сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-92-117

Р.М.Ямалеев

КВАНТОВАЯ МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛЯТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ ЧИСЕЛ

1992

ВВЕДЕНИЕ

Модель одномерного осциллятора интересна не только как одна из первых моделей квантовой механики, она широко используется в современной теоретической и математической физике. Поэтому любое содержательное обобщение модели квантового осциллятора может иметь далеко идущие следствия. Базисными понятиями квантового осциллятора являются операторы рождения и уничтожения. Эти операторы действуют в дискретном гильбертовом пространстве, базисным векторам которого соответствует ряд натуральных чисел [1].

В квантовой теории поля используются два типа осциллятора — бозонный и фермионный. Квантованное бозонное поле есть бесконечномерный бозонный, а фермионное поле — фермионный осциллятор [2].

Для заряженного поля оператор заряда дает целочисленный спектр, кратный заряду электрона, тогда как для описания заряда кварков необходимо принять за единицу заряда одну третью часть заряда электрона или предположить существование иного математического формализма. В качестве такого формализма мы выдвигаем так называемую модель полилинейного осциллятора [3—5]. В [4] были введены порождающие операторы, сдвигающие заданное состояние на нецелое число. Такие операторы реализуются в пространстве координат через операцию дробного дифференцирования и не имеют матричного представления. В настоящей работе мы вводим порождающие операторы, действующие в пространстве рациональных квантовых чисел. Основная идея работы состоит в том, что рациональному числу k/n ставится в соответствие диагональная матрица $n\times n$ с $n-k$ нулями и k единицами. В этом представлении дробные порождающие операторы выражаются матрицами порядка n от бозонных операторов рождения или уничтожения. Предлагаемая модель имеет ряд замечательных свойств. Факторизация бозонного оператора рождения на дробные порождающие операторы превращает бозонный осциллятор в осциллятор с расширенной суперсимметрией. Этот же формализм может быть применен для получения уравнений движения частиц со спином.

1. МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛЯТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ И ПОЛУЦЕЛЫХ КВАНТОВЫХ ЧИСЕЛ

Операторы рождения a^+ и уничтожения a бозонного осциллятора сдвигают квантовое число на единицу. Как показано в [4], операторы a^+, a в

дробной степени q сдвигают квантовое число на q. Пользуясь определением (П.1) (см. приложение), положим

$$a^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

Как видно, оператор $a^{1/2}$ действует в расслоенном пространстве функции состояния бозонного осциллятора:

$$a^{1/2}\Phi_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ n^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Сравним эту формулу с аналогичной формулой из [4] (с.7, (13)):

$$a^{1/2}\Phi_n = \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-1/2)}\right)^{1/2}\Phi_{n-\frac{1}{2}}. \qquad (1.3)$$

Согласно (П.5) имеем следующее соответствие:

$$\left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-1/2)}\right)^{1/2} \backsim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ n^{1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Рациональное число $1/2$ соответствует вектору

$$q = 1/2 \backsim \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\Phi_{n-\frac{1}{2}} \backsim \Phi_{n-\vec{q}} = \begin{pmatrix} \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix}. \qquad (1.4)$$

Бозонный осциллятор состоит из суммы двух коммутирующих мономов:

$$\mathfrak{N}_1 = a^+a,\quad \mathfrak{N}_2 = aa^+,\quad H_B = \frac{1}{2}(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2). \qquad (1.5)$$

Мономы $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ имеют целочисленные спектры $\mathfrak{N}_1 = n$, $\mathfrak{N}_2 = n+1, n = 0,1,2,\ldots$ С введением нового оператора $a^{1/2}$ появляется возможность построения еще одного монома, коммутирующего с $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$:

$$\mathfrak{N}_3 = a^{1/2}a^+a^{1/2}.$$

Поэтому оператор Гамильтона мы определим как оператор, состоящий из трех слагаемых:

$$H = \frac{1}{3}(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3). \qquad (1.6)$$

Принимая во внимание определение (1.1) и известное соотношение $[a, a^+] = 1$, представим H в следующей форме:

$$H = \begin{pmatrix} H_B & 0 \\ 0 & H_B \end{pmatrix} + \frac{1}{3} H_F, \quad H_F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Первое слагаемое этой суммы есть гамильтониан бозонного осциллятора, второе слагаемое пропорционально гамильтониану фермионного осциллятора. Множитель перед H_F в (1.7) не позволяет идентифицировать H с гамильтонианом суперсимметричного осциллятора. Однако, если определить гамильтониан, равный моному $\mathfrak{N}_3$, следующим образом:

$$H_{SUSY} = \mathfrak{N}_3 = a^{1/2} a^+ a^{1/2}, \tag{1.8}$$

то нетрудно проверить, что он совпадает с суперсимметричным гамильтонианом осциллятора [9]. Очевидно, с тем же успехом мы можем положить

$$H_{SUSY} = (a^+)^{1/2} a (a^+)^{1/2}. \tag{1.9}$$

Это приведет лишь к изменению знака перед H_F. Раскрывая оператор в координатном пространстве, получим

$$H_{SUSY} = \frac{1}{2} (p^2 + x^2) \pm S_z, \tag{1.10}$$

где $S_z = \frac{1}{2} \sigma_z$ — оператор спина 1/2.

2. МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛЯТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ ЧИСЕЛ

Как показано в [4], операторы $(a^+)^q$, a^q, где $q < 1$, сдвигают квантовое число на q. Правила действия этих операторов на состояние с нецелым квантовым числом определяются формулами:

$$a^q \Phi_p = \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-q)} \right)^{1/2} \Phi_{p-q}, \tag{2.1}$$

$$(a^+)^q \Phi_p = \left(\frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(p+1)} \right)^{1/2} \Phi_{p+q}. \tag{2.2}$$

Здесь порождающие операторы в дробной степени определены с помощью операции дробного дифференцирования:

$$a^q = 2^{-q/2} \exp(-x^2/2)\, \mathfrak{D}^q \exp(x^2/2),$$

$$(a^+)^q = 2^{-q/2} \exp(x^2/2)\, \mathfrak{D}^q \exp(-x^2/2). \tag{2.3}$$

Внешняя форма этих формул претерпевает существенное изменение, если пользоваться матричным представлением степенной функции от рационального показателя. Однако формулы (2.1) — (2.3) находятся в соответствии с матричной формулировкой. Пусть N — произвольное натуральное число. Определим $a^{1/N}$ как матрицу вида (П.1)

$$(a^{1/N})_{ij} = a^{q_i} \delta_{i,j+1}, \tag{2.4}$$

где $q_i = 0$ для $i < N$ и $q_N = 1$. Определим вектор $\Phi_{n,i}$, $i = 1,2,\ldots, N$, все компоненты которого равны φ_n:

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$a^{1/N} \Phi_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ n^{1/2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Эта формула согласуется с (2.1). Более того, мы имеем следующее определение:

$$\Phi_{n-1/N} = \begin{pmatrix} \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Ясно, как оно обобщается на случай рационального числа $n - k/N$, $k < N$:

$$\Phi_{n-k/N} = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \varphi_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{n-1} \end{matrix}\right\} k \\ \left.\begin{matrix} \varphi_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n \end{matrix}\right\} N-k \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Вводя оператор $a^{1/N}$, мы можем определить помимо $\mathfrak{N}_1 = a^+a$ и $\mathfrak{N}_{N+1} = aa^+$ еще мономы вида

$$\mathfrak{N}_{k+1} = a^{k/N}a^+a^{1-k/N}, \; k = 1,\ldots,N-1, \tag{2.8}$$

коммутирующие с $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_{N+1}$.

При этом мономы $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_{N+1}$ определяют гамильтониан бозонного осциллятора (1.5), а сумма мономов из (2.8) приводит к модели осциллятора с расширенной суперсимметрией:

$$H_{SUSY} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} a^{k/N}a^+a^{1-k/N}. \tag{2.9}$$

После несложных преобразований правая часть (2.9) может быть представлена как сумма двух операторов:

$$H_{SUSY} = H_B + H_F(s)/(N-1), \tag{2.10}$$

$H_F(s)$ — диагональная матрица $N\times N$ с элементами, равными $2s+1$, где для нечетных N $s = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots (N-1)/2$ и для четных N $s = \pm 1/2, \pm 3/2,\ldots, N/2$. Следовательно, $H_F(s)$ совпадает с z-компонентой оператора спина s:

$$H_F(s) = S_z. \tag{2.11}$$

3. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С РАСШИРЕННОЙ СУПЕРСИММЕТРИЕЙ

Чтобы придать уравнению Шредингера суперсимметричный вид, необходимо выделить нормированную волновую функцию основного состояния [9,10]:

$$\Psi_o = \exp(-U(x)/2). \tag{3.1}$$

Зная функцию $U(x)$, можно построить генераторы

$$Q = p - iU'(x)/2, \; \overline{Q} = p + iU'(x)/2. \tag{3.2}$$

Используя соотношения

$$\{\sigma^-, \sigma^+\} = 1, \; [\sigma^+, \sigma^-] = \sigma_z$$

и определение

$$H = \frac{1}{2}(Q\overline{Q} + \overline{Q}Q),$$

находим суперсимметричный гамильтониан в следующем виде:

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{U'^2(x)}{2}\right) + \frac{U''(x)}{2}S_z, \quad S_z = \frac{1}{2}\sigma_z. \tag{3.3}$$

Введем для краткости обозначение

$$P_{\mp} = p \mp iU'(x)/2,$$

и преобразуем (3.3) к виду

$$H = \frac{1}{2}P_-^{1/2}P_+P_-^{1/2}, \tag{3.4}$$

где

$$P_-^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_- & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $P_\pm^{1/2}$ можно представить по аналогии с (2.3) в виде

$$P_\pm^{1/2} = -i\Psi_0^{\mp 1}\mathfrak{D}^{1/2}\Psi_0^{\pm 1}. \tag{3.5}$$

Представление суперсимметричного гамильтониана в виде (3.4) имеет естественное обобщение на случай других рациональных степеней. Продолжая логику предыдущего раздела, в общем случае определим гамильтониан как полином вида

$$H = \frac{1}{2(N-1)}\sum_{k=1}^{N-1} P_-^{k/N}P_+P_-^{1-k/N}. \tag{3.6}$$

Раскроем этот оператор с учетом определения (П.1). После несложных преобразований получим

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{U'^2(x)}{2}\right) + \frac{U''(x)}{2(N-1)}S_z, \tag{3.7}$$

здесь S_z — диагональный спиновый оператор для спина s, который равен $(N-1)/2$ для нечетного N и $s = N/2$ для четного N. Таким образом, с помощью определения (3.6) мы расширили (3.3) на случай более высоких значений спина.

В заключение этого раздела приведем еще одно возможное применение формулы (П.1). Мы убедились в том, что обобщение (3.4) на случай других дробных показателей привело к замене в (3.3) оператора спина $s = 1/2$ на $s > 1/2$. Этот способ может быть применен для получения уравнения для частиц со спином $s > 1/2$. Простоты ради мы ограничимся нерелятивистским двумерным случаем. Обозначим

$$\pi_\pm = p_x \pm ip_y.$$

Запишем гамильтониан Шредингера

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2)$$

в виде

$$H(s=\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}\pi_-^{1/2}\pi_+\pi_-^{1/2} \tag{3.8}$$

в присутствии электромагнитного поля:

$$P_k = p_k - \frac{e}{c}A_k,\ \ k = x,\ y. \tag{3.9}$$

Если раскрыть (3.8) после замены (3.9), получим

$$H(s=\tfrac{1}{2}) = H + \mu_2 S_z \mathcal{H}_z, \tag{3.10}$$

что совпадает с оператором Гамильтона для частицы со спином $s = 1/2$. Представление (3.8) на случай $s \ge 1/2$ имеет очевидное обобщение. По аналогии с (3.6) запишем

$$H(s \ge \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{(2N-1)}\sum_{k=1}^{N-1}\pi_-^{k/N}\pi_+\pi_-^{1-k/N},$$

здесь, как и в (2.4) под символом $\pi_-^{1/N}$ подразумевается матрица ($N\times N$) вида

$$(\pi_-^{1/N})_{ij} = \pi_-^{q_i}\delta_{i,j+1}$$

$q_i = 0$ для $i < N$ и $q_N = 1$. Раскрывая правую часть (3.11), получим

$$H(s) = H_o + \mu_N S_z \mathcal{H}_z,$$

где

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{mc(N-1)} = \frac{e\hbar}{2smc}$$

— соответствует величине гиромагнитного отношения, S_z — диагональная компонента оператора спина s.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Матричное представление степенной функции от рационального показателя. Операция дробного дифференцирования

Как показано в [7,8], моном k-й степени $P(x) = x^k$ может быть представлен как n-я степень ($n > k$) матрицы ($n\times n$):

$$(\hat{X})_{ij} = x^{q_i}\delta_{i,j+1}, \tag{П.1}$$

где q_i, $i = 1,\dots,n$, — компоненты вектора $\vec{q}(\overbrace{0,\dots,0}^{n-k}\ \overbrace{1,\dots,1}^{k})$. Таким образом, $\hat{X}^n = x^k I$, где I — единичная матрица. С другой стороны, $(x^{k/n})^n = x^k$. Следовательно, матрица $\hat{X}$ здесь выполняет функцию $x^{k/n}$, или, другими словами, дает матричное представление монома в рациональной степени. Существует однозначное соответствие между вектором $\vec{q}$ и числом k/n. Действительно, в n-ичном исчислении в соответствующем разряде число k/n состоит из k единиц и $n-k$ нулей. В этом представлении x^{q_i} есть вектор с компонентами $(\overbrace{x^0,\dots,x^0}^{n-k},\overbrace{x,\dots,x}^{k})$. Умножая x^{q_i} на $\delta_{i,j+1}$, получим матрицу $(\hat{X})_{ij} = (\hat{x^q})_{ij} = x^{q_i}\delta_{i,j+1}$. Таким образом, переход от рациональной степенной функции $x^{k/n}$ к матрице $\hat{x^q}$ есть следствие представления числа $q = k/n$ как вектора $\vec{q}$. В равной степени мы будем пользоваться и представлением числа k/n диагональной матрицей

$$(\hat{q})_{ij} = q^i\delta_{ij}. \tag{П.2}$$

Теперь мы можем переопределить функции и операторы, тесно связанные со степенной функцией с дробным показателем. В качестве первого примера рассмотрим гамма-функцию от $p = m + k/n$. В обычном определении эта функция есть

$$\Gamma(p) = \int_o^\infty e^{-t}t^p dt. \tag{П.3}$$

Определяя t^p как матрицу

$$(t^p)_{ij} = t^m t^{q_i}\delta_{i,j+1},$$

получим

$$(\hat{\Gamma}(m+q))_{ij} = (m+q_i)!\delta_{i,j+1}. \tag{П.4}$$

Приведем еще два последних соотношения:

$$\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-q)}\right)_{ij} = m^{q_i}\delta_{i,j+1}, \tag{П.5}$$

$$\left(\frac{\Gamma(p+q+1)}{\Gamma(p+1)}\right)_{ij} = (m+1)^{q_i}\delta_{i,j+1}. \tag{П.6}$$

Таким же способом мы переопределяем оператор дробного дифференцирования. Оператору $\mathfrak{D}^{k/n}(\mathfrak{D} = \partial/\partial x)$ соответствует матрица

$$(\mathfrak{D}^q)_{ij} = \mathfrak{D}^{q_i}\delta_{i,j+1}. \tag{П.7}$$

Интересно сравнить результаты действия матричного дифференцирования с таблицей дробных производных для некоторых элементарных функций (см., напр., [6]):

$$(\mathfrak{D}^q\sin x)_{ij} = \sin(x + q_i\frac{\pi}{2})\delta_{i,j+1}.$$

$$(\mathfrak{D}^{q} \cos x)_{ij} = \cos \left(x + q_i \frac{\pi}{2}\right) \delta_{i,j+1},$$

$$(\mathfrak{D}^{q} a^{bx})_{ij} = a^{bx}(p \ln x)^{q_i} \delta_{i,j+1}.$$

Приведем еще одну полезную формулу

$$\mathfrak{D}^{q+m}(xZ) = x\, \mathfrak{D}^{q+m}Z + (\hat{q} + m)\, \mathfrak{D}^{q+m-1}Z. \tag{П.8}$$

Дробное интегрирование естественно определить как операцию, обратную (П.7) . Имеем

$$\mathfrak{D}^{-q_i} \delta_{i+1,j} = (\mathfrak{D}^{-q})_{ij},$$

$$\mathfrak{D}^{-1} = \int \ldots dx, \quad \mathfrak{D}^{0} = 1. \tag{П.9}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В.А. — Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976.
2. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
3. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ, Р2-88-147, Дубна, 1988.
4. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ, Р2-88-871, Дубна, 1988.
5. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ, Р2-92-66, Дубна, 1992.
6. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ, 5-11458, Дубна, 1978.
7. Fleury N., Raush de Traubenberg M., Yamaleev R.M. — Preprint CRN/PHTH 92-07, 1992, Strasbourg.
8. Ямалеев Р.М. — Сообщение ОИЯИ, Р5-86-250, Дубна, 1986; Р5-86-833, Дубна, 1986.
9. Witten E. — Nucl. Phys., 1981, vol.B188, p.513.
10. Haymaker R.W., Rau A.R.R. — Amer.J.Phys., 1988, vol.54, No.10, p.928.

Ямалеев Р.М.

Р2-92-117

Квантовая модель осциллятора в пространстве рациональных квантовых чисел

Предложена квантовая модель осциллятора с порождающими операторами, сдвигающими квантовое число заданного состояния на рациональное число $q = k/n$. Показано, что при $q = 1/2$ получается известная модель суперсимметричного осциллятора, а при $q < 1/2$ — модель осциллятора с расширенной суперсимметрией. Даны регулярные способы получения уравнения движения частиц с высшими спинами и уравнения квантовой механики с расширенной суперсимметрией. Определены операторы дифференцирования и интегрирования в рациональной кратности.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод автора

Yamaleev R.M.

P2-92-117

Quantum Model of Oscillator in the Space of Rational Quantum Numbers

A quantum model of an oscillator with generators capable to exchange the quantum number of the given state on the rational value $q = k/n$ is suggested. It is proved, in the case $q = 1/2$ the model coincides with the known model of a supersymmetric oscillator and for $q < 1/2$ one gives the model of an oscillator with extended supersymmetry. The regular methods of receipt of the equations of motion for higher spin particles and quantum mechanics equations with extended supersymmetry are given. The rational degree of differential and integral operators is defined.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992