сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-92-162

Б.А.Кленин

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА ДЛЯ ЭЛЕКТРОНА

1992

В работе сделана попытка обоснования единого подхода к построению основных принципов волновой механики частиц и специальной теории относительности. Основой такого построения являются уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. Непосредственно из уравнений Максвелла волновая механика частиц не следует, однако в работе /1/ показано, что для электромагнитного поля можно ввести понятие волнового или доплеровского импульса электрона и найти его связь с векторным потенциалом поля. Тогда уравнения Максвелла и полученные дифференциальные связи волнового импульса с электромагнитным полем можно рассматривать как систему уравнений, из которых следуют волновые свойства частиц с массой покоя, отличной от нуля, и основы специальной теории относительности.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0, \quad \operatorname{div}\vec{H}=0,\\ &\operatorname{rot}\vec{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0, \quad \operatorname{div}\vec{E}=0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - напряженности электрического и магнитного полей, а C - электродинамическая постоянная, равная скорости света.

Решение уравнений (1), как известно, можно представить в виде

$$\vec{H} = rot\,\vec{A}\,,\quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,, \tag{2}$$

где $\vec{A}$ – векторный потенциал, который является решением волнового уравнения

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

при условии, что

$$div\,\vec{A} = 0\,. \tag{4}$$

Рассмотрим сначала постоянное и однородное магнитное поле. Векторный потенциал такого поля связан с его напряженностью как /2/

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{H}\times\vec{r}\,, \tag{5}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки поля. Кроме того, известно, что

$$\vec{p} = m\vec{v} = -\frac{e}{c}\vec{H}\times\vec{r}\,, \tag{6}$$

где m – масса, $\vec{v}$ – скорость частицы, есть связь импульса с магнитным полем, удовлетворяющая уравнению движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}\,.$$

Умножая (5) на e/c, где e – заряд частицы, получим связь импульса с векторным потенциалом поля

$$\vec{p} = m\vec{v} = -2e/c\,\vec{A}\,, \tag{7}$$

В работе /1/ показано, что связь

$$\vec{P} = m\vec{V} = -2e/c\,\vec{A}\,, \tag{8}$$

где $\vec{P}$ и $\vec{V}$ – волновые импульс и скорость частицы, справедлива и для электромагнитного поля, описываемого уравнениями (1) или (3). Действуя на левую и правую части (8) операторами rot и $\partial/\partial t$, получим

$$rot\,\vec{P} = -2e/c\,\vec{H}\,, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} = 2e\vec{E}\,, \tag{10}$$

а подставляя (8) в уравнение (3), будем иметь

$$\nabla^2\vec{P} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} = 0\,, \tag{11}$$

$$div\,\vec{P} = 0\,. \tag{12}$$

Соотношения (9) и (10) будем считать определениями электромагнитного поля как источника движения зарядов, а уравнения (11) и (12) уравнениями, которым должен удовлетворять волновой импульс $\vec{P}$.

Умножим левую и правую части(9) векторно на $\vec{P}$:

$$\vec{P}\times rot\,\vec{P} = -2\frac{e}{c}\vec{P}\times\vec{H} \tag{13}$$

Используя известные соотношения векторного анализа

$$\vec{P}\times rot\,\vec{P} = \frac{1}{2}\nabla P^2 - (P\nabla)\vec{P}\,,$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{P}\,, \tag{14}$$

и учитывая (10), получим из (13):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} - \frac{1}{2m}\nabla P^2 = 2\left(e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{V}\times\vec{H}\right)\,, \tag{15}$$

где

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{V}\times\vec{H}$$

является силой Лоренца. Следовательно, импульс $\vec{P}$ должен быть решением уравнения (15). С другой стороны, (8) должно удовлетворять и уравнению движения Ньютона – Лоренца:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{V}\times\vec{H}\,. \tag{16}$$

Подставляя (8) в (16) и учитывая (2), получим

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{mc}\vec{A}\times rot\,\vec{A}\,. \tag{17}$$

Используя соотношения (14) для потенциала $\vec{A}$ и его связь (8) с импульсом $\vec{P}$, получим из (17):

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{e}{mc}(\vec{A}\nabla)\vec{A} + \frac{1}{2}\frac{e}{mc}\nabla A^2 - \frac{e}{mc}(\vec{A}\nabla)\vec{A}\,.$$

Из последнего выражения следует уравнение

$$\frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{e}{mc}\nabla A^2 = 0\,,$$

или, заменяя $\vec{A}$ импульсом $\vec{P}$, получим

$$\frac{d\vec{P}}{dt}+\frac{1}{2m}\nabla P^2=0 \qquad (18)$$

Разрешая (15) и (18) относительно $d\vec{P}/dt$ и $1/2m\nabla P^2$, получим:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=e\vec{E}+\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}, \qquad (19)$$

$$\frac{1}{2m}\nabla P^2=-\left(e\vec{E}+\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}\right). \qquad (20)$$

Уравнение (19) по форме совпадает с известным из классической механики релятивистским уравнением движения заряда в электромагнитном поле, а (20) является уравнением движения в градиентной форме. Можно показать, что они являются эквивалентными. Действительно, используя соотношение векторного анализа

$$\nabla P^2=\nabla(\vec{P}\vec{P})=2(\vec{P}\nabla)\vec{P}+2\vec{P}\times rot\,\vec{P}$$

и (9), (10), (14), будем иметь:

$$\frac{1}{2m}\nabla P^2=\frac{d\vec{P}}{dt}-2e\vec{E}-2\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}.$$

Подставляя последнее выражение в (20), получим уравнение (19). Кроме того, можно убедиться, что уравнение (18) эквивалентно уравнениям (19) и (20), а из (19) следует (20).

Из вышеизложенного следует, что введение волнового импульса для электрона приводит к двойственному его описанию как частицы, имеющей траекторию, и как волны, для которой понятие траектории отсутствует.

2. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОНА

Гипотеза де Бройля о существовании волновых свойств у микрочастиц, имеющих массу покоя, подтвердилась в 1927 году в экспериментах по дифракции электронов, что и послужило началом создания волновой механики. Здесь мы покажем, что волновые свойства электрона являются следствием решений уравнений (12) и (18).

Запишем их еще раз:

$$\nabla^2\vec{P}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}=0, \qquad (21)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt}+\frac{1}{2m}\nabla P^2=0. \qquad (22)$$

Представим решение волнового уравнения (21) в виде плоской волны:

$$\vec{P}=\vec{P}_D=\vec{P}_0\exp i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t), \qquad (23)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор рассматриваемой точки, $\vec{P}_0$ - постоянный вектор-амплитуда волны, $\vec{K}_0, \omega_0$ - волновые вектор и частота, связанные соотношением

$$K_0^2=\omega_0^2/c^2. \qquad (24)$$

Найдем связь параметров волны $\vec{P}_0$, $\vec{K}_0$, ω_0 с параметрами частицы m, $\vec{v}$. Для этого, подставляя решение (23) в уравнение (22), получим:

$$i(\vec{K}_0 d\vec{r}/dt-\omega_0)\vec{P}_0\exp i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t)=$$
$$=-i\vec{K}_0/m\,\exp 2i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t),$$

где $\vec{v}=d\vec{r}/dt$. Это соотноешние будет удовлетворяться, если положить:

$$\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t=0, \qquad (25)$$

$$\vec{P}_0(\vec{K}_0\vec{v}-\omega_0)=-P_0^2/m\vec{K}_0. \qquad (26)$$

Из (23-26) будем иметь

$$\vec{P}_D=\vec{P}_0=mc(1-\vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)\vec{n}_0, \qquad (27)$$

где $\vec{n}_0=\vec{K}_0/K_0$ - единичный вектор, определяющий направление распространения волны. Соотношение (27) дает связь параметров плоской волны с параметрами частицы. Умножая (27) на $c\vec{n}_0$, получим

$$cP_D=mc^2(1-\vec{K}_0\vec{v}/\omega_0). \qquad (28)$$

На основании (28) введем полную

$$E = mc^2 \qquad (29)$$

и доплеровскую энергии частицы

$$\mathcal{E}_D = cP_D\,. \qquad (30)$$

Найдем связь массы частицы с параметрами ее движения, воспользовавшись уравнением движения релятивистской механики:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \qquad (31)$$

где $\vec{P} = m\vec{v}$, $\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}$ - обычные импульс и сила Лоренца. Умножая (31) скалярно на $\vec{P}$, учитывая, что $\vec{v}dt = d\vec{r}$ а $\vec{F}d\vec{r} = dE$, где dE - приращение энергии, получим

$$\frac{1}{2m}dP^2 = dE. \qquad (32)$$

Так как $P^2 = m^2v^2$, то (32) приводится к уравнению

$$\frac{dm}{m} + \frac{1}{2}\frac{dv^2}{v^2} = \frac{dE}{mv^2}. \qquad (33)$$

Интегрируя (33), с учетом (29), найдем

$$\ln\left(m^2(1 - v^2/c^2)\right) = \ln C_1, \qquad (34)$$

где C_1 - постоянная, а $0 \le v^2/c^2 < 1$.

Из (34) следует:

$$m = \sqrt{\frac{C_1}{1 - v^2/c^2}}\,. \qquad (35)$$

Считаем, что при $v = 0$, $m = m_0$, где m_0 - масса покоя частицы, тогда $C_1 = m_0^2$, и из (35) получим известную зависимость массы частицы от ее скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,.$$

Волновой импульс (27) теперь можно записать в виде

$$\vec{P}_D = \frac{m_0c^2}{\omega_0}\cdot\frac{(1 - \vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{K}_0 \qquad (36)$$

где $\beta = v/c$. Размерность m_0c^2/ω_0 -эрг.сек., а это есть размерность пстоянной Планка. Введем эту постоянную как

$$\hbar = m_0c^2/\omega_0\,. \qquad (37)$$

Тогда волновой импульс $\vec{P}_D$ и энергию $\mathcal{E}_D$ электрона можно представить как

$$\vec{P}_D = \hbar\frac{(1 - \vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{K}_0\,, \qquad (38)$$

$$\mathcal{E}_D = \hbar\frac{(1 - \vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\omega_0\,. \qquad (39)$$

Выражение

$$\omega = \omega_0\frac{(1 - \vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (40)$$

в (38) и (39) есть не что иное, как доплеровское смещение комптоновской частоты $\omega_0 = m_0c^2/\hbar$ электрона - аналог оптического релятивистского эффекта Доплера, наблюдаемого неподвижным наблюдателем, когда источник волн движется относительно него со скоростью $\vec{v}$, а волна распространяется в направлении вектора $\vec{K}_0$. Поэтому на основании (38) и (39) введем волновые вектор и частоту Доплера:

$$\vec{K}_D = \frac{(1 - \vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{K}_0\,, \qquad (41)$$

$$\omega_D = \frac{(1 - \vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\omega_0\,, \qquad (42)$$

тогда волновые импульс и энергию можно представить как

$$\vec{P}_D = \hbar\vec{K}_D\,; \quad \mathcal{E}_D = \hbar\omega_D\,. \qquad (43)$$

Так как $\vec{K}_0 = \omega_0/c\,\vec{n}_0$, то из (41) и (42) получим

$$K_D^2 = \omega_D^2/c^2. \qquad (44)$$

Волновые вектор (41) и частоту (42) Доплера можно представить в виде

$$\vec{K}_D=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{m_0c^2}{\omega_0^2}\frac{\vec{K}_0\vec{v}}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}\right)\vec{K}_0\,, \qquad (45)$$

$$\omega_D=\frac{m_0c^2}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}-\frac{m_0c^2\vec{v}}{\omega_0^2\hbar\sqrt{1-\beta^2}}\vec{K}_0\,, \qquad (46)$$

где

$$\vec{K}_б=\frac{m_0\vec{v}}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}}\;;\quad \omega_б=\frac{m_0c^2}{\hbar\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (47)$$

- известные волновые вектор и частота волны до Бройля, так что обычные импульс и энергия частицы связаны соотношениями

$$\vec{P}=\hbar\vec{K}_б\;;\quad E=\hbar\omega_б\,.$$

Считая, что направления движения волны и частицы совпадают, т.е. $\vec{K}_0\parallel\vec{v}$, рассмотрим обобщенный импульс частицы $\vec{P}_{об}$:

$$\vec{P}_{об}=\vec{P}_D+\vec{P}=\frac{m_0c(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{n}_0+\frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{n}_0\,.$$

Отсюда:

$$\vec{P}_{об}=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{n}_0=\frac{\hbar\vec{K}_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \qquad (48)$$

Из (48) следует, что

$$c^2P_{об}^2=\frac{m_0^2c^4}{1-\beta^2}=E^2. \qquad (49)$$

Так как $E^2=c^2P^2+m_0^2c^4$,

то из (49) получим связь обобщенного и обычного импульсов частицы:

$$P_{об}^2=P^2+m_0^2c^2. \qquad (50)$$

В работе /1/ показано, что представление электрона плоской волной Доплера позволило получить и интерпретировать такие, известные из квантовой механики, его свойства, как нулевую энергию, магнитный момент, спин и соотношение неопределенностей для координаты и импульса.

3. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

В специальной теории относительности оптический релятивистский эффект Доплера является следствием инвариантности фазы плоской волны при преобразоаниях Лоренца для координат и времени. Вывод же этих преобразований является математической задачей и носит формальный характер. Здесь мы покажем, что возможен и другой подход к выводу преобразований Лоренца, основанный на эффекте Доплера для электрона, полученный в предыдущем пункте. Этот путь, на наш взгляд, обладает большим физическим содержанием и раскрывает природу этих преобразований. Итак, рассмотрим продольный ($\vec{K}_0\parallel\vec{v}$) эффект Доплера для электрона:

$$\omega=\omega_0\frac{(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad (51)$$

где скорость β отождествим со скоростью движения источника волны. Введем штрихованную и нештрихованную инерциальные системы отсчета. Пусть скорость движения источника волны в штрихованной (движущейся) системе отсчета равна нулю, тогда частота волнового движения электрона в этой системе $\omega_0=\omega'$, поэтому из (51) имеем:

$$\omega=\omega'\frac{(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \qquad (52)$$

Так как $\tau=2\pi/\omega$, $\tau'=2\pi/\omega'$ - периоды волны, то из (52) получим

$$\tau'=\tau\frac{(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Введем часы Доплера с темпами хода $t=\tau$, $t'=\tau'$, тогда из предыдущего выражения будем иметь:

$$t'=\frac{t-vt/c}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (53)$$

Так как $t=\vec{K}_0\vec{r}/\omega_0$, что следует из (25), то

$$\frac{vt}{c}=\frac{v}{c}\frac{\vec{K}_0\vec{r}}{\omega_0}=\frac{v}{c^2}\vec{r}\vec{n}_0,$$

где $\vec{n}_0=\vec{K}_0/K_0$. Вследствие того, что $\vec{n}_0 \parallel \vec{v}$, единичный вектор $\vec{n}_0$ можно представить как $\vec{n}_0=\vec{v}/v$, поэтому из предыдущего соотношения получим

$$vt/c=\vec{r}\vec{v}/c^2,$$

и (53) приводится к виду

$$t'=\frac{t-\vec{r}\vec{v}/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (54)$$

Соотношение (54) является релятивистским преобразованием времени от нештрихованной системы отсчета к штрихованной, движущейся относительно нее со скоростью $\vec{v}$. Его можно записать в виде

$$t'=t-\frac{1}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left(\vec{r}\vec{v}-c^2t\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\right). \qquad (55)$$

Так как $\vec{K}_0=\omega_0/c\,\vec{n}_0$, то из уравнения фронта плоской волны (25) получим

$$|\vec{r}|^2=c^2t^2,$$

или

$$S^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0. \qquad (56)$$

Для штрихованной системы отсчета будем иметь

$$S'^2=x'^2+y'^2+z'^2-c'^2t'^2=0. \qquad (57)$$

Выражения (56) и (57) являются квадратами интервалов между событиями в нештрихованной (между $\vec{r}_0=0$ и $\vec{r}$) и штрихованной (между $\vec{r}'_0=0$ и $\vec{r}'$) системах отсчета. Если два события бесконечно близки друг к другу и скорость света в обеих системах отсчета одинакова, то справедливо соотношение /2/

$$ds'^2=ds^2,$$

или

$$-dx'^2-dy'^2-dz'^2+c^2dt'^2=-dx^2-dy^2-dz^2+c^2dt^2 \qquad (58)$$

Из (58) следует следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2-c^2\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)^2=1,\\
&\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)^2-c^2\left(\frac{\partial t'}{\partial y}\right)^2=1,\\
&\left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^2-c^2\left(\frac{\partial t'}{\partial z}\right)^2=1,\\
&\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial t}\right)^2-c^2\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2=-c^2,\\
&\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial t}-c^2\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial t'}{\partial t}=0,\\
&\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial t}-c^2\frac{\partial t'}{\partial y}\frac{\partial t'}{\partial t}=0,\\
&\frac{\partial x'}{\partial z}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial y'}{\partial z}\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial t}-c^2\frac{\partial t'}{\partial z}\frac{\partial t'}{\partial t}=0.
\end{aligned} \qquad (59)$$

Представим преобразования координат по аналогии с (55) в виде

$$\begin{aligned}
x'&=x+g_1(\beta)t+g_2(\beta)(\vec{r}\vec{v}),\\
y'&=y+g_3(\beta)t+g_4(\beta)(\vec{r}\vec{v}),\\
z'&=z+g_5(\beta)t+g_6(\beta)(\vec{r}\vec{v}),
\end{aligned} \qquad (60)$$

где $g_1 - g_6$ – коэффициенты, подлежащие определению. Вычисляя из (55) и (60) производные и, подставляя их в (59), получим

$$
\begin{aligned}
&2g_2 + (g_2^2+g_4^2+g_6^2)v_x - \frac{v_x}{c^2(1-\beta^2)} = 0,\\
&2g_4 + (g_2^2+g_4^2+g_6^2)v_y - \frac{v_y}{c^2(1-\beta^2)} = 0,\\
&2g_6 + (g_2^2+g_4^2+g_6^2)v_z - \frac{v_z}{c^2(1-\beta^2)} = 0,\\
&g_1 + (g_1g_2+g_3g_4+g_5g_6)v_x + \frac{v_x}{1-\beta^2} = 0,\\
&g_3 + (g_1g_2+g_3g_4+g_5g_6)v_y + \frac{v_y}{1-\beta^2} = 0,\\
&g_5 + (g_1g_2+g_3g_4+g_5g_6)v_z + \frac{v_z}{1-\beta^2} = 0,\\
&g_1^2+g_3^2+g_5^2 - c^2\left(\frac{1}{1-\beta^2}-1\right) = 0.
\end{aligned}
\qquad (61)
$$

Введем обозначения

$$f_1 = g_2^2+g_4^2+g_6^2, \qquad (62)$$

$$f_2 = g_1g_2+g_3g_4+g_5g_6, \qquad (63)$$

тогда из (61) получим

$$
\begin{aligned}
&2g_2 + f_1 v_x - \frac{v_x}{c^2(1-\beta^2)} = 0,\\
&2g_4 + f_1 v_y - \frac{v_y}{c^2(1-\beta^2)} = 0,\\
&2g_6 + f_1 v_z - \frac{v_z}{c^2(1-\beta^2)} = 0,\\
&g_1 + f_2 v_x + \frac{v_x}{1-\beta^2} = 0,\\
&g_3 + f_2 v_y + \frac{v_y}{1-\beta^2} = 0,\\
&g_5 + f_2 v_z + \frac{v_z}{1-\beta^2} = 0,\\
&g_1^2+g_3^2+g_5^2 - c^2\left(\frac{1}{1-\beta^2}-1\right) = 0.
\end{aligned}
\qquad (64)
$$

Из 4-6 уравнений системы (64) имеем

$$
\begin{aligned}
&g_1 = -\left(f_2 v_x + \frac{v_x}{1-\beta^2}\right),\\
&g_3 = -\left(f_2 v_y + \frac{v_y}{1-\beta^2}\right),\\
&g_5 = -\left(f_2 v_z + \frac{v_z}{1-\beta^2}\right).
\end{aligned}
\qquad (65)
$$

Подставляя (65) в последнее уравнение (64), будем иметь:

$$v^2\left(f_2+1/(1-\beta^2)\right)^2 - c^2\left(1/(1-\beta^2)-1\right) = 0.$$

Решением этого уравнения является

$$f_2 = -\frac{1}{1-\beta^2} \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (66)$$

Выбирая в (66) (в выражении с корнем) знак плюс и подставляя его в (65), получим

$$
\begin{aligned}
&g_1 = -\frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}},\\
&g_3 = -\frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}},\\
&g_5 = -\frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}.
\end{aligned}
\qquad (67)
$$

Из (63), с учетом (67), будем иметь

$$g_2 v_x + g_4 v_y + g_6 v_z = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \qquad (68)$$

Введем новый параметр $g(v)$ и представим коэффициенты g_2, g_4, g_6 в виде

$$g_2 = g v_x;\; g_4 = g v_y;\; g_6 = g v_z. \qquad (69)$$

Подставляя (69) в (68), получим

$$g = \frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \qquad (70)$$

Следовательно, коэффициенты g_2, g_4, g_6 равны

$$g_2 = \frac{v_x}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \quad g_4 = \frac{v_y}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \quad g_6 = \frac{v_z}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \qquad (71)$$

Можно убедиться, что коэффициенты (67) и (71) являются решениями системы уравнений (64). Подставляя (67) и (71) в (60), будем иметь

$$x' = x + \frac{v_x}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\left(\vec{v}\vec{r} - c^2\left(1+\sqrt{1-\beta^2}\right)t\right),$$
$$y' = y + \frac{v_y}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\left(\vec{v}\vec{r} - c^2\left(1+\sqrt{1-\beta^2}\right)t\right), \qquad (72)$$
$$z' = z + \frac{v_z}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\left(\vec{v}\vec{r} - c^2\left(1+\sqrt{1-\beta^2}\right)t\right).$$

Записывая уравнения (72) в векторной форме и прибавляя к нему (54), получим

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}\left(\left(\frac{\vec{r}\vec{v}}{v^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}\right), \qquad (73)$$
$$t' = \frac{t - \vec{r}\vec{v}/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Преобразования (73) являются общими преобразованиями Лоренца, когда скорость $\vec{v}$ штрихованной системы ориентирована произвольно относительно нештрихованной. Если $\vec{v} = v\vec{i}$, то из (73) следуют известные частные преобразования Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$
$$y' = y; \quad z' = z.$$

Общие преобразования Лоренца (73) можно также получить методами Герглотца / 3 / или Меллера / 4 / из частных преобразований.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме, вместе с определением поля как источника движения зарядов, являются производящими уравнениями из которых следуют уравнения движения Ньютона-Лоренца, волновые свойства частиц с массой покоя, отличной от нуля, эффект Доплера для электрона и преобразования Лоренца специальной теории относительности. Поэтому есть основания считать, что уравнения Максвелла являются едиными уравнениями, на основе которых строится как классическая электродинамика, так и релятивистская классическая и волновая механика частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кленин Б.А. Об одном решении уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. ОИЯИ Р2-92-161, Дубна, 1992.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля."Наука", М., 1973.
3. Herglotz G. Ann. Phys., V. 36, P. 497, 1911.
4. Тоннела М. Основы электромагнетизма и теории относительности. М., ИЛ., 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 апреля 1992 года.