжев подход [3, 5]. Относительно эквивалентности этих двух подходов, например, показано [6], что оба они приводят к одним и тем же динамическим траекториям в конфигурационном пространстве, однако некоторые из других аспектов этого вопроса имеют ряд нетривиальных моментов. Мы здесь остановимся на калибровочных преобразованиях. Дирак показал, что калибровочные степени свободы обусловливают наличие в теории связей первого рода, более того, он высказал гипотезу, что все связи первого рода генерируют калибровочные преобразования [1]. Различные попытки построения калибровочных преобразований в фазовом пространстве исходили фактически из разного отношения к этой гипотезе (в одних она принималась полностью [7,8], в других отвергалась [9,10]. В наших предыдущих работах [11] мы получили в обобщённом гамильтоновом формализме калибровочные преобразования для определённого класса вырожденных лагранжианов (с ограничением на алгебру связей: скобки Пуассона (СП) первичных связей со всеми связями являются линейной комбинацией первичных связей)[2] и показали, что гипотеза Дирака справедлива. Производящая функция полученных преобразований может зависеть как от координат фазового пространства, так и от их производных по времени, причём можно видеть, что это имеет место, когда в законе преобразования второй теоремы Нётер содержатся как координаты, так и их высшие производные. В этом случае встаёт вопрос о каноничности полученных преобразований.

Следует отметить работы [2,11,12], в которых не возникает этого вопроса, поскольку в них искомая производящая функция задавалась в виде, при котором соответствующие калибровочные преобразования являются каноническими автоматически. Однако этим методом не охватываются те случаи, когда калибровочные преобразования в конфигурационном пространстве зависят от высших производных по

[2]Здесь и далее рассматриваются теории только со связями первого рода, поскольку именно эти связи ответственны за калибровочные степени свободы

времени от координат. В работе [7] использовался обобщённый гамильтониан H_E, получающийся добавлением к каноническому гамильтониану всех связей первого рода со своими множителями Лагранжа, которые объявлялись дополнительными координатами. Для них постулировался определённый закон преобразования. Однако таким образом расширенное пространство не имеет симплектической структуры фазового пространства. Отметим также, что вышеуказанное ограничение на алгебру связей имеет место и в перечисленных подходах.

В данной работе мы покажем, что полученные нами ранее калибровочные преобразования [11] являются каноническими в"естественным" образом расширенном фазовом пространстве. При этом динамика системы в секторе переменных исходного фазового пространства остаётся неизменной. Расширение фазового пространства требуется в случае, когда закон преобразования в конфигурационном пространстве содержит также высшие производные от координат. Тем самым выявляется механизм возникновения высших производных в бесконечномерной группе симметрии, соответствующей второй теореме Нётер. Метод продемонстрирован на примере.

2. Калибровочные преобразования

Сначала введём используемые в дальнейшем определения. Для простоты будем рассматривать систему с конечным числом степеней свободы, описываемую вырожденным лагранжианом $L(q,\dot{q})$, где $q = (q_1,\cdots,q_N)$ и $\dot{q} = \frac{d}{dt}q = (\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_N)$–обобщённые координаты и скорости. Вырожденность лагранжиана означает, что

$$\operatorname{rang}\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right\| = R < N, \qquad i,j = 1,\cdots,N. \tag{1}$$

Для перехода к гамильтонову формализму введём импульсные переменные

$$p_i(q,\dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}, \tag{2}$$

которые вследствие условия (1) не все независимы. В результате возникает $N-R$ соотношений:

$$\phi^1_\alpha(q,p) \approx 0, \qquad \alpha = 1,\cdots,N-R. \tag{3}$$

Здесь ϕ^1_α, по терминологии Дирака [1], есть первичные связи, а $\approx$ обозначает слабое равенство.

Гамильтоновы уравнения движения записываются с помощью стандартных СП с полным гамильтонианом H_T:

$$H_T = H_c + u_\alpha\phi^1_\alpha, \tag{4}$$

где H_c—канонический гамильтониан, $u_\alpha(t)$—множители Лагранжа.

Условие самосогласованности уравнений движения требует сохранения во времени первичных связей. Отсюда возникают вторичные связи $\phi^2_\alpha(q,p) \approx 0$, которые также должны быть стационарными, что приводит к связям следующего этапа. Этот процесс, будучи продолженным, завершится для внутренне непротиворечивых теорий на некотором этапе M_α. Весь набор связей, как первичных, так и вторичных всех этапов, обозначим

$$\phi^{m_\alpha}_\alpha, \qquad \alpha = 1,\cdots,N-R, \qquad m_\alpha = 1,2,\cdots,M_\alpha. \tag{5}$$

Система (5) представляет собой полный набор независимых функций. Условие независимости означает, что ни одну из связей $\phi^{m_\alpha}_\alpha$ нельзя представить в виде линейной комбинации остальных с коэффициентами, зависящими от q и p, а полнота подразумевает, что любая функция от q и p, равная нулю на поверхности связей, выражается линейно через $\phi^{m_\alpha}_\alpha$ с коэффициентами, зависящими от q и p [1].

Связи $\phi^{m_\alpha}_\alpha$ и H_c, как величины первого рода, удовлетворяют соотношениям:

$$\{\phi^{m_\alpha}_\alpha, \phi^{m_\beta}_\beta\} = f^{m_\alpha\, m_\beta\, m_\gamma}_{\alpha\ \ \beta\ \ \gamma}\phi^{m_\gamma}_\gamma, \tag{6}$$

$$\{\phi^{m_\sigma}_\sigma, H_c\} = g^{m_\sigma\, m_\tau}_{\sigma\ \ \tau}\phi^{m_\tau}_\tau, \tag{7}$$

$\alpha,\beta,\gamma,\sigma,\tau = 1,\cdots,N-R, \quad m_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma} = 1,\cdots,M_{\alpha,\beta,\gamma,\sigma}, \quad m_\tau = 1,\cdots,m_\sigma+1.$

(Здесь и далее по повторяющимся индексам, как верхним, так и нижним, подразумевается суммирование.) В формулах (6) и (7) использованы стандартные СП.

В наших предыдущих работах [11] инфинитезимальные калибровочные преобразования в соответствии с гипотезой Дирака искались в виде

$$q_i' = q_i + \delta q_i, \quad \delta q_i = \{q_i, G\},$$
$$p_i' = p_i + \delta p_i, \quad \delta p_i = \{p_i, G\}, \tag{8}$$

где производящая функция G есть

$$G = \varepsilon_\alpha^{m_\alpha} \phi_\alpha^{m_\alpha}. \tag{9}$$

В соответствии с определением преобразований симметрии требовалась инвариантность действия S относительно этих преобразований. Удовлетворить этому требованию удаётся для тех теорий, первичные связи которых являются идеалом псевдоалгебры связей,т.е.

$$\{\phi_\alpha^1, \phi_\beta^{m_\beta}\} = f_\alpha^1{}_\beta^{m_\beta}{}_\gamma^1 \phi_\gamma^1, \tag{10}$$

при следующем ограничении на $\varepsilon_\alpha^{m_\alpha}$:

$$\dot\varepsilon_\alpha^{m_\alpha} + g_\beta^{m_\beta}{}_\alpha^{m_\alpha} \varepsilon_\beta^{m_\beta} = 0, \qquad m_\beta = m_\alpha - 1, \cdots, M_\alpha. \tag{11}$$

Большинство физических теорий обладает структурой связей (10), хотя легко можно увидеть, что переходом к эквивалентному набору связей это условие может быть нарушено.

Система уравнений (11) является неполной. Количество неизвестных функций больше числа уравнений на число первичных связей. Однако укажем, что систему уравнений (11) фактически не требуется решать. Вводя произвольные функции ε_α в количестве первичных связей, с помощью итерационной процедуры (см. Приложение) можно выразить все $\varepsilon_\alpha^{m_\alpha}$ в виде:

$$\varepsilon_\alpha^{m_\alpha} = B_\alpha^{m_\alpha}{}_\beta^{m_\beta} \varepsilon_\beta^{(M_\alpha - m_\beta)}, \qquad m_\beta = m_\alpha, \cdots, M_\alpha \tag{12}$$

(в формуле (12) суммирование идёт также по m_β), где

$$\varepsilon_\beta^{(M_\alpha - m_\beta)} \equiv \frac{d^{M_\alpha - m_\beta}}{dt^{M_\alpha - m_\beta}} \varepsilon_\beta(t), \qquad \varepsilon_\beta(t) \equiv \varepsilon_\beta^{M_\beta}.$$

Коэффициенты $B_\alpha^{m_\alpha}{}_\beta^{m_\beta}$ в (12) в принципе могут зависеть от q, p и их производных до порядка $M_\alpha - 2$ включительно. Тогда окончательно производящая функция может быть записана в виде

$$G = B_\alpha^{m_\alpha}{}_\beta^{m_\beta} \phi_\alpha^{m_\alpha} \varepsilon_\beta^{(M_\alpha - m_\beta)}, \qquad m_\beta = m_\alpha, \cdots, M_\alpha. \tag{13}$$

Видно, что количество существенных параметров $\varepsilon_\alpha(t)$, от которых зависит производящая функция G, равняется числу первичных связей, причём в закон преобразования могут входить как функции $\varepsilon_\alpha(t)$, так и их производные до $M_\alpha - 1$ порядка включительно, при этом наивысшие производные $\varepsilon_\alpha^{(M_\alpha - 1)}$ присутствуют с необходимостью.

Как будет видно из дальнейшего, зависимость коэффициентов $B_\alpha^{m_\alpha}{}_\beta^{m_\beta}$ от производных от q и p имеет место в том случае, когда в закон преобразования в конфигурационном пространстве и в поверхностный член в вариации действия входят производные от координат выше первого порядка. Ясно, что в этом случае встаёт вопрос о"явной" каноничности полученных преобразований вне поверхности связей. В следующем разделе мы покажем, что производящая функция (13) генерирует канонические преобразования в расширенном фазовом пространстве.

3. Доказательство каноничности калибровочных преобразований

Рассмотрим лагранжиан $L(q, \dot q)$ и преобразования локальной калибровочной симметрии, в которые входят производные от координат выше первого порядка. При этом преобразовании имеем

$$L' = L(q, \dot q) + \frac{d}{dt} F(q, \dot q, \ddot q, \cdots, \varepsilon, \dot\varepsilon, \cdots), \tag{14}$$

где $\varepsilon(t)$—существенные параметры. Добавление к лагранжиану $L(q, \dot q)$ полной производной по времени от функции, зависящей в том числе от производных высшего порядка, не меняет лагранжевых уравнений движения. Как видно из (14), на теорию с лагранжианом L' следует смотреть как на теорию с высшими производными. Как лагранжевы, так и гамильтоновы формулировки теорий с лагранжианами L и L' эквивалентны [13,14]. Гамильтонова формулировка теории с L' строится в расширенном фазовом пространстве. Эквивалентность гамильтоновых формулировок теорий с L и L' означает, что гамильтоновы уравнения движения этих двух теорий связаны каноническими преобразованиями. Поэтому гамильтонова формулировка теории с лагранжианом L должна быть построена в том же расширенном фазовом пространстве, что и для L'. То есть теорию с L с самого начала будем рассматривать как теорию с высшими производными того же порядка, что и у L'.

Из приведённых рассуждений понятно, что требовать каноничность калибровочных преобразований имеет смысл в указанном расширенном фазовом пространстве.

Итак, построим расширенное фазовое пространство, при этом используем формализм теорий с высшими производными [13–15]. Определим координаты

$$q_{1\ i} = q_i, \quad q_{s\ i} = \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} q_i, \quad s = 2, \cdots, K, \quad i = 1, \cdots, N \tag{15}$$

(K равняется наивысшему порядку производных от q и p) и сопряжённые им импульсы, вычисляемые по формуле

$$p_{r\ i} = \sum_{l=r}^{K} (-1)^{l-r} \frac{d^{l-r}}{dt^{l-r}} \frac{\partial L}{\partial q_{r+1\ i}},$$

$$p_{1\ i} = p_i, \quad p_{s\ i} = 0 \quad \text{для} \quad s = 2, \cdots, K. \tag{16}$$

Обобщённые импульсы для $s \geq 2$ представляют собой дополнительные первичные связи.

В расширенном фазовом пространстве полный гамильтониан запишется

$$\bar{H}_T = H_T(q_{1\ i}, p_{1\ i}) + \lambda_{s\ i}\, p_{s\ i}, \quad s \geq 2, \tag{17}$$

где H_T имеет тот же вид, что и в (4), а $\lambda_{s\ i}$—произвольные функции времени.

Из вида (17) можно заключить, что дополнительных вторичных связей, соответствующих $p_{s\ i}$ для $s \geq 2$, не возникает. Набор связей (5) в первоначальном фазовом пространстве остаётся тем же в расширенном фазовом пространстве, удовлетворяет той же алгебре (6),(7) и, как и H_T , не зависит от новых координат и импульсов.

Будем искать производящую функцию в том же виде (9), что и в первоначальном фазовом пространстве. Тогда из требования инвариантности действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt [p_{r\ i}\, q_{r+1\ i} + p_{K\ i}\, \dot{q}_{K\ i} - \bar{H}_T], \qquad r = 1, \cdots, K-1$$

относительно преобразований, генерируемых этой производящей функцией, получим те же ограничения (11) на $\varepsilon_\alpha^{m_\alpha}$.

Прежде чем проводить вышеуказанную итерационную процедуру, дающую результат (12), отметим, что коэффициенты $B_{\alpha\ \beta}^{m_\alpha m_\beta}$ будут зависеть только от $q_{1\ i}$ и $p_{1\ i}$ и их производных. Теперь, проводя итерационную процедуру, будем заменять производные от $q_{1\ i}$ в соответствии с формулой (15), а для производных от $p_{1\ i}$ будем делать следующие замены:

$$\begin{aligned}
p_{1\ i} &= \frac{\partial L}{\partial q_{2\ i}} = h_0^i(q_{1\ k}, q_{2\ k}), \qquad i,k = 1, \cdots, N,\\
\dot{p}_{1\ i} &= \frac{\partial h_0^i}{\partial q_{1\ n}} q_{2\ n} + \frac{\partial h_0^i}{\partial q_{2\ n}} q_{3\ n} = h_1^i(q_{1\ k}, q_{2\ k}, q_{3\ k}),\\
&\vdots\\
p_{1\ i}^{(M_\alpha - 2)} &= h_{M_\alpha - 2}^i(q_{1\ k}, q_{2\ k}, \cdots, q_{M_\alpha - 1\ k}).
\end{aligned}$$

В результате получим выражение для $B_{\alpha\ \beta}^{m_\alpha m_\beta}(q_{1\ i}, \cdots, q_{M_\alpha - 1\ i}; p_{1\ i})$ по виду такие же, как и в исходном фазовом пространстве, однако записанные с учётом вышеуказанных замен. Тогда калибровочные преобразования в расширенном фазовом пространстве имеют вид:

$$\delta q_{1\ k} = \varepsilon_\beta^{(M_\alpha - m_\beta)}(t) \{ q_{1\ k}, B_{\alpha\ \beta}^{m_\alpha m_\beta}(q_{1\ i}, \cdots, q_{M_\alpha - 1\ i}; p_{1\ i}) \phi_\alpha^{m_\alpha}(q_{1\ i}, p_{1\ i}) \}, \tag{18}$$

$$\delta p_{1\ k} = \varepsilon_\beta^{(M_\alpha - m_\beta)}(t) \{ p_{1\ k}, B_{\alpha\ \beta}^{m_\alpha m_\beta}(q_{1\ i}, \cdots, q_{M_\alpha - 1\ i}; p_{1\ i}) \phi_\alpha^{m_\alpha}(q_{1\ i}, p_{1\ i}) \},$$

где СП определены следующим образом:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_{r\ i}} \frac{\partial B}{\partial p_{r\ i}} - \frac{\partial A}{\partial p_{r\ i}} \frac{\partial B}{\partial q_{r\ i}}.$$

Можно убедиться, что

$$\{q_{i\ k} + \delta q_{i\ k}, p_{j\ n} + \delta p_{j\ n}\} = \delta_{ij} \delta_{kn},$$

то есть полученные инфинитезимальные калибровочные преобразования являются каноническими в расширенном фазовом пространстве.

Калибровочные преобразования в конфигурационном пространстве можно получить, если после вычисления СП в первой формуле (18) учесть определения (15) и (2) , а для $\delta \dot{q}$ использовать формулу $\delta \dot{q} =$

$\frac{d}{dt}\delta q$. Это преобразования Нётер. (Заметим, что, как видно из (18), для сокращения расчётов можно при получении этих преобразований использовать формулы (8) в первоначальном фазовом пространстве, если применять следующее "правило": производные от q и p просто выносятся за СП.) При этом если коэффициенты $B_{\alpha}^{m_\alpha}{}_{\beta}^{m_\beta}$ явно зависят от $q_{s\ i}$, где $s \geq 2$, то в законе преобразования в конфигурационном пространстве появляются высшие производные от координат, $q_i^{(s)}(s \geq 2)$. О появлении такой зависимости сигнализируют функции $g_{\sigma}^{m_\sigma}{}_{\tau}^{m_\tau}$, возникающие в формуле (7). Причём о порядке наивысшей производной от координат можно судить уже вначале,при получении явного вида $g_{\sigma}^{m_\sigma}{}_{\tau}^{m_\tau}$. Для этого рассмотрим системы соотношений (26) и (27) в Приложении. Можно видеть, что если какие-либо из коэффициентов $g_{\alpha}^{M_\alpha-1}{}_{\beta}^{M_\alpha}$ и $g_{\alpha}^{M_\alpha}{}_{\beta}^{M_\alpha}$ перед связями последнего этапа M_α зависят от $q_{1\ i}$ и $p_{1\ i}$, то $B_{\alpha}^{m_\alpha}{}_{\beta}^{m_\beta}$ будут зависеть от $q_{s\ i}(s = 2, \cdots, M_\alpha - 1)$, а в производящую функцию G, как видно из (27), будут входить $q_{s\ i}(s = 2, \cdots, K)$. Тогда с учётом (15) порядок наивысшей возможной производной от координат в законе нётеровских преобразований в конфигурационном пространстве равняется $K \equiv \max_\alpha(M_\alpha - 1)$. Если же эти коэффициенты являются константами, а какие-либо из коэффициентов $g_{\alpha}^{M_\alpha-2}{}_{\beta}^{M_\alpha-1}$, $g_{\alpha}^{M_\alpha-1}{}_{\beta}^{M_\alpha-1}$ и $g_{\alpha}^{M_\alpha}{}_{\beta}^{M_\alpha-1}$ перед связями предыдущего этапа $\phi_{\beta}^{M_\alpha-1}$ зависят от $q_{1\ i}$ и $p_{1\ i}$, то в законе нётеровских преобразований порядок наивысшей возможной производной будет на единицу меньше: $\max_\alpha(M_\alpha - 2)$. И вообще в произвольном случае, если какие-либо из коэффициентов перед связями k-го этапа ϕ_β^k зависят от $q_{1\ i}$ и $p_{1\ i}$, а все коэффициенты перед связями $\phi_\beta^{k+i}(i = 1, \cdots, M_\alpha - k)$ являются константами, то порядок наивысшей возможной производной в законе нётеровских преобразований есть $M_\alpha - k$.

Порядок наивысшей производной от $\varepsilon_\alpha(t)$,входящей в закон нётеровских преобразований, всегда равен $M_\alpha - 1$. Отметим, что количество произвольных функций $\varepsilon_\alpha(t)$ равняется количеству первичных связей.

4. Пример

Продемонстрируем вышеописанные результаты на примере следу-

ющего лагранжиана:

$$L = \dot{x}\dot{z} + xyz. \tag{19}$$

Тогда канонический гамильтониан имеет вид

$$H_c = p_x p_z - xyz.$$

При этом возникают одна первичная и три вторичных связи разных этапов :

$$\phi_1^1 = p_y, \qquad \phi_1^2 = xz, \qquad \phi_1^3 = xp_x + zp_z, \qquad \phi_1^4 = 2p_x p_z.$$

Теперь по формуле (7) получаем, что отличны от нуля только следующие элементы $g_{\sigma}^{m_\sigma}{}_{\tau}^{m_\tau}$:

$$g_1^1{}_1^2 = g_1^2{}_1^3 = g_1^3{}_1^4 = 1, \qquad g_1^3{}_1^2 = g_1^4{}_1^3 = 2y.$$

Тогда система уравнений (11) запишется как

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1^4 + \varepsilon_1^3 &= 0, \\ \dot{\varepsilon}_1^3 + 2y\varepsilon_1^4 + \varepsilon_1^2 &= 0, \\ \dot{\varepsilon}_1^2 + 2y\varepsilon_1^3 + \varepsilon_1^1 &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Определяя $\varepsilon_1^4 = \varepsilon$ и проведя описанную выше итерационную процедуру, получим следующее выражение для G:

$$G = (-\dddot{\varepsilon} + 4y\dot{\varepsilon} + 2\dot{y}\varepsilon)p_y + (\ddot{\varepsilon} - 2y\varepsilon)xz - \dot{\varepsilon}(xp_x + zp_z) + 2\varepsilon p_x p_z. \tag{21}$$

Так как выражение (21) зависит от $\dot{y}$, то, чтобы показать каноничность соответствующих преобразований, возникает необходимость расширения фазового пространства. Для этого введём переменные

$$x_1 = x, \qquad x_2 = \dot{x}_1, \tag{22}$$

соответственно для y и z. Тогда по формулам (16), и учитывая, что лагранжиан (19) не зависит от ускорений, получаем выражения для импульсов:

$$p_{1x} = p_x, \qquad p_{1y} = 0, \qquad p_{1z} = p_z, \tag{23}$$

$$p_{2x} = p_{2y} = p_{2z} = 0. \tag{24}$$

Равенства (24) представляют собой дополнительные первичные связи.

В расширенном фазовом пространстве с учётом (22)–(24) следовало бы провести процедуру репараметризации системы уравнений (20), хотя формально для получения окончательного вида достаточно записать G в координатах этого расширенного пространства:

$$G = (-\ddot{\varepsilon} + 4y_1\dot{\varepsilon} + 2y_2\varepsilon)p_{1y} + (\ddot{\varepsilon} - 2y_1\varepsilon)x_1 z_1 - \\ -\dot{\varepsilon}(x_1 p_{1x} + z_1 p_{1z}) + 2\varepsilon p_{1x} p_{1z}. \qquad (25)$$

Видно, что калибровочные преобразования, генерируемые этой производящей функцией G, уже являются каноническими в расширенном фазовом пространстве. Они имеют следующий вид:

$$\delta x_1 = -\dot{\varepsilon}x_1 + 2\varepsilon p_{1z}, \quad \delta y_1 = -\ddot{\varepsilon} + 4\dot{\varepsilon}y_1 + 2\varepsilon y_2, \quad \delta z_1 = -\dot{\varepsilon}z_1 + 2\varepsilon z_2,$$

$$\delta p_{1x} = (2y_1\varepsilon - \ddot{\varepsilon})z_1 + \dot{\varepsilon}p_{1x}, \quad \delta p_{1y} = -4\dot{\varepsilon}p_{1y} + 2\varepsilon x_1 z_1, \quad \delta p_{1z} = (2y_1\varepsilon - \ddot{\varepsilon})x_1 + \dot{\varepsilon}p_{1z}.$$

Переходя в конфигурационное пространство и записывая закон преобразования скоростей с учётом обозначений (22) в виде

$$\delta x_2 = \delta\dot{x}_1 = \frac{d}{dt}\delta x_1$$

(аналогично для δy_2 и δz_2), можно убедиться, что

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left[2(\dot{x}\dot{z} + xyz)\varepsilon - xz\ddot{\varepsilon}\right],$$

то есть действие инвариантно относительно полученных преобразований.

5. Заключение

При построении калибровочных преобразований в фазовом пространстве на основе гипотезы Дирака [1] производящая функция (13) может зависеть от производных от координат и импульсов (см. Приложение). Поэтому скобки Пуассона в (8) не определены. В данной работе показано, что эта трудность преодолевается посредством расширения фазового пространства. Это расширение проведено по следующему рецепту: из систем уравнений (26),(27) устанавливаем порядок

наивысшей производной по времени от q и p, и считаем, что исходная теория является теорией с высшими производными на единицу большего порядка; затем строим производящую функцию преобразований в фазовом пространстве этой теории. Показано, что калибровочные преобразования являются каноническими в расширенном фазовом пространстве, а соответствующие нётеровские преобразования в конфигурационном пространстве содержат высшие производные от координат, наивысший порядок которых определяется структурой алгебры связей. Выяснен механизм появления высших производных от координат в законе преобразования симметрии во второй теореме Нётер.

Все эти выводы легко обобщаются на теории с высшими производными. Наконец, заметим, что при получении калибровочных преобразований предложенным методом не возникает дополнительных трудностей и не требуется дополнительных предположений по сравнению с подходом Дирака.

Авторы выражают благодарность А.Б.Говоркову, А.Н.Квинихидзе, В.В.Нестеренко и А.М.Хведелидзе за полезные обсуждения.

Приложение

Покажем, как можно вывести формулу (12) из системы уравнений (11). Запишем систему равенств (7) на поверхности первичных связей:

$$\begin{aligned}
\{\phi^1_\alpha, H_c\} &= g_\alpha^{1}{}_\beta^{2}\phi^2_\beta, \\
\{\phi^2_\alpha, H_c\} &= g_\alpha^{2}{}_\beta^{2}\phi^2_\beta + g_\alpha^{2}{}_\beta^{3}\phi^3_\beta, \\
&\vdots \\
\{\phi^{M_\alpha-2}_\alpha, H_c\} &= g_\alpha^{M_\alpha-2}{}_\beta^{2}\phi^2_\beta + g_\alpha^{M_\alpha-2}{}_\beta^{3}\phi^3_\beta + \cdots + g_\alpha^{M_\alpha-2}{}_\beta^{M_\alpha-1}\phi^{M_\alpha-1}_\beta, \\
\{\phi^{M_\alpha-1}_\alpha, H_c\} &= g_\alpha^{M_\alpha-1}{}_\beta^{2}\phi^2_\beta + g_\alpha^{M_\alpha-1}{}_\beta^{3}\phi^3_\beta + \cdots + g_\alpha^{M_\alpha-1}{}_\beta^{M_\alpha-1}\phi^{M_\alpha-1}_\beta + \\
&+ g_\alpha^{M_\alpha-1}{}_\beta^{M_\alpha}\phi^{M_\alpha}_\beta, \\
\{\phi^{M_\alpha}_\alpha, H_c\} &= g_\alpha^{M_\alpha}{}_\beta^{2}\phi^2_\beta + g_\alpha^{M_\alpha}{}_\beta^{3}\phi^3_\beta + \cdots + g_\alpha^{M_\alpha}{}_\beta^{M_\alpha-1}\phi^{M_\alpha-1}_\beta + g_\alpha^{M_\alpha}{}_\beta^{M_\alpha}\phi^{M_\alpha}_\beta.
\end{aligned} \qquad (26)$$

Можно видеть, что

$$g_\alpha^{m_\alpha}{}_\beta^{m_\beta} \equiv 0 \quad \text{при} \quad m_\beta - m_\alpha \geq 2.$$

Тогда систему уравнений (11) можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&\dot{\varepsilon}_\alpha^{M_\alpha} + g_\beta^{M_\alpha}{}_\alpha^{M_\alpha}\varepsilon_\beta^{M_\alpha} + g_\beta^{M_\alpha-1}{}_\alpha^{M_\alpha}\varepsilon_\beta^{M_\alpha-1} = 0,\\
&\dot{\varepsilon}_\alpha^{M_\alpha-1} + g_\beta^{M_\alpha}{}_\alpha^{M_\alpha-1}\varepsilon_\beta^{M_\alpha} + g_\beta^{M_\alpha-1}{}_\alpha^{M_\alpha-1}\varepsilon_\beta^{M_\alpha-1} + g_\beta^{M_\alpha-2}{}_\alpha^{M_\alpha-1}\varepsilon_\beta^{M_\alpha-2} = 0,\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (27)\\
&\dot{\varepsilon}_\alpha^{2} + g_\beta^{M_\alpha}{}_\alpha^{2}\varepsilon_\beta^{M_\alpha} + g_\beta^{M_\alpha-1}{}_\alpha^{2}\varepsilon_\beta^{M_\alpha-1} + g_\beta^{1}{}_\alpha^{2}\varepsilon_\beta^{1} = 0,\\
&\qquad \alpha,\beta = 1,\cdots,N-R.
\end{aligned}
$$

Обозначив $\varepsilon_\alpha \equiv \varepsilon_\alpha^{M_\alpha}$ и подставляя это в первую строчку системы (27), получим систему $N-R$ неоднородных алгебраических уравнений относительно $N-R$ неизвестных $\varepsilon_\beta^{M_\alpha-1} (\beta = 1,\cdots,N-R)$. Решая эту систему и подставляя результат во вторую строчку системы (27), опять получим систему $N-R$ неоднородных алгебраических уравнений относительно $N-R$ неизвестных $\varepsilon_\beta^{M_\alpha-2}$, которую следует разрешить, подставить результат в следующую строчку системы (27) и т.д. до последней строчки, где будет получена система $N-R$ уравнений относительно $N-R$ неизвестных ε_β^1, разрешая которую,получим, что все $\varepsilon_\alpha^{m_\alpha}$ выражаются через $\varepsilon_\alpha(t)$ и их производные (формула (12)).

Теперь покажем, что каждая вышеуказанная система $N-R$ неоднородных алгебраических уравнений всегда имеет решение, так как набор связей (5) состоит из независимых функций. Для этого выпишем некоторую произвольную строчку системы уравнений (27):

$$
\begin{aligned}
&\dot{\varepsilon}_\alpha^{M_\alpha-k} + g_\beta^{M_\alpha}{}_\alpha^{M_\alpha-k}\varepsilon_\beta^{M_\alpha} + \cdots + g_\beta^{M_\alpha-k}{}_\alpha^{M_\alpha-k}\varepsilon_\beta^{M_\alpha-k} + \qquad (28)\\
&+ g_\beta^{M_\alpha-k-1}{}_\alpha^{M_\alpha-k}\varepsilon_\beta^{M_\alpha-k-1} = 0, \qquad k = 0,1,\cdots,M_\alpha-2.
\end{aligned}
$$

(28)—система $N-R$ неоднородных алгебраических уравнений относительно $N-R$ неизвестных $\varepsilon_\beta^{M_\alpha-k-1}$; при этом будем считать, что все величины $\varepsilon_\beta^{M_\alpha-k},\cdots,\varepsilon_\beta^{M_\alpha}$ выражены как функции ε_α и их производных в соответствии с вышеописанной процедурой. Предположим, что эта система не имеет решения, то есть

$$
\det\left\| g_\beta^{M_\alpha-k-1}{}_\alpha^{M_\alpha-k} \right\| = 0. \qquad (29)
$$

Далее мы покажем, что равенство (29) придёт в противоречие с условием независимости связей. Действительно, имеем

$$
\{\phi_\beta^{M_\alpha-k-1}, H_c\}\big|_\Sigma = g_\beta^{M_\alpha-k-1}{}_\alpha^{M_\alpha-k}\phi_\alpha^{M_\alpha-k}, \qquad (30)
$$

где Σ означает поверхность всех связей до этапа $M_\alpha-k-1$ включительно. Из равенства (29) следует

$$
g_\beta^{M_\alpha-k-1}{}_\alpha^{M_\alpha-k} = D_{\beta\sigma} g_\sigma^{M_\alpha-k-1}{}_\alpha^{M_\alpha-k}. \qquad (31)
$$

Подставляя (31) в правую часть (30), получаем

$$
\{\phi_\beta^{M_\alpha-k-1}, H_c\}\big|_\Sigma = D_{\beta\sigma} g_\sigma^{M_\alpha-k-1}{}_\alpha^{M_\alpha-k}\phi_\alpha^{M_\alpha-k} = \{D_{\beta\sigma}\phi_\sigma^{M_\alpha-k-1}, H_c\}\big|_\Sigma.
$$

Отсюда

$$
\{\phi_\beta^{M_\alpha-k-1} - D_{\beta\sigma}\phi_\sigma^{M_\alpha-k-1}, H_c\}\big|_\Sigma = 0.
$$

Последнее равенство означает, что

$$
\phi_\beta^{M_\alpha-k-1} = D_{\beta\sigma}\phi_\sigma^{M_\alpha-k-1} + d_\beta^{m_\beta}\phi_\beta^{M_\alpha-m_\beta}, \qquad m_\beta = k+1,\cdots,M_\alpha-1,
$$

где $d_\beta^{m_\beta}$—произвольные функции q и p, не равные нулю на поверхности связей Σ. То есть мы получили противоречие с условием независимости связей. Итак, доказано, что вышеописанная итерационная процедура всегда выполнима.

Литература

1. *Dirac P.A.M.* Can. J. Math. 1950. V.2. P.129; Lectures on Quantum Mechanics. New York: Yeshiva Univ.Press, 1964.

2. *Anderson J.L., Bergmann P.G.* Phys. Rev. 1951. V.83. P.1018. *Bergmann P.G., Goldberg J.* Phys. Rev. 1955. V.98. P.531.

3. *Sudarshan E.C.G., Mukunda N.* Classical Dynamics–A Modern Perspective. New York: Wiley–Interscience, 1974. P.78.

4. *Hanson A.J., Regge T., Teitelboim C.* Constrained Hamiltonian Systems. Rome: Accademia Nazionale del Lincei, 1975.

5. *Sundermeyer K.* Constrained DynamicsLecture Notes in Physics. V.169. Berlin: Springer-Verlag, 1982.

6. *Batlle C., Gomis J., Pons J.M., Román-Roy N.* J. Math. Phys. 1986. V.27. No.12. P.2953.

7. *Henneaux M., Teitelboim G., Zanelli J.* Nucl. Phys. 1990. V.B 332. No.1. P.169.

8. *Cabo A., Louis-Martinez P.* Phys. Rev. 1990. V.D 42. No.8. P.2726.

9. *Cawley R.* Phys. Rev. Lett. 1979. V.42. No.7. P.413.

10. *Castellani L.* Ann. Phys. 1982. V.143. No.2. P.357.

11. *Gogilidze S.A., Sanadze V.V., Surovtsev Yu.S., Tkebuchava F.G.* The theories with higher derivatives and gauge transformation construction JINR Communication E2-87-390. Dubna: JINR, 1987; Int. J. Mod. Phys. 1989. V.A 4. No.16. P.4165.

12. *Gràcia X., Pons J.M.* Lagrangian gauge transformations without Hamiltonian counterpart Preprint UB-ECM-PF 13/90. Barcelona: Universitat de Barcelona, 1990.

13. *Гитман Д.М., Тютин И.В.* Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986.

14. *Nesterenko V.V.* J. Phys. A: Math. Gen. 1989. V.22. No.10. P.1673.

15. *Ostrogradsky M.V.* Mem. de l'Acad. Imper. des Sci. de St-Pétersbourg. 1850. V.4. P.385. Имеется русский перевод в сб.: Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С.315.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 ноября 1992 года.