92-443

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-92-443

Н.А.Черников

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА

Направлено в Труды Международной конференции
"Лобачевский и современная геометрия", Казань, 1992г.

1992

Лобачевский, создавая неевклидову геометрию, опирался на пример созданной Ньютоном теории тяготения. Он писал:

"*Некоторые математики невозможность определения линий помощию углов хотели принять за основание геометрии, но такое основание недостаточно, потому что разнородные коликие могут быть в зависимости друг от друга*" [1, с. 69],

"*...величина притягательной силы, например, выражается массою, разделённой на квадрат расстояния... но когда верно, что силы зависят от расстояния, то линии могут быть также в зависимости с углами. По крайней мере разнородность одинакова в обоих случаях, которых различие не заключается собственно в понятии, но только в том, что мы познаём одну зависимость из опытов, а другую при недостатке наблюдений должны предполагать умственно, либо за пределами видимого мира, либо в тесной сфере молекулярных притяжений*" [2, с. 159-160].

Сравним установленную Лобачевским зависимость

$$tg\ \frac{1}{2}\ \Pi = exp\ (-\ \frac{p}{k}\ ) \qquad (1)$$

угла параллельности П от перпендикуляра p с установленной Ньютоном зависимостью ускорения f планеты от расстояния ρ до Солнца

$$f = \gamma\ m\ /\ \rho^2\ . \qquad (2)$$

Чтобы согласовать меру ускорения с мерой отношения массы Солнца m к квадрату расстояния, Ньютон ввёл в теорию тяготения константу γ, а чтобы согласовать меру угла с мерой расстояния, Лобачевский ввёл в геометрию константу k.

Но Лобачевский рассматривал теорию тяготения Ньютона не только в качестве примера. Он первым ввел неевклидову геометрию в небесную механику и поставил вопрос о том, какую перемену это введение внесёт в ньютоновскую теорию тяготения. Сам же и ответил на него [2, с. 159], заметив, что ускорение (2) можно написать в виде

$$f = 4 \pi \gamma m / S , \qquad (3)$$

и установив , что в неевклидовом пространстве площадь сферы радиуса ρ равна

$$S = 4 \pi (k\, sh \frac{\rho}{k})^2 . \qquad (4)$$

На основе этих результатов мною решена задача о движении планеты в пространстве Лобачевского [3]. Подведём итог.

Площадь (4) и длина окружности радиуса ρ в пространстве Лобачевского равны, соответственно, $4 \pi r^2$ и $2 \pi r$, где

$$r = k\, sh \frac{\rho}{k} . \qquad (5)$$

Основная метрическая форма

$$d l^2 = L_{\alpha\beta}\, d x^\alpha\, d x^\beta \qquad (6)$$

пространства Лобачевского в сферических координатах ρ, θ, φ равняется

$$d l^2 = d \rho^2 + r^2 (d \theta^2 + sin^2 \theta\, d \varphi^2) . \qquad (7)$$

Функцию (3) можно представить в виде

$$f = \frac{\partial U}{\partial \rho} , \qquad (8)$$

где U - гравитационный потенциал, порождаемый точечной массой m. Дополнительно принимаем условие

$$\lim_{\rho \to \infty} U = 0 . \qquad (9)$$

Отсюда находим, что в пространстве Евклида

$$U = - \gamma m / \rho , \qquad (10)$$

а в пространстве Лобачевского

$$U = \frac{\gamma m}{k} (1 - cth \frac{\rho}{k}) . \qquad (11)$$

Потенциал (11) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U = 4 \pi \gamma m\, \delta (x)\, \delta (y)\, \delta (z) , \qquad (12)$$

где δ - обобщённая функция Дирака с аргументами

$$x = r\, sin\, \theta\, cos\, \varphi, \quad y = r\, sin\, \theta\, cos\, \varphi, \quad z = r\, cos\, \theta, \qquad (13)$$

Δ - оператор Лапласа-Бельтрами в пространстве Лобачевского. Для скалярной функции U, не зависящей от углов θ и φ,

$$\Delta U = r^{-2} \frac{\partial}{\partial \rho} (r^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}) . \qquad (14)$$

Как указание на уравнение (12) мною были поняты следующие слова Лобачевского:

"*Полагаем, как и многие в этом уверены, что силы притягательные слабеют от распространения своего действия по сфере*" [2, с. 159].

Теперь, располагая метрикой (7) и потенциалом (11), составим функцию Лагранжа

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2} \frac{d l^2}{d t^2} - U \qquad (15)$$

и задаваемые ею уравнения движения планеты

$$\frac{d}{d t} \frac{d x^\alpha}{d t} + L^\alpha_{\mu\nu} \frac{d x^\mu}{d t} \frac{d x^\nu}{d t} + L^{\alpha\sigma} \partial_\sigma U = 0 . \qquad (16)$$

Здесь ∂_σ означает частную производную по координате x^σ,

$L^{\alpha\sigma}$ - кометрический тензор, определяемый через метрический тензор $L_{\sigma\beta}$ и единичный аффинор δ^{α}_{β} из условия

$$L^{\alpha\sigma} L_{\sigma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} , \quad (17)$$

$L^{\alpha}_{\mu\nu}$ - компоненты аффинной связности Кристоффеля, равные

$$L^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} L^{\alpha\sigma} (\partial_{\mu} L_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} L_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma} L_{\mu\nu}) . \quad (18)$$

Кроме того, мы ввели здесь абсолютное, по Ньютону, время t (и абсолютно покоящееся пространство Лобачевского).

Теперь мы можем приступить к решению задачи Кеплера в пространстве Лобачевского.

В силу сферической симметрии сохраняется момент количества движения планеты с компонентами

$$M_1 = y \frac{d z}{d t} - z \frac{d y}{d t} , \quad M_2 = z \frac{d x}{d t} - x \frac{d z}{d t} ,$$

$$M_3 = x \frac{d y}{d t} - y \frac{d x}{d t} , \quad (19)$$

где x, y, z равны (13). Поэтому достаточно рассмотреть движение планеты в плоскости Лобачевского, на которой

$$\theta = \frac{\pi}{2} . \quad (20)$$

При этом $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = M$, где

$$M = r^2 \frac{d \varphi}{d t} . \quad (21)$$

Далее, так как функция Лагранжа (15) не зависит от времени, то сохраняется энергия планеты, равная

$$E = \frac{1}{2} \frac{d l^2}{d t^2} + U . \quad (22)$$

В случае (20) имеем

$$E = \frac{1}{2} [(\frac{d \rho}{d t})^2 + r^2 (\frac{d \varphi}{d t})^2] + U . \quad (23)$$

Исключая d t из (21) и (23), получаем дифференциальное уравнение

$$E = \frac{1}{2} M^2 r^{-4} [(\frac{d \rho}{d \varphi})^2 + r^2] + U \quad (24)$$

первого порядка для траектории $\rho = \rho (\varphi)$.

Чтобы проинтегрировать уравнение (24), обозначим

$$k \, th \frac{\rho}{k} = \frac{1}{w} . \quad (25)$$

Так как $d w = - r^{-2} d \varphi$, $w^2 = r^{-2} + k^{-2}$, то уравнение (24) преобразуется к виду

$$E = \frac{1}{2} M^2 [(\frac{d w}{d \varphi})^2 + w^2 - k^{-2}] + \gamma m (k^{-1} - w) . (26)$$

Отсюда находим

$$k \, th \frac{\rho}{k} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} , \quad (27)$$

где

$$p = \frac{M^2}{\gamma m} , \quad \varepsilon = \sqrt{(1 - \frac{p}{k})^2 + 2 \frac{p E}{\gamma m}} . \quad (28)$$

Константа интегрирования уравнения (26) выбрана так, что наибольшему значению w соответствует угол $\varphi = 0$. Заметим, что подкоренное выражение в формуле (28) для ε не может быть отрицательным. Действительно, из (26) следует, что

$$E \geq \frac{1}{2} M^2 [w^2 - k^{-2}] + \gamma m (k^{-1} - w) . \quad (29)$$

Тем уверенней можно сказать, что

$$E \geq - \frac{\gamma m}{2 p} (1 - \frac{p}{k})^2 , \quad (30)$$

так как в правой части последнего неравенства стоит минимальное значение полинома от w, стоящего в правой части неравенства (29). Следовательно, ε - число действительное.

По определению, планета находится в финитном движении, которое возможно либо в случае $\varepsilon = 0$, $0 < p < k$, либо в случае $\varepsilon > 0$, $p > 0$, $p + k\,\varepsilon < k$. В первом случае орбита планеты является окружностью, а во втором - эллипсом. Интересно, что на плоскости Лобачевского, как и на плоскости Евклида, орбиту можно определить как множество точек, от которых до заданных двух точек (фокусов) сумма расстояний задана, причём в одном из фокусов находится Солнце. Если обозначить 2 a сумму расстояний от планеты до фокусов, то

$$E = \frac{\gamma\, m}{k} \left(1 - cth\, \frac{2\, a}{k}\right) . \qquad (31)$$

Располагая формулами (21) и (27), можно подсчитать период T обращения планеты вокруг Солнца:

$$T = \frac{\pi\, k}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{-E}} - \frac{1}{\sqrt{-E + 2\,\gamma\, m / k}} \right) . \qquad (32)$$

Как и в евклидовом случае, он не зависит от момента (21). Подставляя в (32) зависимость (31) энергии E от большой полуоси a, находим следующее выражение для квадрата периода:

$$T^2 = \frac{4\, \pi^2}{\gamma\, m} \left(k\, sh\, \frac{a}{k} \right)^3 ch\, \frac{a}{k} . \qquad (33)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лобачевский Н.И. *Геометрия* (1823). Полн. собр. соч., Т. 2, М.-Л.: Гостехиздат, 1949, с. 43-107.

2. Лобачевский Н.И. *Новые начала геометрии с полной теорией параллельных* (1835). Полн. собр. соч., Т. 2, М.-Л.: Гостехиздат, 1949, с. 147-454.

3. Черников Н.А. *Введение геометрии Лобачевского в теорию гравитации.* В журнале: "Физика элементарных частиц и атомного ядра", 1992, Т. 23, вып. 5, с. 1155-1191.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 ноября 1992 года.