сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-92-161

Б.А.Кленин

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

1992

В учебниках по атомной физике и квантовой механике часто утверждается, что спин и магнитный момент электрона являются внутренними свойствами частицы, связанными с ее структурой, или что эти свойства являются квантовомеханическими, а следовательно, не имеют никакой наглядной интерпретации. Уравнение Дирака, из которого непосредственно следует спин, также ничего не говорит о его источнике. Паули утверждал, что спин - это классически необъяснимая двухкомпонентность /1/, и настаивал на том, что отсутствие конкретной физической картины является нормальным положением. Однако еще в работах Белинфанте /2/ и Гордона /3/ было показано, что ни спин, ни магнитный момент не являются внутренним свойством электрона, а связаны со структурой поля его волны. Они показали, что спин и магнитный момент электрона можно рассматривать как момент циркулирующего потока энергии и заряда в поле электронной волны.

Решениями уравнений Максвелла-Лоренца для электромагнита поля, создаваемого точечным зарядом, являются, как известно, запаздывающие потенциалы Лиенара-Вихерта. Эти решения справедливы для любой точки наблюдения, кроме точки, совпадающей с зарядом, в которой потенциалы стремятся к бесконечности, что физически абсурдно. Однако, как будет показано, решение однородного волнового уравнения для векторного потенциала в точках наблюдения, совпадающих с зарядом, конечно, и приводит к правильным физическим результатам. Поэтому есть основание считать, что векторный потенциал электромагнитного поля, создаваемого точечным зарядом, состоит из двух частей: волнового потенциала для точек наблюдения, совпадающих с зарядом, обусловленного волновым движением электрона (заряда), и потенциала Лиенара-Вихерта для точек наблюдения вне заряда, отвечающего поступательному движению электрона.

В предлагаемой работе, в рамках классической электродинамики, сделана попытка физической интерпретации нулевой энергии, магнитного момента, спина и соотношения неопределенностей для координаты и импульса электрона. Полученные решения уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме показывают, что указанные динамические свойства электрона являются следствием его осциллирующего (волнового) движения в нулевом поле плоской электромагнитной волны.

1. Решение уравнений Максвелла для электромагнитных волн

Рассмотрим уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0, \quad \operatorname{div}\vec{H}=0,\\ &\operatorname{rot}\vec{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0, \quad \operatorname{div}\vec{E}=0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - напряженности электрического и магнитного полей, C - электродинамическая постоянная, равная скорости света. Решение уравнений (1.1), как известно, можно представить в виде

$$\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \tag{1.2}$$

$$\vec{H}=\operatorname{rot}\vec{A}, \tag{1.3}$$

где $\vec{A}$ - векторный потенциал, удовлетворяющий волновому уравнению

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0, \tag{1.4}$$

при условии, что

$$\operatorname{div}\vec{A}=0. \tag{1.5}$$

Прежде чем приступить к решению уравнения (1.4), рассмотрим сначала постоянное и однородное магнитное поле. Векторный потенциал такого поля связан с его напряженностью как

$$\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{H}\times\vec{r}, \tag{1.6}$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения. Действительно:

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}(\vec{H}\times\vec{r})=\frac{1}{2}\left((\vec{r}\nabla)\vec{H}-(\vec{H}\nabla)\vec{r}+\vec{H}\operatorname{div}\vec{r}-\vec{r}\operatorname{div}\vec{H}\right)=\vec{H},$$

что согласуется с (1.3). Умножив (1.6) на e/c, где e - заряд, а c - скорость света, получим

$$\frac{e}{c}\vec{A}=\frac{1}{2}\frac{e}{c}\vec{H}\times\vec{r}. \tag{1.7}$$

Кроме того, известно, что

$$\vec{p}=m\vec{v}=-\frac{e}{c}\vec{H}\times\vec{r}, \tag{1.8}$$

где m - масса, $\vec{v}$ - скорость частицы, есть импульс частицы, удовлетворяющий уравнению движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H}.$$

Поэтому из соотношений (1.7) и (1.8) получим связь между импульсом и векторным потенциалом $\vec{A}$:

$$\vec{p}=-2\frac{e}{c}\vec{A}. \tag{1.9}$$

Покажем, что при определенных условиях связь, аналогичная (1.9):

$$\vec{P}=m\vec{V}=-2\frac{e}{c}\vec{A}, \tag{1.10}$$

где $\vec{P}$ назовем волновым импульсом, а $\vec{V}$ - волновой скоростью частицы, справедлива и для электромагнитного поля, описываемого уравнением (1.4). Для этого последнее соотношение должно удовлетворять уравнению движения Ньютона-Лоренца:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=e\vec{E}+\frac{e}{c}\vec{V}\times\vec{H}. \tag{1.11}$$

Подставляя (1.10) в уравнение (1.11) и учитывая (1.2) и (1.3), получим:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{e}{mc}\vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{A}. \tag{1.12}$$

Из векторного анализа известно, что

$$\vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{1}{2}\nabla A^2-(\vec{A}\nabla)\vec{A},$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{A}.$$

Поэтому из соотношения (1.12) имеем:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{A}}{dt}-(\vec{V}\nabla)\vec{A}\right)+\frac{e}{mc}\left(\frac{1}{2}\nabla A^2-(\vec{A}\nabla)\vec{A}\right),$$

или, с учетом (1.10), получим

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{e}{mc}(\vec{A}\nabla)\vec{A}+\frac{1}{2}\frac{e}{mc}\nabla A^2-\frac{e}{mc}(\vec{A}\nabla)\vec{A}.$$

Последнее выражение приводится к уравнению

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{e}{mc}\nabla A^2, \qquad (1.13)$$

которое является дополнительным уравнением для векторного потенциала $\vec{A}$, накладывающим ограничение на решение волнового уравнения (1.4).

Представим решение уравнения (1.4) в виде плоской волны:

$$\vec{A}=\vec{A}_0\exp i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t), \qquad (1.14)$$

где $\vec{A}_0$ - постоянный вектор - амплитуда волны, $\vec{r}$ - радиус-вектор рассматриваемой точки поля, совпадающей с зарядом, $\vec{K}_0$, ω_0 - постоянные волновые вектор и частота, которые связаны соотношением

$$K_0^2=\omega_0^2/c^2. \qquad (1.15)$$

Найдем связь параметров волны $\vec{A}_0$, $\vec{K}_0$, ω_0 с параметрами частицы e, m, $\vec{v}$. Для этого подставляя решение (1.14) волнового уравнения (1.4) в уравнение (1.13), получим

$$i\left(\vec{K}_0\frac{d\vec{r}}{dt}-\omega_0\right)\vec{A}_0\exp i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t)=$$
$$=2i\frac{eA_0^2}{mc}\vec{K}_0\exp 2i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t),$$

где $\vec{v}=d\vec{r}/dt$ - поступательная скорость частицы. Это выражение будет удовлетворяться только при условии

$$\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t=0, \qquad (1.16)$$

$$\vec{A}_0(\vec{K}_0\vec{v}-\omega_0)=2\frac{e}{mc}A_0^2\vec{K}_0. \qquad (1.17)$$

Соотношение (1.16) является уравнением фронта плоской волны, а из (1.14) и (1.17) имеем

$$\vec{A}=\vec{A}_0=-\frac{1}{2}\frac{m_0c^2}{e}\frac{(1-\vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{n}_0, \qquad (1.18)$$

где $\vec{n}_0=\vec{K}_0/K_0$ - единичный вектор - нормаль к фронту волны, а

$$m=m_0/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta=v/c$$

является релятивистской массой частицы.

Из (1.10) и (1.18) имеем

$$\vec{P}=-2\frac{e}{c}\vec{A}=m_0c\frac{(1-\vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{n}_0. \qquad (1.19)$$

Выражение (1.19) является волновым импульсом частицы на фронте плоской волны. Решением собственно волнового уравнения (1.4) с найденной амплитудой A_c является

$$\vec{A}=-\frac{1}{2}\frac{e}{r_{кл}}\frac{(1-\vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\tau}_0\exp i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t), \qquad (1.20)$$

где $r_{кл}=e^2/m_0c^2$ - известное выражение для классического радиуса электрона. При этом $\vec{\tau}_0\perp\vec{K}_0$, $div\,\vec{A}=0$ и волна является поперечной. Из последнего выражения, по аналогии с (1.19), получим

$$\vec{P}=m_0c\frac{(1-\vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\tau}_0\exp i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t) \qquad (1.21)$$

Из (1.19) и (1.21) следует, что связь (1.10) между механическим импульсом частицы и векторным потенциалом, справедливая для постоянного и однородного магнитного поля, сохраняется и для электромагнитной волны.

Так как $\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, $\vec{H}=rot\,\vec{A}$, то из (1.20) имеем

$$\vec{E}=-i\frac{m_0c\,\omega_0}{2e}\frac{(1-\vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\tau}_0\exp i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t), \qquad (1.22)$$

$$\vec{H}=-i\frac{m_0c\,\omega_0}{2e}\frac{(1-\vec{K}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{n}_0\times\vec{\tau}_0\exp i(\vec{K}_0\vec{r}-\omega_0 t).$$

Размерность m_0c^2/ω_0 - эрг.сек, а это есть размерность постоянной Планка. Введем эту постоянную как

$$\hbar=m_0c^2/\omega_0. \qquad (1.23)$$

Так как $\omega_0=2\pi c/\lambda_0$, λ_0 - длина волны, то

$$\lambda_0=2\pi\hbar/m_0c \qquad (1.24)$$

Из (1.24) следует, что для электрона λ_0 =2.43x10^{-10} см, то есть длина волны электрона равна комптоновской длине волны. С учетом (1.23) соотношения (1.22) можно представить в виде

$$\vec{E}=-\frac{i}{2}\frac{e}{r_{кв}^2}\frac{(1-\vec{k}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\tau}_0\exp i(\vec{k}_0\vec{r}-\omega_0t), \qquad (1.25)$$

$$\vec{H}=-\frac{i}{2}\frac{e}{r_{кв}^2}\frac{(1-\vec{k}_0\vec{v}/\omega_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{n}_0\times\vec{\tau}_0\exp i(\vec{k}_0\vec{r}-\omega_0t),$$

где

$$r_{кв}^2=\frac{e^2\hbar}{m_0^2c^3}=\frac{\hbar}{m_0c}r_{кл} \qquad (1.26)$$

назовем квантовым радиусом электрона. Из (1.26) следует, что

$$r_{кв}=r_{кл}/\sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}}=r_{кл}/\sqrt{\alpha}, \qquad (1.27)$$

где $\alpha=e^2/\hbar c$ - известная из квантовой механики постоянная тонкой структуры. Электромагнитное поле (1.25) будем считать нулевым полем.

Покажем, что на основе вышеизложенного можно получить и интерпретировать такие, известные из квантовой механики, свойства электрона, как его нулевая энергия, момент импульса (спин), магнитный момент и соотношение неопределенности для координаты и импульса.

2. Нулевая энергия электрона

Рассмотрим волновой импульс электрона (1.21). Согласно общим определениям скорости $\vec{V}=d\vec{R}/dt$ и импульса $\vec{P}=m\vec{V}$, получим

$$\vec{V}=\dot{\vec{R}}=c(1-\vec{k}_0\vec{v}/\omega_0)\vec{\tau}_0\exp i(\vec{k}_0\vec{r}-\omega_0t), \qquad (2.1)$$

где $\vec{R}$ - отклонение координаты электрона от его равновесного положения. Интегрируя (2.1), с учетом того, что $\vec{r}$ и t являются

независимыми переменными, найдем:

$$\vec{R}=i\frac{c}{\omega_0}(1-\vec{k}_0\vec{v}/\omega_0)\vec{\tau}_0\exp i(\vec{k}_0\vec{r}-\omega_0t)+\vec{C}_1. \qquad (2.2)$$

Постоянную интегрирования $\vec{C}_1$ определим из условия

$$\vec{R}|_{t=0}=i\frac{c}{\omega_0}(1-\vec{k}_0\vec{v}/\omega_0)\vec{\tau}_0\exp i\vec{k}_0\vec{r},$$

тогда получим, что $\vec{C}_1$=0 и, следовательно,

$$\vec{R}=i\frac{c}{\omega_0}(1-\vec{k}_0\vec{v}/\omega_0)\vec{\tau}_0\exp i(\vec{k}_0\vec{r}-\omega_0t), \qquad (2.3)$$

которое, как легко можно убедиться, является решением уравнения гармонического осциллятора

$$\ddot{\vec{R}}+\omega_0^2\vec{R}=0.$$

Пусть поступательная скорость электрона $\vec{v}$ =0, тогда, выделяя в (2.3) действительную часть, получим

$$\vec{R}=-\frac{c}{\omega_0}\vec{\tau}_0\sin(\vec{k}_0\vec{r}-\omega_0t). \qquad (2.4)$$

По определению, кинетическая и потенциальная энергии осциллятора равны

$$\mathcal{E}_к=\frac{m_0\dot{\vec{R}}^2}{2}=\frac{m_0c^2}{2}\cos^2(\vec{k}_0\vec{r}-\omega_0t), \qquad (2.5)$$

$$\mathcal{E}_п=\frac{m_0\omega_0^2\vec{R}^2}{2}=\frac{m_0c^2}{2}\sin^2(\vec{k}_0\vec{r}-\omega_0t).$$

Следовательно, из (2.5) следует, что полная энергия осциллятора равна

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_к+\mathcal{E}_п=\frac{m_0c^2}{2}.$$

Усредняя (2.5) по периоду колебаний T, будем иметь:

$$\langle\mathcal{E}_к\rangle=\langle\mathcal{E}_п\rangle=\frac{m_0c^2}{4}=\frac{1}{2}\mathcal{E}.$$

То есть средние кинетическая и потенциальная энергии осциллятора за период T равны половине полной энергии $\mathcal{E}$.

Полная энергия

$$\mathcal{E}=\frac{m_0c^2}{2}=\frac{\hbar\omega_0}{2}=-e|\vec{A}_0|,$$

где $\vec{A}_0$ - амплитуда векторного потенциала, является минимальной нулевой энергией осциллятора - электрона, колеблющегося с частотой ω_0.

в собственном нулевом электромагнитном поле. Следовательно, источником нулевой энергии электрона является его собственная электромагнитная энергия.

3. Магнитный момент и спин электрона

Из классической электродинамики известно, что векторный потенциал замкнутой системы постоянных токов на больших от нее расстояниях можно представить в виде векторного произведения:

$$\vec{A}=\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}, \tag{3.1}$$

где $\vec{m}$ - магнитный момент системы токов. Рассмотрим векторный потенциал (1.20) плоской электромагнитной волны. Пусть поступательная скорость электрона $\vec{v}$ =0, тогда значение этого потенциала на фронте волны $\vec{k}_0\vec{r}-\omega_0 t$ =0 равно

$$\vec{A}=-\frac{1}{2}\frac{e}{r_{кл}}\vec{\tau}_c. \tag{3.2}$$

Будем считать, что источником электромагнитного поля является электрон с классическим радиусом $r_{кл}$, который и представляет замкнутую систему токов. Представим на волновой поверхности точку $P(\vec{r}_{кв})$ на расстоянии квантового радиуса $r_{кв}$ (см.1.27) от центра электрона. Так как $r_{кв}\gg r_{кл}$ ($r_{кв}\approx 12 r_{кл}$), то векторный потенциал в точке P можно представить аналогично (3.1), то есть

$$\vec{A}(\vec{r}_{кв})=\frac{\vec{m}\times\vec{r}_{кв}}{r_{кв}^3}. \tag{3.3}$$

Так как векторный потенциал в любой точке на фронте волны является величиной постоянной, равной значению (3.2), то из (3.2) и (3.3) получим

$$\frac{\vec{m}\times\vec{r}_{кв}}{r_{кв}^3}=-\frac{1}{2}\frac{e}{r_{кл}}\vec{\tau}_c. \tag{3.4}$$

Введем единичные векторы $\vec{\sigma}_c=\vec{m}/m$ и $\vec{\tau}_c'=\vec{r}_{кв}/r_{кв}$, тогда выражение (3.4) можно записать как

$$m\vec{\sigma}_c\times\vec{\tau}_c'=-\frac{1}{2}r_{кв}^2\frac{e}{r_{кл}}\vec{\tau}_c. \tag{3.5}$$

Так как $\vec{\tau}_c, \vec{\tau}_c', \vec{\sigma}_c$ - единичные векторы, то согласно (3.5) они взаимно ортогональны, при этом вектор $\vec{\sigma}_c$ является нормалью к фронту волны. Умножим (3.5) векторно на $\vec{\tau}_c'$:

$$m\vec{\tau}_c'\times\vec{\sigma}_c\times\vec{\tau}_c'=-\frac{1}{2}\frac{r_{кв}^2 e}{r_{кл}}\vec{\tau}_c'\times\vec{\tau}_c. \tag{3.6}$$

Поскольку

$$\vec{\tau}_c'\times\vec{\sigma}_c\times\vec{\tau}_c'=\vec{\sigma}_c(\vec{\tau}_c'\cdot\vec{\tau}_c')-\vec{\tau}_c'(\vec{\tau}_c'\vec{\sigma}_c),$$

где $\vec{\tau}_c'\cdot\vec{\sigma}_c=0$, то из (3.6) получим

$$\vec{m}(\vec{\tau}_c'\cdot\vec{\tau}_c')=\frac{1}{2}e\,r_{кв}^2/r_{кл}\,\vec{\tau}_c\times\vec{\tau}_c'.$$

С учетом (1.26), из последнего выражения найдем, что магнитный момент электрона равен

$$|\vec{m}|=\frac{1}{2}\frac{e}{r_{кл}}\cdot\frac{e^2\hbar}{m_c^2c^3}=\frac{1}{2}\frac{e\hbar}{m_c c}.$$

С другой стороны,

$$|\vec{m}|=-r_{кв}^2|\vec{A}|=S_{кв}\frac{1}{2}\frac{e}{\pi r_{кл}}=\frac{S_{кв}I}{c},$$

где $S_{кв}=\pi r_{кв}^2$ - площадь окружности радиуса $r_{кв}$, а $I=cA/\pi=ec/2\pi r_{кл}$ - ток по контуру этой окружности. Следовательно, магнитный момент электрона можно интерпретировать как магнитный момент тока, циркулирующего по контуру окружности радиуса $r_{кв}$.

Покажем, что собственный момент импульса - спин электрона, является следствием его кругового движения на волновой поверхности электромагнитной волны. Ясно, что такое движение электрона возможно только в электромагнитном поле с круговой поляризацией. Этим свойством обладает любая плоская электромагнитная волна /4/ с комплексной амплитудой, в том числе и поле (1.25). Компоненты E_x, E_y электрического и H_x, H_y магнитного полей (1.25) при фиксированном $\vec r$ являются гармоническими функциями t и сдвинуты по фазе на угол $\pi/2$. Так как электрическое поле ускоряет электрон, а магнитное изменяет направление его движения, то электрон совершает круговое движение с частотой ω_c. Момент силы $\vec M$, действующий на электрон, равен

$$\vec M = \vec R_o \times \vec F = \vec R_o \times e\vec E + \vec R_o \times \frac{e}{c}(\vec v_c \times \vec H), \qquad (3.7)$$

где $\vec R_o$ - радиус-вектор кругового установившегося движения электрона, а $\vec v_o$ - его линейная скорость, лежащие на волновой поверхности электромагнитной волны. Усредним выражение (3.7) по периоду T. Так как вектор $\vec v_c \times \vec H$ направлен по нормали к волновой поверхности, то вектор $\vec R_o \times \vec v_o \times \vec H$ совпадает с направлением $-\vec v_c$. Вследствие того, что компоненты $\vec v_c$ являются гармоническими функциями t, то среднее по T от второго члена в правой части (3.7) равно нулю. Поэтому из (3.7) имеем:

$$\vec M = \vec R_o \times e\vec E. \qquad (3.8)$$

Умножая (3.8) на ω_o и, учитывая, что $\omega_c \vec R_o \times \vec E = \vec K_o/K_o(\vec v_c \cdot \vec E)$, где $\vec K_o$ - волновой вектор, направленный по нормали к волновой поверхности, найдем:

$$\langle \vec M \rangle = \left\langle \frac{d\vec S}{dt} \right\rangle = \vec K_o/K_o \frac{\langle e \vec v_c \vec E \rangle}{\omega_c} = \vec K_o/K_o \frac{\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle}{\omega_c},$$

где $\vec S$ - момент импульса, $\mathcal{E}$ - полная энергия электрона. Так как минимальной энергией электрона является нулевая энергия $\mathcal{E} = \hbar\omega_o/2$, то из последнего выражения будем иметь:

$$\vec S = \vec K_o/K_o \frac{\hbar}{2}, \qquad (3.9)$$

$$|\vec S| = \frac{\hbar}{2}. \qquad (3.10)$$

Соотношения (3.9) и (3.10) определяют собственный момент импульса, или спин электрона, обусловленный его круговым движением на волновой поверхности электромагнитной волны с круговой поляризацией.

4. Соотношение неопределенностей

Так как плоская волна может иметь любое направление $\vec K_c$, то, усредняя (1.21) и (2.3) по углу между векторами $\vec K_c$ и $\vec r$, где $\vec r$ имеет фиксированное направление, и, выделяя действительную часть, получим

$$\vec R = -c/\omega_c \vec \ell_c \sin(\vec K_o \vec r - \omega_o t), \qquad (4.1)$$

$$\vec P = m_o c/\sqrt{1-\beta^2}\, \vec \ell_c \cos(\vec K_o \vec r - \omega_o t). \qquad (4.2)$$

Определим средние квадратичные отклонения периодических функций (4.1) и (4.2) от их средних значений как

$$(\Delta \vec R)^2 = \langle \vec R^2 \rangle - \langle \vec R \rangle^2, \qquad (4.3)$$

$$(\Delta \vec P)^2 = \langle \vec P^2 \rangle - \langle \vec P \rangle^2, \qquad (4.4)$$

где символ $\langle\ \rangle$ означает усреднение по времени t. Из (4.1) и (4.2) следует, что $\langle \vec R \rangle^2$ и $\langle \vec P \rangle^2$ равны нулю, а

$$\langle \vec P^2 \rangle = \frac{1}{2}\frac{m_o^2 c^2}{1-\beta^2}, \qquad (4.5)$$

$$\langle \vec R^2 \rangle = \frac{1}{2}\frac{c^2}{\omega_o^2}.$$

Поэтому из (4.3) и (4.4), с учетом (4.5), найдем:

$$(\Delta \vec R)^2 (\Delta \vec P)^2 = \frac{1}{4}\frac{m_o^2 c^4}{\omega_c^2} \cdot \frac{1}{1-\beta^2}.$$

Так как $\omega_o^2 = m_o^2 c^4/\hbar^2$, то из последнего выражения имеем

$$\Delta \vec R\, \Delta \vec P = \frac{\hbar}{2\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (4.6)$$

Если скорость поступательного движения $\beta = 0$, то из (4.6) получим

$$\Delta \vec R\, \Delta \vec P = \frac{\hbar}{2}.$$

При $\beta \geqslant 0$ будем иметь:

$$\Delta \vec R\, \Delta \vec P \geqslant \frac{\hbar}{2}. \qquad (4.7)$$

Выражение (4.7) является соотношением неопределенностей для координаты и волнового импульса частицы на волновой поверхности плоской электромагнитной волны. Если электрон действительно осциллирует (дрожит), то отсутствие у него классической траектории можно объяснить суперпозицией волнового и поступательного движений электрона, что и является источником соотношения неопределенностей, открытого Гейзенбергом.

5. Заключение

В рамках классической электродинамики получены такие, известные из квантовой механики, фундаментальные характеристики электрона, как его нулевая энергия, собственный момент импульса, магнитный момент и соотношение неопределенностей для координаты и импульса. Дана физическая интерпретация этих понятий. Показано, что источником этих свойств являются нулевые колебания электрона в собственном нулевом электромагнитном поле.

Литература

1. Jammer M. The Concepptual Development of Quantum Mechanics - New York: McGraw-Hill, 1966.
2. Belinfante F.J. - Physica, 1939, v.6, p.887.
3. Gordon W. - Z.Phys., 1928, v.50, p.630.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Наука, М., 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 апреля 1992 года.

Кленин Б.А. P2-92-161
Об одном решении уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме

В рамках классических электродинамики и механики получены такие, известные из квантовой механики, фундаментальные свойства электрона, как его нулевая энергия, спин, магнитный момент и соотношение неопределенностей для координаты и импульса. Дана физическая интерпретация этих свойств и показано, что их происхождение обусловлено нулевыми колебаниями электрона в электромагнитном поле вакуума.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод автора

Klenin B.A. P2-92-161
On a Solution of Maxwell Equaitons for Electromagnetic Field in Vacuum

In the frame of classical electrodynamics and mechanics such fundamental electron properties, known from quantum mechanics, as its zero energy, spin, magnetic moment and correlation of uncertainties for a coordinate and momentum are received. A physical interpretation of these properties given and it is shown that their origin is caused by zero electron oscillations in the electromagnetic field of vacuum.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Reactions, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992