92-163

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-92-163

Кленин Б.А.

К ВОЛНОВЫМ И КОРПУСКУЛЯРНЫМ СВОЙСТВАМ МИКРОЧАСТИЦ

1992

Введение

Идею о волновых свойствах микрочастиц впервые высказал Луи де Бройль в 1923 г., а ее экспериментальное подтверждение было получено в 1927 г. в опытах по дифракции электронов. Это и послужило началом создания квантовой механики. Де Бройль предположил, что с движущейся частицей связана плоская волна

$$\psi(\vec{r},t)=A\exp i(\vec{k}\vec{r}-\omega t),$$

где A - постоянная амплитуда волны, $\vec{k}$ и ω - волновые вектор и частота, которые связаны с импульсом $\vec{P}$ и энергией E частицы как

$$\vec{P}=\hbar\vec{k};\quad E=\hbar\omega,$$

где $\hbar$ - постоянная Планка. Позднее Шредингер и Дирак, на основе идеи де Бройля, получили линейные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяла плоская волна или суперпозиция плоских волн:

$$i\hbar\frac{\delta\psi_{Ш}}{\delta t}=\hat{H}_{Ш}\psi_{Ш},$$

$$i\hbar\frac{\delta\psi_{D}}{\delta t}=\hat{H}_{D}\psi_{D},$$

где

$$\hat{H}_{Ш}=\frac{1}{2m}(\hat{P}-\frac{e}{c}\vec{A})^2+e\hat{\varphi},$$

$$\hat{H}_{D}=c\hat{\alpha}(\hat{P}-\frac{e}{c}\vec{A})+e\varphi+m_0c^2\hat{\beta}$$

Операторы Гамильтона для уравнений Шредингера и Дирака, в которых $\hat{P}=-i\hbar\nabla$ - операторы импульса, $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ - четырехрядные матрицы Дирака, e,m - заряд и масса частицы, φ и $\vec{A}$ - скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, c - скорость света.

Такова вкратце историческая последовательность становления квантовой физики. Однако, на наш взгляд, возможен и другой подход к проблеме корпускулярно-волнового дуализма микрочастиц. Он основан на классической механике и электродинамике и изложен в работе /1/, где, для определенности, микрочастицей является электрон. Этот альтернативный подход позволил получить и интерпретировать такие, известные из квантовой механики, свойства электрона, как нулевую энергию, спин, магнитный момент и соотношение неопределенностей для координаты и импульса и показать, что эти свойства являются следствием его волнового движения.

В предлагаемой работе излагается сущность этого альтернативного подхода к интерпретации волновых свойств электрона, вычисляется поправка к его магнитному моменту и дается вывод уравнений движения для волновой функции $\psi(\vec{r},t)$.

1. Электрон как волна-частица

В работах /1,2/, в рамках классических механики и электродинамики, введен и обоснован новый (не классический) импульс электрона, названный волновым доплеровским импульсом, который связан с векторным потенциалом электромагнитного поля в вакууме как

$$\vec{P}_D=m\vec{V}_D=-2e/c\,\vec{A},\qquad(1)$$

и который является решением системы уравнений

$$\nabla^2 \vec{P}_D - \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 \vec{P}_D}{\delta t} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d\vec{P}_D}{dt} + \frac{1}{2m}\nabla P_D^2 = 0, \tag{3}$$

где $m=m_o/\sqrt{1-\beta^2}$ – масса электрона в зависимости от его поступательной скорости $\beta=V/C$. Уравнение (2) является волновым уравнением, а (3) – уравнением траектории, или луча – аналог уравнения Гамильтона в классической механике. Следовательно, система уравнений (2) и (3) описывает электрон как волну, не имеющую траектории, и как частицу обладающую траекторией. В названных работах показано, что решением этих уравнений является доплеровский импульс

$$\vec{P}_D = m_o C \frac{(1-\vec{K}_o\vec{V}/\omega_o)}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{n}_o, \tag{4}$$

где $\vec{n}_o=\vec{K}_o/K_o$ – единичный вектор, определяющий направление распространения плоской волны, $\vec{K}_o$, ω_o – волновые вектор и частота, $\vec{V}$ – поступательная скорость электрона. Соотношение (4) связывает параметры плоской волны с параметрами частицы. Из (4) следует, что доплеровская энергия электрона равна

$$E_D = cP_D = m_o c^2 \frac{(1-\vec{K}_o\vec{V}/\omega_o)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5}$$

Так как $K_o^2 = \omega_o^2/c^2$, то волновой импульс (4) можно записать как

$$\vec{P}_D = \frac{m_o c^2}{\omega_o} \frac{(1-\vec{K}_o\vec{V}/\omega_o)}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{K}_o. \tag{6}$$

На основании (6) вводится постоянная Планка:

$$\hbar = m_o c^2/\omega_o,$$

тогда (5) и (6) можно представить в виде

$$\vec{P}_D = \hbar \frac{(1-\vec{K}_o\vec{V}/\omega_o)}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{K}_o, \tag{7}$$

$$E_D = \hbar \frac{(1-\vec{K}_o\vec{V}/\omega_o)}{\sqrt{1-\beta^2}} \omega_o. \tag{8}$$

Выражение

$$\omega = \omega_o \frac{(1-\vec{K}_o\vec{V}/\omega_o)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{9}$$

в (8) есть доплеровское смещение комптоновской частоты $\omega_o=m_o c^2/\hbar$ электрона – аналог оптического релятивистского эффекта Доплера. Поэтому, на основании (7) и (8), определим волновые вектор и частоту Доплера как

$$\vec{K}_D = \frac{(1-\vec{K}_o\vec{V}/\omega_o)}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{K}_o, \tag{10}$$

$$\omega_D = \frac{(1-\vec{K}_o\vec{V}/\omega_o)}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\omega_o\,, \qquad (11)$$

тогда волновые импульс и энергию электрона можно представить в виде

$$\vec{P}_D = \hbar\vec{K}_D;\;\; E_D = \hbar\omega_D\,, \qquad (12)$$

причем $K_D^2 = \omega_D^2/c^2$.
Волновые вектор $\vec{K}_D$ и частоту ω_D можно записать как

$$\vec{K}_D = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{c^2}{\omega_o^2}\cdot\frac{m\vec{V}}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}\,\vec{K}_o\right)\vec{K}_o\,, \qquad (13)$$

$$\omega_D = \frac{m_o c^2}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{c^2}{\omega_o^2}\cdot\frac{m_o\vec{V}}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}\,\vec{K}_o\,, \qquad (14)$$

где

$$\vec{K}_Б = \frac{m_o\vec{V}}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}\,,\quad \omega_Б = \frac{m_o c^2}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (15)$$

- известные волновые вектор и частота волны де Бройля, так что обычные импульс и энергия частицы связаны соотношениями

$$\vec{P}=\hbar\vec{K}_Б;\; E=\hbar\omega_Б$$

Будем считать, что направления движения волны и частицы совпадают, то есть $\vec{K}_o//\vec{V}$, и рассмотрим обобщенный импульс

$$\vec{P}_{об} = \vec{P}_D + \vec{P} = \frac{m_o c(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\vec{n}_o + \frac{m_o V}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\vec{n}_o\,.$$

Отсюда имеем:

$$\vec{P}_{об} = \frac{m_o C}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\vec{n}_o = \hbar\,\frac{\vec{K}_o}{\sqrt{1-\beta^2}} = \hbar\vec{K}_{об}\,, \qquad (16)$$

где

$$\vec{K}_{об} = \frac{\vec{K}_o}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \qquad (17)$$

Из (16) следует, что

$$c^2P_{об}^2 = \frac{m_o^2c^4}{1-\beta^2} = E^2 \qquad (18)$$

Так как

$$E^2 = c^2P^2 + m_o^2c^4,$$

то из (18) получим связь обобщенного и обычного импульсов частицы:

$$P_{об}^2 = P^2+m_o^2c^2. \qquad (19)$$

2. Электрон как волна

В работе /1/ показано, что решением только волнового уравнения (2) является плоская поперечная волна - волновой доплеровский импульс

$$\vec{P}_D = m_0 c \frac{(1-\dot{\vec{K}}_0\vec{V}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{\tau}_0 \exp i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t), \quad (20)$$

где $\vec{\tau}_0$ – единичный вектор, причем $\vec{\tau}_0 \perp \vec{K}_0$. Пусть по-прежнему $\vec{K}_0 // \vec{V}$, тогда

$$\vec{P}_D = m_0 c \frac{(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{\tau}_0 \exp i(\vec{K}_0 \vec{r} - \omega_0 t) \quad (21)$$

Так как, по определению $\vec{P}_D = m\vec{V}_D$, а $\vec{V}_D = d\vec{R}_D/dt$, где $\vec{V}_D$ – доплеровская скорость, $\vec{R}_D$ – отклонение частицы от равновесного положения, то из (21) получим

$$\frac{d\vec{R}_D}{at} = c(1-\beta)\, \vec{\tau}_0 \exp i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t). \quad (22)$$

Интегрируя (22), найдем

$$\vec{R}_D = i\frac{c}{\omega_0}(1-\beta)\vec{\tau}_0 \exp i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t)+\vec{c}_1 \quad (23)$$

Постоянный вектор $\vec{c}_1$ определим из условия

$$\vec{R}_D/_{t=0} = i\frac{c(1-\beta)}{\omega_0}\, \vec{\tau}_0 \exp i\vec{K}_0\vec{r}+\vec{c}_1.$$

Отсюда получим, что $\vec{c}_1=0$. Выделяя в (23) действительную часть, будем иметь

$$\vec{R}_D = -\frac{c}{\omega_0}(1-\beta)\vec{\tau}_0 \sin(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t). \quad (24)$$

Отметим, что волновой доплеровский импульс и отклонения частицы $\vec{R}_D$ от равновесного положения удовлетворяют уравнениям линейного гармонического осциллятора:

$$\ddot{\vec{P}}_D + \omega_0^2\vec{P}_D = 0,$$
$$\ddot{\vec{R}}_D + \omega_0^2\vec{R}_D = 0.$$

3. Магнитный момент электрона

Из электродинамики известно, что векторный потенциал $\vec{A}$ осциллятора на больших от него расстояниях $\vec{R}$ можно представить в виде

$$\vec{A} = \frac{\vec{M}\times\vec{R}}{R^3} + \frac{1}{cR^2}\frac{\delta}{\delta t}(\vec{M}\times\vec{R}), \quad (25)$$

где $\vec{M}$ – магнитный момент осциллятора в момент времени $t-R/c$. В работе /1/, наряду с классическим радиусом электрона $r_{кл}=e^2/m_0c^2$, получен и квантовый радиус $r_{кв}=r_{кл}/\sqrt{\alpha}$, где $\alpha=e^2/\hbar c$ – постоянная тонкой структуры, причем $r_{кв} \gg r_{кл}$ ($r_{кв} \approx 12 r_{кл}$). В качестве модели осциллятора рассмотрим классический электрон и будем считать его источником замкнутого переменного тока (поля), тогда на расстоянии $r_{кв} \gg r_{кл}$ от электрона векторный потенциал (25) можно представить как

$$\vec{A}(\vec{r}_{кв}) = \frac{\vec{M}\times\vec{r}_{кв}}{r_{кв}^3} + \frac{1}{c r_{кв}^2}\frac{\delta}{\delta t}(\vec{M}\times\vec{r}_{кв}). \quad (26)$$

Так как

$$\vec{P}_D = -2e/c\vec{A},$$

где $\vec{P}_D$ определяется выражением (21), то уравнение (26) примет вид

$$\frac{\delta}{\delta t}(\vec{M}\times\vec{r}_{кв}) + \frac{c}{r_{кв}}(\vec{M}\times\vec{r}_{кв}) = -\frac{1}{2}\frac{c^2 r_{кв}^2}{e}\vec{P}_D. \quad (27)$$

Введем новые переменные:

$$\vec{y} = \vec{M}\times\vec{r}_{кв};\quad P = c/r_{кв};\quad \vec{Q} = -\frac{1}{2}\frac{c^2 r_{кв}^2}{e}\vec{P}_D,$$

тогда (27) запишется как

$$\frac{d\vec{y}}{dt} + P\vec{y} = \vec{Q}. \quad (28)$$

Общим решением уравнения (28) является

$$\vec{y} = \exp^{-\int P dt}\left[\int \vec{Q} \exp^{\int P dt} dt + \vec{c}_1\right]. \qquad (29)$$

Вычисляя в (29) интегралы и переходя к старым переменным, получим

$$\vec{M} \times \vec{r}_{кв} = -\frac{1}{2}\frac{c^2 r_{кв}^2 \vec{A}_o}{e(c/r_{кв} - i\omega_o)} \exp i(\vec{K}_o \vec{r}_{кв} - \omega_o t) + \vec{c}_1 \exp(-c/r_{кв} t), \qquad (30)$$

где

$$\vec{A}_o = m_o c \frac{(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{\tau}_o. \qquad (31)$$

Постоянный вектор $\vec{c}_1$ в (30) определим из условия периодичности:

$$(\vec{M} \times \vec{r}_{кв})/_{t=-\frac{T}{2}} = (\vec{M} \times \vec{r}_{кв})/_{t=\frac{T}{2}}.$$

Отсюда получим

$$\vec{c}_1 = \frac{1}{2}\frac{c^2 r_{кв}^2 \vec{A}_o}{e(c/r_{кв} - i\omega_o)} \frac{\exp i\vec{K}_o \vec{r}_{кв} (\exp \Pi i - \exp -\Pi i)}{\exp(c\Pi/r_{кв}\omega_o) - \exp(-c\Pi/r_{кв}\omega_o)}.$$

Так как $\exp(\Pi i) - \exp(-\Pi i) = 0$, то $\vec{c}_1 = 0$.
Вводя единичный вектор $\vec{\tau}_o' = \vec{r}_{кв}/r_{кв}$, получим из (30)

$$\vec{M} \times \vec{\tau}_o' = -\frac{1}{2}\frac{c\, r_{кв}^2 \vec{A}_o}{e(1 - i r_{кв}\omega_o/c)} \exp i(\vec{K}_o \vec{r}_{кв} - \omega_o t),$$

или

$$M \vec{\sigma}_o \times \vec{\tau}_o' = -\frac{1}{2}\frac{c\, r_{кв}^2 A_o \vec{\tau}_o}{e(1 - i r_{кв}\omega_o/c)} \exp i(\vec{K}_o \vec{r}_{кв} - \omega_o t), \qquad (32)$$

где $\vec{\sigma}_o = \vec{M}/M$ – единичный вектор. Так как $\vec{\sigma}_o$, $\vec{\tau}_o'$, $\vec{\tau}_o$ – единичные векторы, то на основании (32) они взаимно ортогональны, поэтому, так как $r_{кв}^2 = e^2\hbar/m_o^2 c^3$, то из (31) и

(32) получим

$$M = \frac{1}{2}\frac{e\hbar}{m_o c}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\frac{(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (33)$$

Множитель $(1-\beta)/\sqrt{1-\beta^2}$ в (33) обусловлен эффектом Доплера для электрона. При $\beta=0$ имеем:

$$M = \frac{e\hbar}{2m_o c}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}.$$

Разлагая последнее выражение в ряд с точностью до α, получим

$$M = \frac{e\hbar}{2m_o c}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right),$$

где $M_o = e\hbar/2m_o c$ – магнитный момент электрона, а $\alpha e\hbar/4m_o c$ – поправка к магнитному моменту, связанная с колебанием электрона. Отметим, что аналогичное выражение для магнитного момента электрона, полученное в квантовой электродинамике, имеет вид

$$M = \frac{e\hbar}{2m_o c}\left(1 + \frac{\alpha}{2\Pi} - \ldots\right)$$

4. Волновые уравнения

Будем характеризовать движение свободного электрона обобщенным импульсом $\vec{P}_{об}$ (16) и энергией E. Рассмотрим волновую функцию

$$\psi(\vec{r},t) = A_o \exp i(\vec{P}_{об}\vec{r}/\hbar - Et/\hbar), \qquad (34)$$

где A_o – постоянная. Подействуем на (43) операторами grad и $\delta/\delta t$, тогда:

$$\nabla\psi = i\vec{P}_{об}/\hbar\psi, \qquad (35)$$

$$\frac{\delta\psi}{\delta t} = -iE/\hbar\psi \qquad (36)$$

Умножая (35) на $c\vec{e}$, где $\vec{e}$ – единичный вектор, параллельный $\vec{P}_{об}$, получим

$$c\vec{e}\nabla\psi = \frac{ic}{\hbar} P_{об}\psi. \qquad (37)$$

Так как согласно (19)

$$E = \pm cP_{об}, \qquad (38)$$

то, выбирая в (38) знак плюс, из (36) и (37) найдем

$$c\vec{e}\nabla\psi = -\frac{\delta\psi}{\delta t}. \qquad (39)$$

Поскольку $\hat{P}_{об} = -i\hbar\nabla$ – оператор обобщенного импульса, то из (39) будем иметь

$$i\hbar\frac{\delta\psi}{\delta t} - c\vec{e}\vec{P}_{об}\psi = 0. \qquad (40)$$

Приведем уравнение (40) к гамильтоновой форме, записав гамильтониан в виде

$$\hat{H} = c\sigma\vec{e}\vec{P}_{об} = c\vec{\sigma}\vec{P}_{об}, \qquad (41)$$

где $\vec{\sigma}$ – оператор, подлежащий определению. Потребуем, чтобы связь между операторами Гамильтона и обобщенного импульса была такой же как и между энергией и импульсом, т.е.

$$E^2 = c^2P_{об}^2 = c^2(P_{об_x}^2 + P_{об_y}^2 + P_{об_z}^2).$$

Возводя (41) в квадрат, получим

$$\hat{H}^2 = c^2[\sigma_x^2P_{об_x}^2 + \sigma_y^2P_{об_y}^2 + \sigma_z^2P_{об_z}^2 + (\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x)P_{об_x}P_{об_y} +$$
$$+ (\sigma_x\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)P_{об_x}P_{об_z} + (\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_y)P_{об_y}P_{об_z}]. \qquad (42)$$

В соответствии с предыдущим выражением для энергии, из (42) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 &= 1, \\ \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x &= 0, \\ \sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x &= 0, \\ \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y &= 0. \end{aligned} \qquad (43)$$

Условиям (43) удовлетворяют спиновые матрицы Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, уравнение (40) можно записать как

$$i\hbar\frac{\delta\psi}{\delta t} = \hat{H}\psi = c\hat{\sigma}\hat{P}_{об}\psi \qquad (44)$$

С другой стороны, так как

$$c^2P_{об}^2 = c^2P^2 + m_o^2c^4,$$

где P – обычный импульс, то оператор Гамильтона можно представить в виде

$$\hat{H} = c\hat{\alpha}\hat{P} + \hat{\beta}m_oc^2, \qquad (45)$$

где $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ – четырехрядные матрицы Дирака. С учетом (45), уравнение (44) приводится к известному уравнению Дирака:

$$i\hbar\frac{\delta\psi}{\delta t} = (c\hat{\alpha}\hat{P} + m_oc^2\hat{\beta})\psi \qquad (46)$$

Уравнение (44) позволяет решать те же задачи квантовой механики, что и уравнение Дирака (46), и в этом смысле они эквивалентны. В качестве примера рассмотрим применение уравнения (44) к задаче о движении электрона в поле центральных сил, а именно исследуем решение этого уравнения в кулоновском поле ядра атома водорода с потенциальной энергией $V = -ze^2/r$.

В силу центральной симметрии задачи гамильтониан $\hat{H}=c\hat{\sigma}\hat{P}_{об}+V(r)$ уравнения (44) удобно записать в сферической системе координат. Следуя /3,4/, найдем

$$\hat{H}=c\hat{\sigma}_r\hat{P}r_{об}+i\hbar c/r\hat{\sigma}_r\hat{\beta}K+V(r), \tag{47}$$

где

$$\hat{P}r_{об} = -i\hbar\left(\frac{\delta}{\delta r}+\frac{1}{r}\right) \tag{48}$$

– радиальный оператор импульса, а

$$\hat{\sigma}_r = \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix};\quad \hat{\beta} = \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{49}$$

– антикоммутирующие матрицы Паули, $K=\pm1,\ \pm2,\ldots$ – квантовое число, связанное с полным моментом количества движения электрона /3/. Введем волновую функцию

$$\psi(r) = \begin{pmatrix}F(r)/r\\ G(r)/r\end{pmatrix}. \tag{50}$$

Используя (44,48-50), получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{dF}{dr} - \frac{K}{r}F - \frac{(E-V)}{\hbar c}G = 0,\\ &\frac{dG}{dr} + \frac{K}{r}G + \frac{(E-V)}{\hbar c}F = 0.\end{aligned} \tag{51}$$

Определим энергию E с точностью до знака постоянной m_0c^2 (энергии покоя), тогда ее можно представить как

$$\begin{aligned}&E = \mathcal{E} + m_0c^2,\\ \text{или}\quad &E = \mathcal{E} - m_0c^2,\end{aligned} \tag{52}$$

где $\mathcal{E}$ – энергия, подлежащая определению. В этом случае из уравнений (51) следует следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{dF}{dr} - \frac{K}{r}F - \frac{(\mathcal{E}+m_0c^2-V)}{\hbar c}G = 0,\\ &\frac{dG}{dr} + \frac{K}{r}G + \frac{(\mathcal{E}+m_0c^2-V)}{\hbar c}F = 0,\\ &\frac{dF}{dr} - \frac{K}{r}F - \frac{(\mathcal{E}-m_0c^2-V)}{\hbar c}G = 0,\\ &\frac{dG}{dr} + \frac{K}{r}G + \frac{(\mathcal{E}-m_0c^2-V)}{\hbar c}F = 0.\end{aligned} \tag{53}$$

Сделаем замену:

$A = (m_0c^2+\mathcal{E})/\hbar c$, $B = (m_0c^2-\mathcal{E})/\hbar c$; $V/\hbar c = -Z\alpha D/\rho$,

$D = \sqrt{AB} = \sqrt{m_0^2c^4-\mathcal{E}^2}\,/\hbar c$, $\rho = rD$, $\alpha = e^2/\hbar c$.

Комбинируя уравнения 1), 4) и 2), 3) системы (53), получим

$$\begin{aligned}&\frac{dF}{d\rho} - \frac{K}{\rho}F - \left(\frac{A}{D} + \frac{Z\alpha}{\rho}\right)G = 0,\\ &\frac{dG}{d\rho} + \frac{K}{\rho}G - \left(\frac{B}{D} - \frac{Z\alpha}{\rho}\right)F = 0,\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}&\frac{dF}{d\rho} - \frac{K}{\rho}F + \left(\frac{B}{D} - \frac{Z\alpha}{\rho}\right)G = 0,\\ &\frac{dG}{d\rho} + \frac{K}{\rho}G + \left(\frac{A}{D} + \frac{Z\alpha}{\rho}\right)F = 0.\end{aligned} \tag{55}$$

Рассмотрим сначала систему уравнений (54) и представим решение в виде

$$F(\rho)=e^{-\rho}\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^{s+\nu}a_{\nu},\qquad (56)$$

$$G(\rho)= e^{-\rho}\sum_{\nu=0}^{\infty}\rho^{s+\nu}B_{\nu}.$$

Подставляя (56) в (54) и приравнивая коэффициенты при $\rho^{s+\nu-1}$, найдем

$$\begin{aligned}&(S+K)B_o + Z\alpha a_o = 0, \quad \nu=0\\ &-Z\alpha B_o + (S-K)a_o = 0,\end{aligned}\qquad (57)$$

$$\begin{aligned}&(S+\nu+K)B_{\nu} + Z\alpha a_{\nu} - \frac{B}{D}a_{\nu-1} - B_{\nu-1} = 0,\\ &\qquad\qquad \nu\neq 0\\ &(S+\nu-K)a_{\nu} - Z\alpha B_{\nu} - \frac{A}{D}B_{\nu-1} - a_{\nu-1} = 0.\end{aligned}\qquad (58)$$

Умножая первое уравнение (58) на D, а второе на B и вычитая одно из другого, получим

$$a_{\nu}\left[\sqrt{\frac{A}{B}}\,Z\alpha - (S+\nu-K)\right] = -B_{\nu}\left[\sqrt{\frac{A}{B}}(S+\nu+K)+Z\alpha\right],\qquad (59)$$

а из системы уравнений (57) имеем

$$S = \sqrt{K^2-Z^2\alpha^2}.\qquad (60)$$

Решения (56) являются регулярными на бесконечности, если ряды обрываются при ν=N. Поэтому, считая, что $a_{N+1}= B_{N+1}=0$, из (58) найдем

$$\sqrt{B}\;a_N= -\sqrt{A}\;B_N,\quad N = 0,1,2,...\qquad (61)$$

Подставляя (61) в (59) при ν=N и заменяя A и B, будем иметь

$$\mathcal{E}Z\alpha = (S+N)\sqrt{m_o^2c^4-\mathcal{E}^2}.\qquad (62)$$

Из соотношения (62) найдем

$$\mathcal{E} = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1+\frac{Z^2\alpha^2}{(S+N)^2}}}.\qquad (63)$$

Аналогичное выражение для энергии $\mathcal{E}$ следует и из решений системы уравнений (55). Разлагая (63) в ряд по степеням $Z^2\alpha^2$ и учитывая (60), получим, ограничиваясь членами до четвертого порядка /3,4/:

$$\mathcal{E} = m_oc^2\left(1-\frac{Z^2\alpha^2}{2n^2} - \frac{Z^4\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{/K/} - \frac{3}{4}\right)\right),\qquad (64)$$

где

$$n = N + /K/=1,2,...$$

– главное квантовое число, а /K/ принимает целые положительные значения. Первый член в правой части (64) является энергией покоя электрона, второй член определяет поправку к энергии частицы без спина, совпадающей с результатом, полученным из нерелятивистского уравнения Шредингера и, наконец, третий член – релятивистская поправка к энергии частицы со спином 1/2, определяющая тонкую структуру атома водорода, которая хорошо согласуется с опытом.

5. Заключение

Волновой доплеровский импульс электрона, введенный и обоснованный в работах /1,2/ и основанный на классической механике и электродинамике, позволил найти, в отличие от общепринятого подхода, альтернативное описание свойств электрона. На основе этого были получены такие, известные из квантовой механики свойства электрона, как его нулевая энергия, спин, магнитный момент и соотношение неопределенностей для координаты и импульса, и показано, что эти свойства являются существенно волновыми и имеют наглядную физическую интерпретацию, которая отсутствует в квантовой механике. Кроме того, альтернативный подход, не вступая в противоречие с квантовой механикой, приводит и к обычным ее уравнениям для волновой функции $\psi(\vec{r},t)$, а именно к уравнению Дирака и к волновому уравнению первого порядка со скрытой массой покоя и оператором Гамильтона, содержащим спиновые матрицы Паули. Последнее уравнение равносильно уравнению Дирака, что иллюстрируется, в частности, решением задачи для атома водорода.

Литература

1. Кленин Б.А. Об одном решении уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме.ОИЯИ, Р2-92-161, Дубна, 1990.
2. Кленин Б.А. Уравнения Максвелла и эффект Доплера для электрона. ОИЯИ, Р2-92-162, Дубна, 1991.
3. Давыдов А.С. Квантовая механика М. "Наука", 1973.
4. Шифф Л. Квантовая механика, М. ИЛ., 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 апреля 1992 года.

Кленин Б.А. Р2-92-163

К волновым и корпускулярным свойствам микрочастиц

Показано, что источником волновых свойств электрона являются его нулевые колебания с частотой Доплера в нулевом электромагнитном поле вакуума. Введена и обоснована волновая функция Доплера и на ее основе получено дифференциальное волновое уравнение первого порядка со скрытой массой покоя электрона и оператором Гамильтона, содержащим спиновые матрицы Паули, равносильные уравнению Дирака.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод автора

Klenin B.A. P2-92-163

On the Wave and Corpuscular Properties of Microparticles

It is shown that a spring of the wave properties of the electron is its zero oscillations with the Doppler frequency in the vacuum zero electromagnetic field. A Doppler wave function is introduced and grounded and on its basis a wave equation with the Hamilton operators and Pauli spin matrices is obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Reactions, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992