сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-92-192

Н.А.Черников

УРАВНЕНИЯ ТЯГОТЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

1992

В этом году учёный мир празднует двухсотлетнюю годовщину дня рождения Николая Ивановича Лобачевского. Творец неевклидовой геометрии, Лобачевский рассматривал геометрию не только саму по себе. Ничуть не сомневаясь в логической состоятельности новой геометрии, убедившись в её непротиворечивости, он поставил вопрос об астрономической проверке геометрии видимого нами мира. Дополнив известные в то время данные о параллаксах звезд рядом собственных астрономических наблюдений, он установил, что характерная для неевклидовой геометрии константа k больше, чем расстояния от Земли до ближайших звезд [1, с. 207-210]. Малоутешительный результат этот не помешал ему, однако, поставить вопрос о том, какого рода перемена произойдет от введения новой геометрии в механику [1, с. 261]. Впрочем, второй вопрос неизбежно возникает вслед за первым, стоит лишь начать рассматривать небесные тела в условиях неевклидовой геометрии. Но , введя новую геометрию в небесную механику, Лобачевский пошел дальше и поставил вопрос о том, какие изменения это вносит в ньютоновский закон всемирного тяготения. Сам же и ответил на него, указав фундаментальное решение уравнения Пуассона в неевклидовом пространстве [2, с.158-160].

То были совершенно новые вопросы, а идея Лобачевского

> "... *в том однако ж нельзя сомневаться, что силы всё производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы ... когда верно, что силы зависят от расстояния, то линии могут быть также в зависимости с углами.*" [2, с. 159]

выводит нас далеко за пределы ньютоновской механики и теории тяготения. Руководствуясь этой идеей, недолго выйти и за более далекие пределы эйнштейновских теорий.

В данной статье излагается новый подход к теории тяготения, основанный на геометрии Лобачевского. Статья начинается с фрагментарного изложения дифференциальной геометрии Лобачевского, а завершается точным решением задачи Шварцшильда в пространстве Лобачевского.

1. ВВЕДЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Геометрия Лобачевского вполне задается метрикой

$$d\,l^2 = L_{\alpha\beta}\, d\,x^\alpha\, d\,x^\beta \,, \tag{1}$$

в сферических координатах ρ, θ, φ принимающей следующий вид:

$$d\,l^2 = d\,\rho^2 + r^2\,(d\,\theta^2 + \sin^2\theta\;\; d\,\varphi^2)\,, \tag{2}$$

где

$$r = k\,sh\,\frac{\rho}{k}\,. \tag{3}$$

Прямые линии в пространстве Лобачевского являются геодезическими линиями относительно аффинной связности с компонентами

$$L^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,L^{\alpha\sigma}\,(\partial_\mu L_{\sigma\nu} + \partial_\nu\, L_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\, L_{\mu\nu})\,, \tag{4}$$

где $L^{\alpha\sigma}$ - кометрический тензор, определяемый через метрический тензор $L_{\sigma\beta}$ и единичный аффинор δ^α_β из условия

$$L^{\alpha\sigma}\, L_{\sigma\beta} = \delta^\alpha_\beta\,, \tag{5}$$

∂_μ - частная производная по координате x^μ. Геодезические же линии определяются в результате решения системы уравнений

$$\frac{d}{d\,l}\,\frac{d\,x^\alpha}{d\,l} + L^{\alpha}_{\mu\nu}\,\frac{d\,x^\mu}{d\,l}\,\frac{d\,x^\nu}{d\,l} = 0\,,\quad \alpha\in\{1,\,2,\,3\}\,. \tag{6}$$

Интересно, что компоненты (4) помнят всё о породившей их метрике (1). Действительно, составленный из них тензор

$$L^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = \partial_\mu\, L^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_\nu\, L^{\alpha}_{\mu\beta} + L^{\alpha}_{\mu\sigma}\, L^{\sigma}_{\nu\beta} - L^{\alpha}_{\nu\sigma}\, L^{\sigma}_{\mu\beta} \tag{7}$$

оказывается равным

$$L^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = (L_{\mu\beta}\,\delta^\alpha_\nu - L_{\nu\beta}\,\delta^\alpha_\mu)\,k^{-2}\,. \tag{8}$$

Следовательно,

$$L_{\mu\beta} = \frac{1}{2}\,k^2\,L^{\alpha}_{\mu\alpha\beta}\,. \tag{9}$$

Это нетривиально, так как в пределе

$$k \longrightarrow \infty \tag{10}$$

компоненты (4) о предельной метрике

$$E_{\alpha\beta}\, d\,x^\alpha\, d\,x^\beta = \lim_{k\to\infty} L_{\alpha\beta}\, d\,x^\alpha\, d\,x^\beta \tag{11}$$

многое забывают. В этом случае предельный тензор

$$E^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = \partial_\mu\, E^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_\nu\, E^{\alpha}_{\mu\beta} + E^{\alpha}_{\mu\sigma}\, E^{\sigma}_{\nu\beta} - E^{\alpha}_{\nu\sigma}\, E^{\sigma}_{\mu\beta}\,, \tag{12}$$

составленный подобно (7) из компонент предельной связности

$$E^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,E^{\alpha\sigma}\,(\partial_\mu\, E_{\sigma\nu} + \partial_\nu\, E_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\;\, E_{\mu\nu})\,, \tag{13}$$

равняется нулю. Следовательно, найдутся такие координаты y, через которые связность (13) представится в виде

$$E^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial\,x^\alpha}{\partial\,y^\sigma}\;\frac{\partial^2\,y^\sigma}{\partial\,x^\mu\,\partial\,x^\nu}\,. \tag{14}$$

В координатной карте y компоненты метрического тензора $E_{\alpha\beta}$

не зависят от координат. Это, пожалуй, всё, что можно сказать о метрике (11), если известны только компоненты связности (13) с нулевым тензором кривизны (12).

Впрочем, к этому можно добавить, что метрика (11) задает геометрию Евклида, так как в сферических координатах она принимает вид

$$E_{\alpha\beta}\, d\,x^\alpha\, d\,x^\beta = d\,\rho^2 + \rho^2\,(d\,\theta^2 + \sin^2\theta\, d\,\varphi^2)\,. \tag{15}$$

Между тем, связность (14) инвариантна относительно аффинных подстановок

$$y^\sigma = A^\sigma_\gamma\,\hat{y}^\gamma + B^\sigma \tag{16}$$

и задает лишь аффинную геометрию, а не более богатую геометрию Евклида.

2. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И ГРУППА ЛОРЕНЦА

Четыре функции

$$x = k\,sh\,\frac{\rho}{k}\,\sin\theta\,\cos\varphi\,,\qquad y = k\,sh\,\frac{\rho}{k}\,\sin\theta\,\sin\varphi\,,$$
$$z = k\,ch\,\frac{\rho}{k}\,\cos\theta\,,\qquad u = ch\,\frac{\rho}{k} \tag{17}$$

сферических координат ρ, θ, φ задают в четырехмерном центроаффинном пространстве с декартовыми координатами x, y, z, u трехмерную поверхность. Последняя является той полостью гиперболоида

$$k^2\,u^2 - x^2 - y^2 - z^2 = k^2\,, \tag{18}$$

на которой $u > 0$. В декартовых координатах она задается уравнением

$$u = \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)\,/\,k^2}\,. \tag{19}$$

Мы получили взаимно однозначное (или, как теперь говорят, биективное) отображение пространства Лобачевского на поверхность (19). Дифференцируя функции (3) и (17), получаем

$$d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2 = d\,r^2 + r^2\,(d\,\theta^2 + \sin^2\theta\;\; d\,\varphi^2)\,,$$
$$k^2\,d\,u = r\,d\,\rho\,,\qquad d\,r = u\,d\,\rho\,. \tag{20}$$

Отсюда находим, что в координатах x, y, z метрика Лобачевского (2) равняется

$$d\,l^2 = d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2 - k^2\,d\,u^2\,, \tag{21}$$

где $d\,u$ - дифференциал функции (19), так что

$$(k^2 + x^2 + y^2 + z^2)\,k^2\,d\,u^2 = (x\,d\,x + y\,d\,y + z\,d\,z)^2. \tag{22}$$

Следовательно, внутренняя геометрия поверхности (19) в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве с метрикой (21) совпадает с геометрией Лобачевского. Поэтому изометрические преобразования пространства Лобачевского представляются линейными преобразованиями координат x, y, z, u, сохраняющими квадратичную форму, стоящую в левой части равенства (18), и не меняющими знака координаты u. По определению Пуанкаре, такие преобразования составляют группу Лоренца. Таким образом, группа Лоренца изоморфна группе изометрий пространства Лобачевского.

Согласно (21) и (22) компоненты метрического тензора пространства Лобачевского в координатах x, y, z равны

$$L_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} - k^{-2} u^{-2} x_\alpha x_\beta , \tag{23}$$

где $c_{\alpha\beta}$ - константы (в данном случае равные 1 при $\alpha = \beta$ и 0 при $\alpha \neq \beta$),

$$x_\alpha = c_{\alpha\sigma} x^\sigma . \tag{24}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} (\partial_\mu L_{\sigma\nu} + \partial_\nu L_{\sigma\mu} - \partial_\sigma L_{\mu\nu}) = - k^{-2} u^{-2} x_\sigma L_{\mu\nu} . \tag{25}$$

Компоненты кометрического тензора в этих координатах равны

$$L^{\alpha\beta} = c^{\alpha\beta} + k^{-2} x^\alpha x^\beta , \tag{26}$$

где $c^{\alpha\sigma} c_{\sigma\beta} = \delta^\alpha_\beta$. Поэтому

$$L^{\alpha\sigma} x_\sigma = u^2 x^\alpha . \tag{27}$$

Следовательно,

$$L^\alpha_{\mu\nu} = - k^{-2} x^\alpha L_{\mu\nu} . \tag{28}$$

Простой вид компонент (23) и (28) позволяет легко доказать равенство (8).

Согласно (6) и (28) в координатах x, y, z прямые линии в пространстве Лобачевского определяются в результате решения системы уравнений

$$\frac{d}{dl}\,\frac{dx^\alpha}{dl} - k^{-2} x^\alpha L_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dl}\,\frac{dx^\nu}{dl} = 0 , \qquad \alpha \in \{1, 2, 3\} . \tag{29}$$

Вычисляя вторую производную функции (19), получаем

$$\frac{d}{dl}\,\frac{du}{dl} - k^{-2} u L_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dl}\,\frac{dx^\nu}{dl} = 0 . \tag{30}$$

Обозначим теперь

$$\mathbf{r} = \{x, y, z, u\} \tag{31}$$

вектор четырехмерного центроаффинного пространства, в котором поверхность (19) представляет пространство Лобачевского.

Квадратичную форму (21) обозначим $(d\,\mathbf{r}, d\,\mathbf{r})$. В этих обозначениях поверхность (19) задается условиями

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = - k^2 , \qquad u > 0 , \tag{32}$$

а уравнения (29) и (30) вкупе записываются в виде

$$\frac{d}{dl}\,\frac{d\mathbf{r}}{dl} - k^{-2}\, \mathbf{r} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dl}, \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = \mathbf{0} . \tag{33}$$

Отсюда следует, что прямая пространства Лобачевского лежит в пересечении поверхности (19) с двумерной плоскостью центроаффинного пространства, проходящей через центр $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

3. ПРОСТРАНСТВО СКОРОСТЕЙ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В четырехмерном пространственно-временном мире специальной теории относительности скорость материальной точки можно представить связкой времениподобных параллельных прямых. Совокупность всех таких связок является трехмерным пространством скоростей. В этом пространстве реализуется та самая абсолютная геометрия, которая основывается на всех евклидовых постулатах, кроме пятого.

В лоренцевом случае мы приходим к пространству скоростей Лобачевского, полагая, что константа k равняется скорости света c, а расстояние ρ равняется быстроте частицы s. В таком случае величины (17) равняются компонентам 4-скорости частицы. Компоненты же обычной скорости частицы в лоренцевом случае равняются

$$v_1 = c\, th\, \frac{s}{k}\, \sin\theta \cos\varphi , \qquad v_2 = c\, th\, \frac{s}{k}\, \sin\theta \sin\varphi ,$$

$$v_3 = c\, th\, \frac{s}{k}\, \cos\theta . \tag{34}$$

В галилеевом случае $c = \infty$ и пространство скоростей евклидово. Вместо поверхности (19) в этом случае выступает гиперплоскость $u = 1$. Что до группы Галилея, то она изоморфна группе изометрий пространства Евклида.

Итак, скорость света играет роль константы Лобачевского в пространстве скоростей. В этом суть специальной теории относительности. Интересно, что длина окружности в пространстве Лобачевского представляет импульс частицы, а площадь круга - её кинетическую энергию.

Так как в космических лучах наблюдаются, а на ускорителях достигаются быстроты, намного превышающие скорость света c, то в физике высоких энергий обойтись без геометрии Лобачевского невозможно.

4. НЬЮТОНОВСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Функция Лагранжа материальной точки, если на неё действует только сила тяготения с потенциалом U, равняется

$$\ell = \frac{1}{2} L_{\mu\nu} \frac{d x^{\mu}}{d t} \frac{d x^{\nu}}{d t} - U . \qquad (35)$$

Следовательно, лагранжевы уравнения движения таковы:

$$\frac{d}{d t}\left(L_{\alpha\nu} \frac{d x^{\nu}}{d t}\right) - \frac{1}{2}(\partial_{\alpha} L_{\mu\nu}) \frac{d x^{\mu}}{d t} \frac{d x^{\nu}}{d t} + \partial_{\alpha} U = 0 , \qquad (36)$$

т. е.

$$\frac{d}{d t} \frac{d x^{\alpha}}{d t} + L^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{d x^{\mu}}{d t} \frac{d x^{\nu}}{d t} + L^{\alpha\nu} \partial_{\nu} U = 0 . \qquad (37)$$

Здесь мы ввели абсолютно покоящееся, по Ньютону, пространство Лобачевского и абсолютное, по Ньютону же, время t, что эквивалентно отрицанию постулата Евклида о параллельных прямых в видимом нами мире. При этом теряет силу специальный принцип относительности, однако принцип кинематической относительности сохраняется.

В пространственно-временном мире $S\times T$ с координатными картами x^1, x^2, x^3, x^4, где $x^4 = t$, абсолютное время задает дифференциальную форму $\Theta = d\,t$. Записывая эту форму в виде

$$\Theta = \theta_a \, d x^a , \qquad (38)$$

мы вводим в мире $S\times T$ ковекторное поле с компонентами

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = 0, \quad \theta_4 = 1 \qquad (39)$$

и факторизующуюся метрику

$$\theta_{ab} \, d x^a \, d x^b = \Theta\,\Theta . \qquad (40)$$

Определяемый ею факторизующийся тензор времени равен

$$\theta_{ab} = \theta_a \, \theta_b . \qquad (41)$$

Введение геометрии Лобачевского задает в мире $S\times T$ кометрический тензор h^{ab} с компонентами, равными

$$h^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} , \quad h^{\alpha 4} = 0, \quad h^{4b} = 0, \quad h^{44} = 1. \qquad (42)$$

Так как

$$h^{ab} \, \theta_b = 0, \qquad (43)$$

то тензор времени и кометрический тензор сопряжены условием

$$\theta_{as} \, h^{sb} = 0. \qquad (44)$$

Уравнения движения (37) задают в мире $S\times T$ аффинную связность. Действительно, их можно записать в виде уравнений геодезических

$$\frac{d}{d s} \frac{d x^a}{d s} + \Gamma^{a}_{mn} \frac{d x^m}{d s} \frac{d x^n}{d s} = 0 , \qquad (45)$$

введя постановку $s = A\,t + B$, где A и B - постоянные. Отсюда находим

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = L^{\alpha}_{\mu\nu} , \qquad \Gamma^{\alpha}_{44} = L^{\alpha\nu} \partial_{\nu} U ,$$
$$\Gamma^{\alpha}_{\mu 4} = 0 , \qquad \Gamma^{\alpha}_{\nu 4} = 0 , \qquad \Gamma^{4}_{mn} = 0 . \qquad (46)$$

Следовательно, мировая траектория материальной точки, находящейся в гравитационном поле U, является геодезической линией в мире $S\times T$ относительно аффинной связности (46).

В частности, мировая траектория материальной точки, на которую никакие силы не действуют, является геодезической линией относительно аффинной связности с компонентами $\check{\Gamma}^{a}_{mn}$, равными (46) при $U = \mathrm{const}$. Мы располагаем, таким образом, двумя связностями сразу.

Когда имеется две связности (скажем, Γ и $\check{\Gamma}$), то для каждого тензорного поля составляют две ковариантные производные ∇ и $\check{\nabla}$. Для векторного и ковекторного полей полагают

$$\nabla_m T^a = \partial_m T^a + \Gamma^{a}_{mn} T^n , \qquad \nabla_m T_n = \partial_m T_n - \Gamma^{a}_{mn} T_a ,$$
$$\check{\nabla}_m T^a = \partial_m T^a + \check{\Gamma}^{a}_{mn} T^n , \qquad \check{\nabla}_m T_n = \partial_m T_n - \check{\Gamma}^{a}_{mn} T_a . \qquad (47)$$

Разность

$$P^{a}_{mn} = \check{\Gamma}^{a}_{mn} - \Gamma^{a}_{mn} \qquad (48)$$

называется тензором аффинной деформации.

В данном здесь случае тензор аффинной деформации равен

$$P^{a}_{mn} = - \theta_m \, \theta_n \, h^{as} \, \partial_s U . \qquad (49)$$

Для каждой афинной связности Γ составляется тензор кручения

$$S^{a}_{mn} = \Gamma^{a}_{mn} - \Gamma^{a}_{nm} \qquad (50)$$

и тензор кривизны

$$R^{a}_{mnb} = \partial_m \Gamma^{a}_{nb} - \partial_n \Gamma^{a}_{mb} + \Gamma^{a}_{ms} \Gamma^{s}_{nb} - \Gamma^{a}_{ns} \Gamma^{s}_{mb} . \qquad (51)$$

Очевидно, что

$$S^{a}_{mn} + S^{a}_{nm} = 0 , \qquad R^{a}_{mnb} + R^{a}_{nmb} = 0 . \qquad (52)$$

Все рассматриваемые здесь аффинные связности (например, (46)) удовлетворяют условию

$$\Gamma^a_{mn} = \Gamma^a_{nm} , \tag{53}$$

так что их тензор кручения равен нулю, а тензор кривизны удовлетворяет алгебраическому тождеству

$$R^a_{mnb} + R^a_{bmn} + R^a_{nbm} = 0 \tag{54}$$

и дифференциальному тождеству

$$\nabla_k R^a_{mnb} + \nabla_n R^a_{kmb} + \nabla_m R^a_{nkb} = 0 . \tag{55}$$

К тому же, мы будем рассматривать только эквиаффинные связности. Для них свёрнутый тензор кривизны

$$R_{mn} = R^s_{smn} \tag{56}$$

симметричен, т. е.

$$R_{mn} = R_{nm} . \tag{57}$$

Другая же свёртка тензора кривизны равна нулю:

$$R^s_{mns} = 0 . \tag{58}$$

В случае (46) тензор кривизны равен

$$R^\alpha_{\mu\nu\beta} = L^\alpha_{\mu\nu\beta} , \quad R^\alpha_{\mu\nu 4} = 0 , \quad R^\alpha_{\mu 4\beta} = 0 ,$$
$$R^\alpha_{\mu 44} = \partial_\mu U^\alpha + L^\alpha_{\mu\nu} U^\mu , \quad R^4_{mnb} = 0 , \tag{59}$$

где

$$U^\alpha = L^{\alpha\sigma} \partial_\sigma U , \tag{60}$$

а свернутый тензор кривизны согласно (8) и (9) равен

$$R_{\mu\nu} = -2 k^{-2} L_{\mu\nu} , \quad R_{44} = \Delta U , \quad R_{\mu 4} = 0 , \quad R_{4\nu} = 0 , \tag{61}$$

где

$$\Delta = L^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu - L^\sigma_{\mu\nu} \partial_\sigma) . \tag{62}$$

Заметим, что гравитационный потенциал U является скалярной функцией в пространстве Лобачевского с метрикой (1), U^α - вектором силы тяжести в этом пространстве, $R^\alpha_{\mu 44}$ - ковариантной производной вектора U^α, порожденной связностью (4), $R^\alpha_{\mu\nu\beta}$ - тензором кривизны (7) для связности (4), Δ - дифференциальный оператор Лапласа, порожденный метрикой (1).

Вспомним теперь о связности, которая получается из (46) при $U = const$ и которую мы обозначили $\breve{\Gamma}^a_{mn}$. Будем называть её фоновой. Тензор кривизны $\breve{R}^a_{mnb}$ фоновой связности и свёрнутый тензор $\breve{R}_{mn}$ получаются из (59) и (61) при $U = const$.

Следовательно,

$$R_{mn} - \breve{R}_{mn} = \theta_m \theta_n \Delta U . \tag{63}$$

Очевидно, уравнение

$$R_{mn} - \breve{R}_{mn} = 4 \pi \gamma M_{mn} , \tag{64}$$

где M_{mn} - тензор массы, равный

$$M_{mn} = \rho \theta_m \theta_n , \tag{65}$$

а ρ - плотность массы, эквивалентно уравнению Пуассона

$$\Delta U = 4 \pi \gamma \rho \tag{66}$$

в пространстве Лобачевского.

Уточним, что γ - это гравитационная константа Ньютона. Масса, заключённая в области пространства Лобачевского, равна интегралу

$$m = \int\int\int \rho \sqrt{L} \, d x^1 d x^2 d x^3 \tag{67}$$

по этой области, где L - определитель матрицы $(L_{\mu\nu})$.

Интересно заметить, что в гравитационное уравнение (64) вошел свёрнутый тензор кривизны $\breve{R}_{mn}$ фоновой связности $\breve{\Gamma}^a_{mn}$. В пределе (10) уравнение (64) переходит в уравнение

$$R_{mn} = 4 \pi \gamma M_{mn} , \tag{68}$$

в котором ничто о фоновой связности не напоминает. Всё дело в том, что в пределе (10) свёрнутый тензор кривизны $\breve{R}_{mn}$ равен нулю. Кстати, в этом пределе равен нулю и полный тензор кривизны $\breve{R}^a_{mnb}$.

5. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В сфере радиуса ρ при малых значениях ρ / k можно приближенно пользоваться геометрией Евклида. Плотность массы M, сосредоточенной в начале координат x, y, z (см.(17)), равна

$$\rho = M \delta(x) \delta(y) \delta(z), \tag{69}$$

где $\delta(x)$ - функция Дирака, так как в этих координатах

$$\sqrt{L} = \frac{1}{u} , \tag{70}$$

а в начале координат $u = 1$. Решение, удовлетворяющее уравнению Пуассона

$$\Delta U = 4 \pi \gamma M \delta(x) \delta(y) \delta(z) \tag{71}$$

и условию

$$\lim_{\rho \to \infty} U = 0 , \tag{72}$$

называем фундаментальным.

Лобачевский указал [2, с. 159], что "притягательная сила" направлена к центру и обратно пропорциональна площади сферы, причём если радиус сферы равен ρ, то её площадь равна $4\pi r^2$, где величина r равна (3). Следовательно, в сферических координатах фундаментальное решение имеет следующие частные производные:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = A r^{-2}, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \tag{73}$$

где A - некоторая константа. Интегрируя (73), находим

$$U = -\frac{A}{k} \, cth \, \frac{\rho}{k} + B, \tag{74}$$

где B - константа интегрирования. Из условия (72) следует, что B = A. Так как в малой окрестности источника функция переходит в ньютоновский потенциал $U = -\gamma M \rho^{-1}$, то $A = \gamma M$. Следовательно,

$$U = \frac{\gamma M}{k} \left(1 - cth \, \frac{\rho}{k}\right). \tag{75}$$

Заметим, что вне источника фундаментальное решение удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0. \tag{76}$$

В соответствии с (62)

$$\Delta U = \frac{1}{\sqrt{L}} \partial_\mu \left(\sqrt{L} \, L^{\mu\nu} \partial_\nu U \right). \tag{77}$$

В сферических координатах оператор (62) равен

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \rho} r^2 \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \tag{78}$$

6. ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ С ДВУМЯ СВЯЗНОСТЯМИ

В эйнштейновской теории гравитации главным геометрическим объектом является заданная в пространстве-времени X кометрика

$$g^{ab} \partial_a \partial_b \tag{79}$$

нормального гиперболического типа. В окрестности всякой точки $x \in X$ можно так подобрать координаты

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = t, \tag{80}$$

что в самой точке x квадратичная форма (79) станет равной

$$g^{ab} \partial_a \partial_b = \partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2 + \partial_3 \partial_3 - c^{-2} \partial_4 \partial_4 , \tag{81}$$

где c - скорость света. Как и в специальной теории относительности, скорость света c является константой Лобачевского в пространстве скоростей. Только в общем случае мы должны говорить теперь о пространстве скоростей частицы в заданной точке $x \in X$.

Тензор времени в эйнштейновской теории равняется

$$\theta_{ab} = - c^{-2} g_{ab} . \tag{82}$$

Он сопряжен с кометрическим тензором условием

$$\theta_{as} g^{sb} = - c^{-2} \delta^b_a . \tag{83}$$

Другим производным геометрическим объектом от кометрики (79) является антисимметричный по всем значкам тензор ε_{abmn} объема

$$dV = \varepsilon_{abmn} \, dx^a \wedge dx^b \wedge dx^m \wedge dx^n , \tag{84}$$

причём

$$\varepsilon_{1234} = c^{-1} \sqrt{-g} , \tag{85}$$

где g - определитель матрицы (g_{ab}).

Третьим производным геометрическим объектом от кометрики (79) является аффинная связность Кристоффеля

$$\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2} g^{as} (\partial_m g_{sn} + \partial_n g_{sm} - \partial_s g_{mn}) , \tag{86}$$

через которую, в свою очередь, определяются тензор Римана - Кристоффеля (51), тензор Риччи (56), а затем - скаляр Гильберта

$$R = g^{ab} R_{ab} \tag{87}$$

и тензор Эйнштейна

$$G_{mn} = R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn} . \tag{88}$$

Последний вместе с тензором массы M_{mn} входит в гравитационные уравнения

$$G_{mn} = 8 \pi \gamma M_{mn} , \tag{89}$$

которые преобразуются к виду

$$R_{mn} = 8 \pi \gamma (M_{mn} - \frac{1}{2} M \theta_{mn}) , \tag{90}$$

где

$$M = - c^2 g^{ab} M_{ab} . \tag{91}$$

Как известно, Гильберт получил гравитационные уравнения (88) независимо от Эйнштейна, взяв вариацию

$$\delta \mathbb{H} = \int G_{mn} \, \delta g^{mn} \, dV \tag{92}$$

интеграла

$$\mathbb{H} = \int R \, dV . \tag{93}$$

Не зависящий от выбора координатной карты интеграл Гильберта (93) не содержит, однако, никакой информации об энергии гравитационного поля. Поэтому Эйнштейн заменил его на удовлетворяющий необходимому условию

$$\delta \mathbb{E} = \delta \mathbb{H} \qquad (94)$$

интеграл

$$\mathbb{E} = \int \mathfrak{L}\, d V , \qquad (95)$$

где

$$\mathfrak{L} = g^{mn} (\Gamma_{mb}^{a} \Gamma_{an}^{b} - \Gamma_{sa}^{a} \Gamma_{mn}^{s}) . \qquad (96)$$

Интеграл Эйнштейна (95) зависит от выбора координатной карты, чем, конечно, невыгодно отличается от интеграла Гильберта, но зато содержит информацию об энергии гравитационного поля. На основе этого интеграла Эйнштейн определил так называемый псевдотензор энергии гравитационного поля, который, как и породивший его интеграл, зависит от выбора координатной карты, что не согласуется с его же требованием формулировать законы природы независимо от выбора координат. Вокруг этого обстоятельства более семидесяти лет ведётся неугасающая дискуссия.

Введение псевдотензора энергии нельзя оправдать и с точки зрения тензорного анализа, если только не ввести вместе с ним ещё один объект - фоновую аффинную связность $\check{\Gamma}_{mn}^{a}$, не зависимую от кометрического тензора g^{ab}. Введя такую связность, заменим интеграл Эйнштейна (95) на интеграл

$$\mathbb{I} = \int \mathcal{L}\, d V , \qquad (97)$$

где

$$\mathcal{L} = g^{mn} (P_{mb}^{a} P_{an}^{b} - P_{sa}^{a} P_{mn}^{s}) , \qquad (98)$$

а P_{mn}^{a} - тензор аффинной деформации (48). Вариация интеграла (97) при фиксированной фоновой связности равна

$$\delta \mathbb{I} = \int (S_{mn} - \tfrac{1}{2} S g_{mn})\, \delta g^{mn}\, d V , \qquad (99)$$

где

$$S_{mn} = R_{mn} - \tfrac{1}{2}(\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm}) , \qquad (100)$$

$$S = g^{ab} S_{ab} . \qquad (101)$$

(Здесь подразумевается, что фоновая связность симметрична, но не обязательно эквиаффинна). Поэтому гравитационные уравнения (89) и, соответственно, (90) заменяются следующими:

$$S_{mn} - \tfrac{1}{2} S g_{mn} = 8 \pi \gamma M_{mn} , \qquad (102)$$

или, что всё равно,

$$S_{mn} = 8 \pi \gamma (M_{mn} - \tfrac{1}{2} M \theta_{mn}) . \qquad (103)$$

Как видно, они сохраняются при условии, что

$$\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm} = 0 , \qquad (104)$$

но чтобы мы могли вернуться к собственно эйнштейновскому случаю, фоновая связность должна удовлетворять более сильному условию, чем условие (104). Дело в том, что канонический тензор энергии гравитационного поля, задаваемый лагранжианом (98), совпадает с псевдотензором Эйнштейна при условии, что в наперёд заданной координатной карте выполняется равенство

$$\check{\Gamma}_{mn}^{a} = 0 , \qquad (105)$$

но тогда

$$\check{R}_{mnb}^{a} = 0 . \qquad (106)$$

Наоборот, если выполняется условие (106), то найдется такая координатная карта, в которой выполняется равенство (105).

Итак, развиваемая здесь теория гравитации с двумя аффинными связностями включает эйнштейновскую теорию как частный случай, который выделяется условием (105).

Считая, что действие источников гравитационного поля не зависит от выбора фоновой связности, получаем равенство

$$\nabla_{s} g^{sm} M_{mn} = 0 . \qquad (107)$$

Поэтому из уравнения (102) получаем следствие

$$\nabla_{s} g^{sm} (\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm} - g^{ab} \check{R}_{ab} g_{mn}) = 0 . \qquad (108)$$

Интересно, что левую часть последнего равенства можно привести к виду

$$(\check{\nabla}_{s} - P_{s}) [g^{sm} (\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm})] - g^{ab} \check{R}_{ab} , \qquad (109)$$

где

$$P_{s} = P_{sa}^{a} . \qquad (110)$$

Поэтому, если фоновая связность удовлетворяет условию

$$\check{\nabla}_{s} (\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm}) = 0 , \qquad (111)$$

то согласно (108) из уравнения (102) получается следствие

$$(\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm}) \Phi^{m} = 0 , \qquad (112)$$

где

$$\Phi^{a} = (\check{\nabla}_{s} - P_{s}) g^{sa} = g^{mn} P_{mn}^{a} . \qquad (113)$$

Следствие (112) представляет большой интерес в связи с дискуссией о гармонических координатах, так как условие гармоничности можно записать в виде

$$\Phi^a = 0 . \tag{114}$$

Поэтому вектор Φ^a будем называть вектором ангармоничности.

7. ВЫБОР ФОНОВОЙ СВЯЗНОСТИ

В случае, когда нет гравитации, полагаем

$$\Gamma^{a}_{mn} = \breve{\Gamma}^{a}_{mn} . \tag{115}$$

Это есть тривиальное решение гравитационных уравнений (103). Действительно, в этом случае всюду на многообразии тензор массы должен равняться нулю, а, следовательно, эти уравнения должны принимать вид

$$S_{mn} = 0 . \tag{116}$$

Условие (115) означает, что фоновая связность может быть представлена в виде связности Кристоффеля. Такая связность непременно должна быть эквиаффинной. Следовательно, уравнения (116) должны принимать вид

$$R_{mn} = \breve{R}_{mn} . \tag{117}$$

Изложенная в разделе 6 теория каких-либо иных условий на фоновую связность не накладывает и допускает большую свободу при их выборе.

Воспользуемся этой свободой и условимся, что в отсутствие гравитации метрика принимает вид

$$g_{ab}\, d\, x^a\, d\, x^b = c^2\, d\, t^2 - L_{\alpha\beta}\, d\, x^\alpha\, d\, x^\beta , \tag{118}$$

где компоненты $L_{\alpha\beta}$ не зависят от координаты $x^4 = t$ и составляют метрику (1). Следовательно, фоновую связность полагаем равной связности Кристоффеля, задаваемой метрикой (118), и находим, что она равна

$$\breve{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = L^{\alpha}_{\mu\nu} , \qquad \breve{\Gamma}^{\alpha}_{44} = 0 ,$$
$$\breve{\Gamma}^{\alpha}_{\mu 4} = 0 , \qquad \breve{\Gamma}^{\alpha}_{\nu 4} = 0 , \qquad \breve{\Gamma}^{4}_{mn} = 0 . \tag{119}$$

Интересно, что в неё скорость света c не вошла, несмотря на то, что она явно входит в метрику (118). Поэтому фоновая связность (119) совпала с той, которую мы уже выбрали раньше, т. е. со связностью (46) при $U = \text{const}$.

Соответственно, тензор кривизны фоновой связности равен тензору (59) при $U = \text{const}$, т. е.

$$\breve{R}^{4}_{mnb} = 0 , \quad \breve{R}^{a}_{4nb} = 0 , \quad \breve{R}^{a}_{m4b} = 0 , \quad \breve{R}^{a}_{mn4} = 0 ,$$

$$\breve{R}^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = L^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = (L_{\mu\nu}\, \delta^{\alpha}_{\nu} - L_{\nu\beta}\, \delta^{\alpha}_{\mu})\, k^{-2} . \tag{120}$$

Свёрнутый тензор кривизны фоновой связности равен тензору (61) при $U = \text{const}$, т. е.

$$\breve{R}_{\mu\nu} = -\, 2\, k^{-2}\, L_{\mu\nu} , \quad \breve{R}_{44} = 0 , \quad \breve{R}_{\mu 4} = 0 , \quad \breve{R}_{\nu 4} = 0 . \tag{121}$$

Замечательно, что ковариантная производная тензорного поля (120) по фоновой связности (119) равна нулю:

$$\breve{\nabla}_s\, \breve{R}_{mnb} = 0 . \tag{122}$$

Поэтому выполняется условие (111), и мы располагаем следствием (112), в данном случае означающим

$$L_{\mu\nu}\, \Phi^{\nu} = 0 . \tag{123}$$

Так как определитель матрицы ($L\mu\nu$) не равен нулю, то из четырёх условий гармоничности (114) три условия

$$\Phi^{\alpha} = 0 \tag{124}$$

являются следствиями гравитационных уравнений (103).

8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ШВАРЦШИЛЬДА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Будем решать уравнения

$$R_{4n} = 0, \quad R_{m4} = 0, \quad R_{\mu\nu} = -\, 2\, k^{-2}\, L_{\mu\nu} , \tag{125}$$

полагая

$$g_{ab}\, d\, x^a\, d\, x^b = V^2\, d\, t^2 - F^2\, d\, \rho^2 - H^2\, d\, \Omega^2 , \tag{126}$$

где

$$d\, \Omega^2 = d\, \theta^2 + \sin^2 \theta\, d\, \varphi^2 , \tag{127}$$

а функции V, F, H зависят только от координаты ρ.

В таком случае отличные от нуля компоненты связности (86) равны

$$\Gamma^{4}_{41} = V^{-1}\, \frac{d\, V}{d\, \rho} = \Gamma^{4}_{14} ; \qquad \Gamma^{1}_{44} = F^{-2}\, V\, \frac{d\, V}{d\, \rho} , \tag{128}$$

$$\Gamma^{1}_{11} = F^{-1}\, \frac{d\, F}{d\, \rho} , \quad \Gamma^{1}_{22} = -\, F^{-2}\, H\, \frac{d\, H}{d\, \rho} , \quad \Gamma^{1}_{33} = \Gamma^{1}_{22}\, \sin^2 \theta ;$$

$$\Gamma^{2}_{12} = H^{-1}\, \frac{d\, H}{d\, \rho} = \Gamma^{2}_{21} , \qquad \Gamma^{2}_{33} = -\, \sin \theta\, \cos \theta ;$$

$$\Gamma^{3}_{13} = H^{-1}\, \frac{d\, H}{d\, \rho} = \Gamma^{3}_{31} , \qquad \Gamma^{3}_{23} = ctg\, \theta = \Gamma^{3}_{32} .$$

В этих же координатах отличные от нуля компоненты фоновой связности равны

$$\overset{\times}{\Gamma}{}^{1}_{22} = - k\, sh\, \frac{\rho}{k}\, ch\, \frac{\rho}{k}, \qquad \overset{\times}{\Gamma}{}^{1}_{33} = \overset{\times}{\Gamma}{}^{1}_{22}\, sin^2\theta \; ; \tag{129}$$

$$\overset{\times}{\Gamma}{}^{2}_{12} = k^{-1}\, cth\, \frac{\rho}{k} = \overset{\times}{\Gamma}{}^{2}_{21}, \qquad \overset{\times}{\Gamma}{}^{2}_{33} = - sin\,\theta\, cos\,\theta \; ;$$

$$\overset{\times}{\Gamma}{}^{3}_{13} = k^{-1}\, cth\, \frac{\rho}{k} = \overset{\times}{\Gamma}{}^{3}_{31}, \qquad \overset{\times}{\Gamma}{}^{3}_{23} = ctg\,\theta = \overset{\times}{\Gamma}{}^{3}_{32}\, .$$

Отсюда находим вектор ангармоничности

$$\Phi^1 = \frac{1}{V\,F\,H^2}\,[\, k\,F\,V\, sh\, \frac{2\,\rho}{k} - \frac{d}{d\,\rho}\,(\frac{V\,H^2}{F})\,]\, , \tag{130}$$

$$\Phi^2 = 0\,, \quad \Phi^3 = 0\,, \quad \Phi^4 = 0\, .$$

Согласно (124) из уравнений (125) следует равенство $\Phi^1 = 0$, что эквивалентно равенству

$$\frac{d}{d\,\rho}\,(F^{-1}\,V\,H^2) = F\,V\,k\, sh\, \frac{2\,\rho}{k}\, . \tag{131}$$

В данном случае все недиагональные компоненты тензора R_{mn} равны нулю, а диагональные удовлетворяют условию

$$R_{33} = R_{22}\, sin^2\,\theta\, . \tag{132}$$

Поэтому из уравнений (125) остаётся удовлетворить только следующим трём уравнениям:

$$R_{44} = 0, \quad R_{11} = - 2\, k^{-2}, \quad R_{22} = - 2\, sh^2\, \frac{\rho}{k}\, . \tag{133}$$

В данном случае имеем

$$R_{44} = F^{-1}\, H^{-2}\, V\, \frac{d}{d\,\rho}\,(\frac{H^2}{F}\, \frac{d\,V}{d\,\rho})\, ,$$

$$R_{22} = 1 - \frac{1}{V\,F}\, \frac{d}{d\,\rho}\,(\frac{V\,H}{F}\, \frac{d\,H}{d\,\rho})\, , \tag{134}$$

$$\frac{1}{2}\, H\,(R_{11} + V^{-2}\,F^2\,R_{44}) = \frac{d\,H}{d\,\rho}\, \frac{1}{V\,F}\, \frac{d\,(F\,V)}{d\,\rho} - \frac{d^2 H}{d\,\rho^2}\, .$$

Согласно (133) и (134) получаем следующие уравнения:

$$\frac{d^2\,H}{d\,\rho^2} - \frac{H}{k^2} = \frac{d\,H}{d\,\rho}\, \frac{1}{V\,F}\, \frac{d\,(F\,V)}{d\,\rho}\, , \tag{135}$$

$$\frac{d}{d\,\rho}\,(\frac{H^2}{F}\, \frac{d\,V}{d\,\rho}) = 0\, , \tag{136}$$

$$\frac{d}{d\,\rho}\,(\frac{V\,H}{F}\, \frac{d\,H}{d\,\rho}) = F\,V\, ch\, \frac{2\,\rho}{k}\, . \tag{137}$$

Прежде, чем решать эти уравнения, докажем непосредственно, что из них следует условие гармоничности (131). Рассмотрим ковариантную дивергенцию

$$\nabla_b\, G^b_a = \partial_b\, G^b_a - \Gamma^s_{ba}\, G^b_s + \Gamma^b_{bs}\, G^s_a \tag{138}$$

тензора Эйнштейна

$$G^b_a = R_{as}\, g^{sb} - \frac{1}{2}\, R\, \delta^b_a\, , \tag{139}$$

которая, как известно, равна нулю. В рассматриваемом случае тензор (139) диагонален и не зависит от углов и времени. Поэтому первая компонента ковектора (138) равна

$$\frac{d}{d\,\rho}\, G^1_1 + \Gamma^b_{b1}\, G^1_1 - \Gamma^1_{11}\, G^1_1 - \Gamma^2_{21}\, G^2_2 - \Gamma^3_{31}\, G^3_3 - \Gamma^4_{41}\, G^4_4\, , \tag{140}$$

а так как в рассматриваемом случае $\Gamma^3_{31} = \Gamma^2_{21}$, $G^3_3 = G^2_2$, то

$$\nabla_b\, G^b_1 = \frac{d}{d\,\rho}\, G^1_1 + 2\,\Gamma^2_{21}\,(G^1_1 - G^2_2) + \Gamma^4_{41}\,(G^1_1 - G^4_4)\, . \tag{141}$$

Далее, учитывая нижеследующие формулы для дифференцируемого тензора

$$G^1_1 = A - B, \quad G^2_2 = - A - C, \quad G^4_4 = - A - B, \tag{142}$$

где

$$A = H^{-1}\, F^{-2}\,[\, H'' - H'\,(F\,V)^{-1}\,(F\,V)'\,]\, ,$$

$$B = V^{-1}\, F^{-1}\, H^{-2}\,(V\,H\,F^{-1}\,H')' - H^{-2}\, , \tag{143}$$

$$C = V^{-1}\, F^{-1}\, H^{-2}\,(H^2\,F^{-1}\,V')'\, ,$$

и формулы

$$\Gamma^2_{21} = H^{-1}\, H'\, , \qquad \Gamma^4_{41} = V^{-1}\, V' \tag{144}$$

для связности, нетрудно убедиться, что комбинация

$$\nabla_b\, G^b_1 = (A - B)' + 2\, H^{-1}\, H'\,(2\,A - B + C) + 2\, V^{-1}\, V'\, A \tag{145}$$

равна нулю, каковы бы ни были функции F, H, V. Если же эти функции удовлетворяют гравитационным уравнениям (135), (136) и (137), то

$$A = F^{-2}\, k^{-2}\, , \quad B = 2\, H^{-2}\, sh^2\, \frac{\rho}{k}\, , \quad C = 0\, . \tag{146}$$

Подставляя эти выражения в (145), получаем

$$\nabla_b\, G^b_1 = 2\, k^{-2}\, H^{-2}\, F^{-1}\, V^{-1}\,[\,(F^{-1}\,V\,H^2)' - k\,F\,V\, sh\, \frac{2\,\rho}{k}\,]\, . \tag{147}$$

Так как мы доказали, что (145) равняется нулю, то доказали и следствие (131).

Частное решение системы уравнений (135), (136), (137) удовлетворяет условию

$$F\,V = C\, , \tag{148}$$

где C = const.

Действительно, из уравнения (136) следует, что

$$H^2 \frac{dV}{d\rho} = B F, \tag{149}$$

где $B = \text{const}$. Подставляя сюда условие (148), получаем

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{2} V^2\right) = B C H^{-2}. \tag{150}$$

Подставляя условие (148) в (135), получаем уравнение

$$\frac{d^2 H}{d\rho^2} - \frac{H}{k^2} = 0, \tag{151}$$

общее решение которого запишем в виде

$$H = P k\, sh \frac{\rho + \hat\rho}{k}, \tag{152}$$

где P и $\hat\rho$ - константы интегрирования. Подставляя это решение в (150), получаем

$$\frac{1}{2} V^2 = N - B C P^{-2} k^{-1} cth \frac{\rho + \rho}{k}, \tag{153}$$

где N - ещё одна константа интегрирования.

Остаётся рассмотреть уравнение (137), но вместо него можно рассмотреть сумму

$$\frac{d}{d\rho}\left[(F V)^{-1} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{2} V^2 H^2\right) \right] = F V ch \frac{2\rho}{k} \tag{154}$$

уравнений (136) и (137), что удобнее. Подставляя сюда условие (148), получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\left(\frac{1}{2} V^2 H^2\right) = C^2 ch \frac{2\rho}{k}. \tag{155}$$

Это уравнение нужно согласовать с полученными выше результатами (152) и (153), из которых следует, что

$$\frac{1}{2} V^2 H^2 = \tag{156}$$
$$= \left[N P^2 k\, sh \frac{\rho + \hat\rho}{k} - B C\, ch \frac{\rho + \hat\rho}{k} \right] k\, sh \frac{\rho + \hat\rho}{k}.$$

Дифференцируя эту функцию, получаем её производные:

$$\left(\frac{1}{2} V^2 H^2\right)' = N P^2 k\, sh \frac{2}{k}(\rho + \hat\rho) - B C\, ch \frac{2}{k}(\rho + \hat\rho),$$
$$\tag{157}$$
$$\left(\frac{1}{2} V^2 H^2\right)'' =$$
$$= 2 N P^2 ch \frac{2}{k}(\rho + \hat\rho) - 2 B C k^{-1} sh \frac{2}{k}(\rho + \hat\rho).$$

Сравнивая этот результат с уравнением (155), находим, что константы интегрирования должны удовлетворять следующим условиям:

$$2 N P^2 ch \frac{2\hat\rho}{k} - 2 B C k^{-1} sh \frac{2\hat\rho}{k} = C^2,$$
$$2 N P^2 sh \frac{2\hat\rho}{k} - 2 B C k^{-1} ch \frac{2\hat\rho}{k} = 0. \tag{158}$$

Отсюда находим

$$2 B = C k\, sh \frac{2\hat\rho}{k}, \quad 2 N P^2 = C^2 ch \frac{2\hat\rho}{k}. \tag{159}$$

Подставляя это в (156), получаем

$$V^2 H^2 = C^2 k^2 sh \frac{\rho + \hat\rho}{k}\, sh \frac{\rho - \hat\rho}{k}. \tag{160}$$

Отсюда на основе (152) находим

$$V^2 = C^2 P^{-2} sh \frac{\rho - \hat\rho}{k} \Big/ sh \frac{\rho + \hat\rho}{k}, \tag{161}$$

затем на основе (148) находим

$$F^2 = P^2 sh \frac{\rho + \hat\rho}{k} \Big/ sh \frac{\rho - \hat\rho}{k}. \tag{162}$$

Интересно проверить, что условие гармоничности (131) выполняется. Действительно, согласно (148) оно означает

$$\frac{d}{d\rho}(V^2 H^2) = C^2 k\, sh \frac{2\rho}{k}, \tag{163}$$

а согласно (160)

$$V^2 H^2 = \frac{1}{2} C^2 k^2 \left[ch \frac{2\rho}{k} - ch \frac{2\hat\rho}{k} \right]. \tag{164}$$

Следовательно, условие (163) выполняется.

Итак, метрику (126), удовлетворяющую уравнениям (125), мы нашли в виде

$$C^2 P^{-2} \Xi\, d t^2 - P^2 k^2 \{ \Xi^{-1} d\xi^2 + sh^2(\xi + \alpha)\, d\Omega^2 \}, \tag{165}$$

где

$$\Xi = \frac{sh(\xi - \alpha)}{sh(\xi + \alpha)}, \quad \xi = \rho / k, \quad \alpha = \hat\rho / k. \tag{166}$$

Далеко от источника, т. е. при больших значениях ξ, она должна асимптотически приближаться к метрике (118), точнее - к метрике

$$c^2 d t^2 - k^2 \{ d\xi^2 + sh^2 \xi\, d\Omega^2 \}. \tag{167}$$

Отсюда следует, что

$$C = c, \quad P = \exp\{ -\alpha \}. \tag{168}$$

Осталось выяснить, чему равен параметр α. Его мы находим из того условия, что при больших значениях ξ связность (128) должна стремиться к связности (46). Иначе говоря, все компоненты связности (128) должны стремиться к компонентам фоновой связности (129), кроме компоненты Γ^1_{44}, которая должна стремиться не к нулю, а к U', т. е.

$$\Gamma'^{1}_{44} \longrightarrow U' = \gamma M (k\, sh\, \xi)^{-2} . \qquad (169)$$

Отметим, что сюда входит та самая "притягательная сила", о которой писал Лобачевский в 1835 году [2, с.159].

Это условие выполнимо, так как

$$F^{-1} F' = - H^{-1} H' = \frac{1}{2k} [cth (\xi + \alpha) - cth (\xi - \alpha)],$$

$$H^{-1} H' = k^{-1} cth (\xi + \alpha),$$

$$H H' = k P^2 sh (\xi + \alpha) ch (\xi - \alpha),$$

$$V V' = \frac{1}{2} k c^2 sh\, 2\alpha / [k P sh (\xi + \alpha)]^2 . \qquad (170)$$

Сравнивая (169) и (170), находим

$$\frac{1}{2} sh\, 2\alpha = \frac{\gamma M}{k c^2} . \qquad (171)$$

Так как гравитационный радиус $\gamma M c^{-2}$ много меньше константы k, то приближённо можно положить

$$\alpha = \frac{\gamma M}{k c^2}, \quad P = 1. \qquad (172)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лобачевский Н. И. *О началах геометрии*. Полн. собр. соч., т. 1. М. - Л. : Гостехиздат, 1946, с. 185 - 261.

2. Лобачевский Н. И. *Новые начала геометрии с полной теорией параллельных* . Полн. собр. соч., т. 2. М. - Л. : Гостехиздат, 1949, с. 147 - 454.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 апреля 1992 года.

Черников Н.А. P2-92-192

Уравнения тяготения в пространстве Лобачевского

Сформулированы уравнения тяготения в пространстве Лобачевского. Решена задача о гравитационном поле в пространстве Лобачевского.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод Г.Г.Сандуковской

Chernikov N.A. P2-92-192

The Gravity Equations in the Lobachevsky Space

The gravity equations in the Lobachevsky space are derived. The problem of the gravitational field of point mass in the Lobachevsky space is solved.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992