92-108

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-92-108

Н.А.Черников

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

1992

Творец неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевский, двухсотлетнюю годовщину дня рождения которого празднует в этом году ученый мир, рассматривал геометрию не только в чисто логическом плане. Он поставил две совершенно новые проблемы: об астрономической проверке геометрии видимого мира и об исследовании той перемены, которая произойдет от введения неевклидовой геометрии в механику [1, с. 209, 261]. В сочинении [2] Лобачевский поставил вопрос о введении неевклидовой геометрии в теорию тяготения. Он справедливо считал, что силы тяготения слабеют от распространения своего действия по сфере, вследствие чего оказываются обратно пропорциональными площади сферы. Установив, как эта площадь зависит от радиуса сферы в неевклидовом пространстве, он внес существенно новое выражение в ньютоновский закон всемирного тяготения. Лобачевский прозорливо полагал:

"...в том однако ж нельзя сомневаться, что силы всё производят одни: движение, скорость, время, массу даже расстояния и углы ... когда верно, что силы зависят от расстояния, то линии могут быть также в зависимости с углами."[2, с. 159].

Вопрос о механике тел, движущихся в пространстве Лобачевского, рассмотрен в обзоре [3]. Там доказано, что при введении геометрии Лобачевского в видимый мир сохраняется принцип кинематической относительности, но теряет свою силу специальный принцип относительности. Последнее означает, что введение по Ньютону абсолютно покоящегося пространства при ньютоновом же условии абсолютности времени эквивалентно отрицанию евклидова постулата о параллельных прямых линиях в видимом нами мире.

Лобачевский, как это показано в работе [4], фактически нашел фундаментальное решение уравнения Пуассона в неевклидовом пространстве. Будем считать, что притягивающий центр в пространстве Лобачевского абсолютно покоится. Для наглядности назовем его Солнцем, а тело, притягиваемое центром, - кометой или планетой. Массу Солнца обозначим M.

Масса притягиваемого тела считается ничтожно малой по сравнению с массой Солнца и в уравнение Пуассона не входит. В это уравнение входит единственный параметр, равный $\mu = \gamma M$, где γ - константа Ньютона.

Пока идет речь об уравнении Пуассона, подразумевается случай нерелятивистский. Идею же Лобачевского о введении неевклидовой геометрии в теорию тяготения в релятивистском случае применил А.А. Фридман [5, с. 447], построив модель нестационарной Вселенной. Однако, это сделано им не в том плане, который был задуман Лобачевским и который реализован здесь по аналогии с нерелятивистским случаем.

1. ВВЕДЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Геометрия Лобачевского вполне задается метрикой

$$d\,l^2 = L_{\alpha\beta}\, d\,x^\alpha\, d\,x^\beta \,, \tag{1}$$

в сферических координатах ρ, θ, φ принимающей следующий вид:

$$d\,l^2 = d\,\rho^2 + r^2\,(d\,\theta^2 + \sin^2\theta\, d\,\varphi^2)\,, \tag{2}$$

где

$$r = k\, sh\, \frac{\rho}{k}\,. \tag{3}$$

Прямые линии в пространстве Лобачевского являются геодезическими относительно аффинной связности Кристоффеля [6, с. 159] с компонентами

$$L^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, L^{\alpha\sigma}\,(\partial_\mu L_{\sigma\nu} + \partial_\nu L_{\sigma\nu} - \partial_\sigma L_{\mu\nu})\,, \tag{4}$$

где $L^{\alpha\sigma}$ - кометрический тензор, определяемый через метрический тензор $L_{\sigma\beta}$ и единичный аффинор δ^α_β [6, с. 38] из условия

$$L^{\alpha\sigma}\, L_{\sigma\beta} = \delta^\alpha_\beta\,, \tag{5}$$

∂_μ означает частную производную по координате x^μ. Геодезические же линии [6, с. 144] определяются в результате решения системы уравнений

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\,l^2} + L^{\alpha}_{\mu\nu}\,\frac{d\,x^\mu}{d\,l}\,\frac{d\,x^\nu}{d\,l} = 0\,. \tag{6}$$

В сферических координатах

$$L^1_{22} = -k\, sh\,\frac{\rho}{k}\, ch\,\frac{\rho}{k}\,, \qquad L^1_{33} = L^1_{22}\,\sin^2\theta\,,$$

$$L^2_{12} = k^{-1}\, cth\,\frac{\rho}{k} = L^2_{21}\,, \qquad L^2_{33} = -\sin\theta\,\cos\theta\,, \tag{7}$$

$$L^3_{13} = k^{-1}\, cth\,\frac{\rho}{k} = L^3_{31}\,, \qquad L^3_{23} = ctg\,\theta = L^3_{32}\,,$$

а остальные компоненты этой связности равны нулю.

Интересно, что компоненты (4) хранят память о метрике (1), так как составленный из них тензор

$$L^\alpha_{\mu\nu\beta} = \partial_\mu L^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu L^\alpha_{\mu\beta} + L^\alpha_{\mu\sigma} L^\sigma_{\nu\beta} - L^\alpha_{\nu\sigma} L^\sigma_{\mu\beta} \tag{8}$$

оказывается равным

$$L^\alpha_{\mu\nu\beta} = (L_{\mu\beta}\,\delta^\alpha_\nu - L_{\nu\beta}\,\delta^\alpha_\mu)\, k^{-2}\,, \tag{9}$$

а следовательно,

$$L_{\mu\beta} = \frac{1}{2}\, k^2\, L^\alpha_{\mu\alpha\beta}\,. \tag{10}$$

Это нетривиально, так как в пределе

$$k \longrightarrow \infty \tag{11}$$

компоненты (4) эту память теряют и о предельной метрике

$$E_{\alpha\beta}\, d\,x^\alpha\, d\,x^\beta = \lim_{k\to\infty} L_{\alpha\beta}\, d\,x^\alpha\, d\,x^\beta \tag{12}$$

многого не помнят.

В этом случае составленный аналогично (8) из предельной связности

$$E^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, E^{\alpha\sigma}\,(\partial_\mu E_{\sigma\nu} + \partial_\nu E_{\sigma\mu} - \partial_\sigma E_{\mu\nu}) \tag{13}$$

тензор

$$E^\alpha_{\mu\nu\beta} = \partial_\mu E^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu E^\alpha_{\mu\beta} + E^\alpha_{\mu\sigma} E^\sigma_{\nu\beta} - E^\alpha_{\nu\sigma} E^\sigma_{\mu\beta} \tag{14}$$

равняется нулю и, следовательно, найдутся такие координаты y, через которые связность (13) представится в виде

$$E^\alpha_{\mu\nu} = \frac{\partial\, x^\alpha}{\partial\, y^\sigma}\,\frac{\partial^2 y^\sigma}{\partial\, x^\mu\,\partial\, x^\nu}\,. \tag{15}$$

В такой карте компоненты метрического тензора $E_{\alpha\beta}$ не зависят от координат, и это всё, что можно сказать о метрике (12), если известны только компоненты связности (13) с нулевым тензором (14).

К этому можно добавить, что метрика (12)' задает геометрию Евклида [6, с. 48], так как в сферических координатах она принимает вид

$$E_{\alpha\beta}\, d\, x^{\alpha}\, d\, x^{\beta} = d\, \rho^2 + \rho^2\, (d\, \theta^2 + \sin^2 \theta\, d\, \varphi^2)\ . \tag{16}$$

Между тем, связность (15) инвариантна относительно аффинных подстановок

$$y^{\sigma} = A^{\sigma}_{\gamma}\, \overset{\vee}{y}{}^{\gamma} + B^{\sigma}\ , \tag{17}$$

и задает лишь аффинную геометрию [6,с. 41], а не геометрию Евклида.

2. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ

Вернемся, однако, к геометрии Лобачевского. Рассмотрим сначала нерелятивистский случай. Если на материальную точку никакие силы не действуют, то её уравнения движения в абсолютно покоящемся пространстве Лобачевского таковы:

$$\frac{d^2\, x^{\alpha}}{d\, t^2} + L^{\alpha}_{\mu\nu}\, \frac{d\, x^{\mu}}{d\, t}\, \frac{d\, x^{\nu}}{d\, t} = 0\ , \tag{18}$$

где t - абсолютное время. Если же на нее действует только сила тяготения с потенциалом U, то уравнения движения принимают следующий вид:

$$\frac{d^2\, x^{\alpha}}{d\, t^2} + L^{\alpha}_{\mu\nu}\, \frac{d\, x^{\mu}}{d\, t}\, \frac{d\, x^{\nu}}{d\, t} + L^{\alpha\nu}\, \partial_{\nu}\, U = 0\ . \tag{19}$$

Гравитационный потенциал U, удовлетворяющий уравнению Пуассона в пространстве с метрикой (2) и условию

$$\lim_{\rho \to \infty} U = 0\ , \tag{20}$$

в случае, когда масса M сосредоточена в начале координат, равен

$$U = \frac{\mu}{k}\, (1 - cth\, \frac{\rho}{k})\ . \tag{21}$$

Уравнение же Пуассона в пространстве с метрикой (2) записывается в виде

$$\Delta\, U = 4\, \pi\, \mu\, \delta\, (x)\, \delta\, (y)\, \delta\, (z)\ , \tag{22}$$

где δ - сингулярная функция Дирака с аргументами

$$x = r \sin \theta \cos \varphi\ ,\ y = r \sin \theta \sin \varphi\ ,\ z = r \cos \theta\ , \tag{23}$$

Δ - дифференциальный оператор Лапласа, равный

$$\frac{1}{r^2}\, \frac{\partial}{\partial \rho}\, r^2\, \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{1}{\sin \theta}\, \frac{\partial}{\partial \theta}\, \sin \theta\, \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta}\, \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\Big). \tag{24}$$

В сочинении [2, с. 159] Лобачевский фактически указал, что (с точностью до обозначений)

$$\frac{\partial\, U}{\partial\, \rho} = \mu\, r^{-2}, \quad \frac{\partial\, U}{\partial\, \theta} = 0\ , \quad \frac{\partial\, U}{\partial\, \varphi} = 0\ . \tag{25}$$

где r есть (3). Отсюда следует, что при условии (20) гравитационный потенциал равен (21).

Уравнения Лагранжа с производящей функцией

$$\ell = \frac{1}{2}\Big(\frac{d\, l}{d\, t}\Big)^2 + U \tag{26}$$

совпадают с уравнениями (19) и в данном случае являются уравнениями движения кометы вокруг абсолютно покоящегося Солнца в пространстве Лобачевского. В сферических координатах они принимают следующий вид:

$$\ddot{\rho} - k\, sh\, \frac{\rho}{k}\, ch\, \frac{\rho}{k}\, (\dot{\theta}\, \dot{\theta} + \sin^2 \theta\, \dot{\varphi}\, \dot{\varphi}) + \mu\, r^{-2} = 0\ ,$$

$$\ddot{\theta} + 2\, k^{-1}\, cth\, \frac{\rho}{k}\, \dot{\rho}\, \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta\, \dot{\varphi}\, \dot{\varphi} = 0\ , \tag{27}$$

$$\ddot{\varphi} + 2\, k^{-1}\, cth\, \frac{\rho}{k}\, \dot{\rho}\, \dot{\varphi} + 2\, ctg\, \theta\, \dot{\theta}\, \dot{\varphi} = 0\ ,$$

где точкой и двумя точками обозначены первые и вторые производные по абсолютному времени t.

Абсолютное время задается дифференциальной формой $\Theta = d\, t$ в пространственно-временном мире $S \times T$ с координатными картами вида $x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4 = t$. Записывая форму Θ в виде $\Theta = \theta_a\, d\, x^a$, вводим в мире $S \times T$ ковекторное поле с компонентами

$$\theta_1 = 0\ , \quad \theta_2 = 0\ , \quad \theta_3 = 0\ , \quad \theta_4 = 1 \tag{28}$$

и факторизующуюся метрику

$$\theta_{ab}\, d\, x^a\, d\, x^b = \Theta\, \Theta\ . \tag{29}$$

Определяемый ею факторизующийся метрический тензор в мире $S \times T$ равен

$$\theta_{ab} = \theta_a\, \theta_b\ . \tag{30}$$

Введем еще вырожденный кометрический тензор максимального ранга [3] с компонентами h^{ab}, равными

$$h^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta}\ , \quad h^{\alpha 4} = 0\ , \quad h^{4\beta} = 0\ , \quad h^{44} = 0\ . \tag{31}$$

Так как

$$h^{ab}\,\theta_b = 0 \quad , \tag{32}$$

то метрический и кометрический тензоры сопряжены условием

$$\theta_{as}\,h^{sb} = 0 \quad . \tag{33}$$

Уравнения движения (19) материальной точки, находящейся в поле тяжести, задают в пространственно-временном мире $S \times T$ некоторую аффинную связность $\Gamma_{mn}^{\ a}$. Действительно, их можно записать в виде уравнений геодезических

$$\frac{d^2 x^a}{d s^2} + \Gamma_{mn}^{\ a} \frac{d x^m}{d s} \frac{d x^n}{d s} = 0 \ , \tag{34}$$

введя подстановку $s = A t + B$, где A и B - постоянные. Отсюда находим

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = L_{\mu\nu}^{\alpha} \ , \quad \Gamma_{44}^{\alpha} = L^{\alpha\nu}\,\partial_\nu U \ , \qquad \Gamma_{\mu 4}^{\alpha} = 0, \quad \Gamma_{4\nu}^{\alpha} = 0, \quad \Gamma_{mn}^{4} = 0. \tag{35}$$

Следовательно, мировая траектория материальной точки, находящейся в гравитационном поле U, является геодезической линией относительно аффинной связности (35) . В частности, мировая траектория материальной точки, на которую никакие силы не действуют, является геодезической линией относительно аффинной связности с компонентами $\check{\Gamma}_{mn}^{\ a}$, равными (35) при $U = \mathrm{const}$.

Когда имеется две связности Γ и $\check{\Gamma}$, то для каждого тензорного поля составляют две ковариантные производные ∇ и $\check{\nabla}$ [6, с. 128]. Для векторного и ковекторного полей полагают

$$\nabla_m T^a = \partial_m T^a + \Gamma_{mn}^{\ a} T^n \ , \quad \nabla_m T_n = \partial_m T_n - \Gamma_{mn}^{\ a} T_a \ , \tag{36}$$
$$\check{\nabla}_m T^a = \partial_m T^a + \check{\Gamma}_{mn}^{\ a} T^n \ , \quad \check{\nabla}_m T_n = \partial_m T_n - \check{\Gamma}_{mn}^{\ a} T_a \ .$$

Интересно, что обе ковариантные производные метрического ковектора (28) и кометрического тензора (31) в данном случае равны нулю:

$$\nabla_m \theta_n = 0 \ ; \quad \check{\nabla}_m \theta_n = 0 \ ; \quad \nabla_m h^{ab} = 0 \ , \quad \check{\nabla}_m h^{ab} = 0 \ . \tag{37}$$

Разность

$$P_{mn}^{\ a} = \check{\Gamma}_{mn}^{\ a} - \Gamma_{mn}^{\ a} \tag{38}$$

является тензором, так как при переходе от одной карты x к другой карте x' компоненты $\Gamma_{mn}^{\ a}$ любой аффинной связности

переходят в новые компоненты, равные

$$\Gamma_{pq}^{\ l} \frac{\partial x^p}{\partial x'^m} \frac{\partial x^q}{\partial x'^n} \frac{\partial x'^a}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^m\,\partial x'^n} \frac{\partial x'^a}{\partial x^l} \ . \tag{39}$$

Тензор $P_{mn}^{\ a}$ называется тензором аффинной деформации [6, с. 128] . В рассматриваемом случае он равен

$$P_{mn}^{\ a} = -\,\theta_m\,\theta_n\,h^{as}\,\partial_s U \ . \tag{40}$$

Заметим, что геометрические объекты (тензоры и аффинные связности) в каждой координатной карте x мы относим к базису $d^a = d\,x^a$ и кобазису $\partial_a = \partial / \partial x^a$. При этом оказывается, что

$$\Gamma_{mn}^{\ a} = \Gamma_{nm}^{\ a} \ . \tag{41}$$

Это значит, что тензор кручения равняется нулю [6, с.125]. Всякая аффинная связность имеет свой тензор кривизны [6, с. 126], равный

$$R_{mnb}^{\ \ a} = \partial_m \Gamma_{nb}^{\ a} - \partial_n \Gamma_{mb}^{\ a} + \Gamma_{ms}^{\ a} \Gamma_{nb}^{\ s} - \Gamma_{ns}^{\ a} \Gamma_{mb}^{\ s} \ . \tag{42}$$

Очевидно, что

$$R_{mnb}^{\ \ a} + R_{nmb}^{\ \ a} = 0 \ , \tag{43}$$

а в случае (41) легко проверяется, что

$$R_{mnb}^{\ \ a} + R_{bmn}^{\ \ a} + R_{nbm}^{\ \ a} = 0 \ . \tag{44}$$

Последние два тождества являются алгебраическими. В случае (41) имеется еще и дифференциальное тождество для тензорного поля (42), а именно:

$$\nabla_k R_{mnb}^{\ \ a} + \nabla_n R_{kmb}^{\ \ a} + \nabla_m R_{nkb}^{\ \ a} = 0 \ . \tag{45}$$

Его называют тождеством Бианки - Падова [6, с. 131].

В случае (35) тензор кривизны (42) имеет следующие компоненты:

$$R_{\mu\nu\beta}^{\ \ \alpha} = L_{\mu\nu\beta}^{\ \ \alpha} \ , \quad R_{\mu\nu 4}^{\ \ \alpha} = 0 \ , \quad R_{\mu 4\beta}^{\ \ \alpha} = 0 \ , \qquad R_{\mu 44}^{\ \ \alpha} = \partial_\mu U^\alpha + L_{\mu\nu}^{\alpha} U^\nu \ , \quad R_{mnb}^{\ \ 4} = 0 \ , \tag{46}$$

где

$$U^\alpha = L^{\alpha\sigma}\,\partial_\sigma U \ . \tag{47}$$

Заметим здесь, что в рассматриваемом случае гравитационный потенциал U является скалярной функцией в пространстве Лобачевского с метрикой (1), U^α - вектором градиента $\partial_\sigma U$

в этом пространстве, $R^{\alpha}_{\mu 44}$ – ковариантной производной вектора U^{α}, порожденной связностью (4), а $R^{\alpha}_{\mu\nu\beta}$ – тензором кривизны (8) для связности (4).

Затем рассмотрим свернутый тензор кривизны

$$R_{mn} = R^{s}_{smn} . \qquad (48)$$

В случае (46) согласно (9) и (10) он равен

$$R_{\mu\nu} = -2\,k^{-2} L_{\mu\nu} , \quad R_{44} = \Delta U , \quad R_{\mu 4} = 0 , \quad R_{4\nu} = 0 , \qquad (49)$$

где Δ – дифференциальный оператор Лапласа – Бельтрами, порожденный метрикой (1). Этот оператор равен

$$\Delta = L^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu - L^{\sigma}_{\mu\nu} \partial_\sigma) . \qquad (50)$$

Иначе,

$$\Delta U = \frac{1}{\sqrt{L}} \partial_\mu (\sqrt{L}\, L^{\mu\nu} \partial_\nu U) , \qquad (51)$$

где L – определитель матрицы $(L_{\mu\nu})$. В сферических координатах оператор (50) равен (24).

Вспомним теперь о связности, которую мы обозначили $\check{\Gamma}^{a}_{mn}$. Будем называть её фоновой. Тензор кривизны $\check{R}^{a}_{mnb}$ и свернутый тензор кривизны $\check{R}_{mn}$ фоновой связности получаются из (46) и (49) при $U = const$.

Следовательно,

$$R_{mn} - \check{R}_{mn} = \theta_m \theta_n \Delta U , \qquad (52)$$

и мы можем в нерелятивистском случае написать основное гравитационное уравнение в пространстве Лобачевского в виде

$$R_{mn} - \check{R}_{mn} = 4\pi\gamma M_{mn} , \qquad (53)$$

где M_{mn} – тензор массы, равный

$$M_{mn} = \rho\, \theta_m \theta_n , \qquad (54)$$

а ρ – плотность массы в пространстве Лобачевского. Уточним, что масса, заключенная в некоторой области пространства Лобачевского, равна интегралу

$$M = \int\!\!\int\!\!\int \rho \sqrt{L}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 . \qquad (55)$$

Очевидно, уравнение (53) эквивалентно уравнению Пуассона

$$\Delta U = 4\pi\gamma\rho \qquad (56)$$

в пространстве Лобачевского.

Интересно заметить, что в уравнение (53) вошел свернутый тензор кривизны $\check{R}_{mn}$ фоновой связности $\check{\Gamma}^{a}_{mn}$. В пределе же (11), когда геометрия Лобачевского из теории гравитации выводится, уравнение (53) переходит в уравнение

$$R_{mn} = 4\pi\gamma M_{mn} , \qquad (57)$$

в котором ничто о фоновой связности не напоминает. Дело в том, что в пределе (11) свернутый тензор кривизны $\check{R}_{mn}$ равен нулю. Кстати, в этом случае равен нулю и полный тензор кривизны $\check{R}^{a}_{mn}$.

3. ПЕРЕХОД К РЕЛЯТИВИСТСКОМУ СЛУЧАЮ

Чтобы точно определить, чем отличается релятивистская теория от соответствующей теории нерелятивистской, рассмотрим мировую траекторию материальной точки. Касательную прямую к мировой траектории в некоторой мировой точке x назовем мировой скоростью частицы. В отличие от мировой траектории, касательная прямая располагается не в самом мире X, а в мире $T(x)$, касательном к X в точке x. Так как мир X является четырехмерным многообразием [6, с. 109], то мир $T(x)$ является четырехмерным центроаффинным пространством [6, с. 46], с центром в точке $x \in X$. Множество прямых такого пространства, проходящих через центр, является трехмерным проективным пространством $P(x)$ [6, с. 59]. В пространстве $P(x)$ мировые скорости материальных точек составляют трехмерную область $V(x)$, где реализуется та самая абсолютная геометрия, которая основывается на всех евклидовых постулатах, кроме пятого. Эта область называется пространством скоростей в точке $x \in X$. Расстоянием в пространстве скоростей является относительная быстрота материальных точек, мировые траектории которых пересекаются в точке x. Согласно Клейну, существуют два и только два способа выделить область $V(x)$. При одном способе пятый постулат Евклида принимается в пространстве скоростей, при другом – отвергается. В первом случае в пространстве скоростей реализуется геометрия Евклида и теория называется нерелятивистской. Во втором – в пространстве скоростей реализуется геометрия Лобачевского и теория называется релятивистской. Для пространства скоростей константа Лобачевского принимается равной скорости света c. О связи теории относительности с геометрией Лобачевского, об истории становления понятия пространства скоростей и о применении этого понятия в физике см. [7].

Проективными координатами в $P(x)$ являются дифференциалы $d x^a$ координат. Расстояние в пространстве скоростей $V(x)$ определяется на основе проективного инварианта – ангармонического отношения четырех точек, лежащих на одной проективной прямой в $P(x)$. Если мировая траектория материальной точки задана функциями

$$x^a = \Xi^a(\tau), \quad a \in \{1, 2, 3, 4\}, \tag{58}$$

некоторого параметра τ, то в качестве проективных координат мировой скорости материальной точки можно выбрать производные

$$\xi^a = \frac{d}{d\tau} \Xi^a, \quad a \in \{1, 2, 3, 4\}. \tag{59}$$

Если параметр τ равен времени, проживаемому материальной точкой, то вектор (59) называется 4-скоростью этой материальной точки.

В нерелятивистском случае область $V(x)$ задается неравенством

$$\theta_a d x^a \neq 0, \tag{60}$$

в левой части которого написана линейная дифференциальная форма Θ. Это неравенство определяет в $V(x)$ аффинную геометрию. Будем называть Θ формой времени на многообразии X, если параметр τ равен собственному времени, проживаемому материальной точкой, и если

$$\theta_a \xi^a = 1. \tag{61}$$

Однако в нерелятивистском случае нам нужно ввести в пространство скоростей геометрию Евклида, а не только аффинную геометрию. Для этого требуется добавить кометрический тензор h^{ab} в X, задающий в аффинном пространстве $V(x)$, определяемом условием (60), положительно определенную метрику. Такой тензор должен быть сопряжен с ковектором θ_a условием (32). Что до тензора времени θ_{ab}, то он представляется через ковектор времени в виде произведения (30). Всё это значит, что для всякой точки x

можно так подобрать координаты

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = t, \tag{62}$$

что в этой точке получатся следующие канонические формы:

$$\theta_a d x^a = d t, \qquad \theta_{ab} d x^a d x^b = d t\, d t, \tag{63}$$

$$h^{ab} \partial_a \partial_b = \partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2 + \partial_3 \partial_3.$$

В релятивистском случае область $V(x)$ задается неравенством

$$\theta_{ab} d x^a d x^b > 0, \tag{64}$$

в левой части которого написана квадратичная форма нормального гиперболического типа. Это значит, что для всякой точки $x \in X$ можно так подобрать координаты (62), что в этой точке квадратичная форма станет равной

$$\theta_{ab} d x^a d x^b = d t^2 - (d x^2 + d y^2 + d z^2) / c^2. \tag{65}$$

Эту форму называем формой времени, так как она задает на мировой траектории (58) собственное время τ, проживаемое материальной точкой при условии, что

$$\theta_{ab} \xi^a \xi^b = 1. \tag{66}$$

Тензор g^{ab}, сопряженный с тензором времени θ_{ab} условием

$$g^{as} \theta_{sb} = -c^{-2} \delta^a_b, \tag{67}$$

называем кометрическим. В координатах (62)

$$g^{ab} \partial_a \partial_b = \partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2 + \partial_3 \partial_3 - c^{-2} \partial_4 \partial_4. \tag{68}$$

Тензор

$$g_{ab} = - c^2 \theta_{ab} \tag{69}$$

называем метрическим.

В пределе

$$c \longrightarrow \infty \tag{70}$$

тензор g^{ab} переходит в тензор h^{ab}, а тензор θ_{ab} факторизуется в виде (30).

На наш слух, благозвучнее говорить "галилеев и лоренцев" (случаи), нежели "нерелятивистский и релятивистский". Итак, геометрия Евклида в пространстве скоростей $V(x)$ приводит к галилеевой метризации многообразия X, а геометрия Лобачевского – к лоренцевой. В первом случае геометрия касательного мира определяется группой Галилея, а во втором - группой Лоренца. В касательном мире $T(x)$ в галилеевом случае задаются кометрический тензор h^{ab} и ковектор времени θ_a, сопряженные условием (32), а в лоренцевом случае - кометрический тензор g^{ab} и тензор времени

$$\theta_{ab} = -c^{-2} g_{ab} , \tag{71}$$

сопряженные условием (67). В лоренцевом случае существует и метрический тензор (69), обратный кометрическому. В галилеевом случае тензор времени θ_{ab} равен (30).

Убедимся, что в лоренцевом случае в пространстве скоростей реализуется геометрия Лобачевского. В координатной карте (62) обозначим

$$\xi^1 = \xi , \quad \xi^2 = \eta , \quad \xi^3 = \zeta , \quad \xi^4 = \upsilon . \tag{72}$$

Полагая, что $\upsilon > 0$, из условия (66) находим

$$\upsilon = \sqrt{1 + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) / c^2} . \tag{73}$$

Поверхность (73) расположена в касательном $T(x)$. Заданная в этом пространстве метрическая форма

$$g_{ab}\, d\xi^a\, d\xi^b = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - c^2\, d\upsilon^2 \tag{74}$$

на поверхности (73) принимает следующий вид:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - \frac{(\xi\, d\xi + \eta\, d\eta + \zeta\, d\zeta)^2}{c^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \tag{75}$$

Положив теперь

$$\xi = c \,\mathrm{sh}\, \frac{\rho}{c} \sin\theta \cos\varphi , \qquad \eta = c\,\mathrm{sh}\,\frac{\rho}{c} \sin\theta\sin\varphi ,$$

$$\zeta = c\,\mathrm{sh}\,\frac{\rho}{c}\cos\theta , \qquad \upsilon = \mathrm{ch}\,\frac{\rho}{c} , \tag{76}$$

вводим на поверхности (73) сферические координаты, в которых метрическая форма (75) принимает вид

$$d\rho^2 + c^2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{\rho}{c}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) . \tag{77}$$

Последнее выражение совпадает с правой частью выражения (2) при $c = k$. Следовательно, на поверхности (73) реализуется геометрия Лобачевского с характерной константой $k = c$.

4. ВВЕДЕНИЕ ФОНОВОЙ СВЯЗНОСТИ В ЭЙНШТЕЙНОВСКУЮ ТЕОРИЮ ГРАВИТАЦИИ

В эйнштейновской теории гравитации плотность энергии зависит от выбора координат, что противоречит эйнштейновскому же принципу, согласно которому законы природы надобно формулировать от выбора координат независимо. Как показано в работах [3, 8-10], для устранения этого недостатка следует ввести в теорию гравитации фоновую аффинную связность.

Фоновую связность обозначим $\check{\Gamma}_{mn}^{a}$. Будем считать, что она не имеет кручения. Это значит, что в любой координатной карте

$$\check{\Gamma}_{mn}^{a} = \check{\Gamma}_{nm}^{a} . \tag{78}$$

Как и в эйнштейновской теории, будем считать, что информация о гравитационном поле учитывается в лоренцевой метризации, описанной выше в разделе 3. Наряду с фоновой связностью (78) введем связность Кристоффеля

$$\Gamma_{mn}^{a} = \frac{1}{2} g^{as} (\partial_m g_{sn} + \partial_n g_{sm} - \partial_s g_{mn}) = \Gamma_{nm}^{a} . \tag{79}$$

Из двух связностей составим тензор аффинной деформации (38), квадратичную форму

$$P_{mnb}^{a} = P_{mb}^{s} P_{sn}^{a} - P_{nb}^{s} P_{sm}^{a} = - P_{nmb}^{a} \tag{80}$$

и её свертку

$$P_{nb} = P_{anb}^{a} = P_{bn} . \tag{81}$$

Другая свертка тензора (80) равна нулю:

$$P_{mna}^{a} = 0 . \tag{82}$$

Сам тензор (80) удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$P_{mnb}^{a} + P_{nmb}^{a} = 0 , \quad P_{mnb}^{a} + P_{bmn}^{a} + P_{nbm}^{a} = 0 . \tag{83}$$

Из (82) и (83) следует (81), а из (81) и (83) следует (82).

Теперь запишем тензор (81) в виде

$$P_{mn} = P_{mb}^{a} P_{an}^{b} - P_{s} P_{mn}^{s} , \tag{84}$$

где

$$P_s = P_{sa}^{a} , \tag{85}$$

и введем скаляр

$$\mathcal{L} = g^{mn} P_{mn} . \tag{86}$$

Обозначая

$$\Phi^s = g^{mn} P_{mn}^{\ \ s} = (\check{V}_a - P_a) g^{as} , \qquad (87)$$

запишем этот скаляр в виде

$$\mathcal{L} = g^{mn} P_{mb}^{\ \ a} P_{an}^{\ \ b} - P_s \Phi^s . \qquad (88)$$

Основываясь на опыте эйнштейновской теории гравитации, действие гравитационного поля на фоне связности (78) положим равным интегралу

$$\mathbb{E} = \int \mathcal{L} \, d V , \qquad (89)$$

где

$$d V = \sqrt{|g|} \; d x^1 \, d x^2 \, d x^3 \, d x^4 . \qquad (90)$$

Располагая двумя связностями, составляем тензор кривизны (42) и тензор кривизны

$$\check{R}_{mnb}^{\ \ \ a} = \partial_m \check{\Gamma}_{nb}^{\ \ a} - \partial_n \check{\Gamma}_{mb}^{\ \ a} + \check{\Gamma}_{ms}^{\ \ a} \check{\Gamma}_{nb}^{\ \ s} - \check{\Gamma}_{ns}^{\ \ a} \check{\Gamma}_{mb}^{\ \ s} . \qquad (91)$$

Затем составляем две свертки

$$R_{nb} = R_{anb}^{\ \ \ a} \quad \text{и} \quad \check{R}_{nb} = \check{R}_{anb}^{\ \ \ a} , \qquad (92)$$

тензор

$$S_{mn} = R_{mn} + R_{nm} - \check{R}_{mn} - \check{R}_{nm} \qquad (93)$$

и скаляр

$$S = g^{mn} S_{mn} . \qquad (94)$$

Отметим, что тензоры (42) и (91) удовлетворяют тем же условиям симметрии (83), каким удовлетворяет тензор (80). Кроме того,

$$R_{mns}^{\ \ \ s} = 0 , \qquad \check{R}_{mns}^{\ \ \ s} = \partial_m P_n - \partial_n P_m . \qquad (95)$$

При фиксированной фоновой связности вариация интеграла (89) по кометрическому тензору равна

$$\delta \, \mathbb{E} = \frac{1}{2} \int (S_{mn} - \frac{1}{2} S g_{mn}) \, \delta g^{mn} \, d V . \qquad (96)$$

При выводе этой формулы пренебрегаем вариациями на границе интегрирования и учитываем вариацию объема

$$\delta \, d V = - \frac{1}{2} (g_{mn} \, \delta g^{mn}) \, d V . \qquad (97)$$

Добавляя к (89) действие "материи", источников гравитационного поля, приходим к уравнению

$$S_{mn} - \frac{1}{2} S g_{mn} = 16 \pi \gamma M_{mn} , \qquad (98)$$

где, как и в (53), γ - константа Ньютона, M_{mn} - тензор массы.

Заметим, что в отличие от галилеева случая (54), в лоренцевом случае тензор массы зависит от вида и состояния источника. Например, для идеальной жидкости

$$M_{mn} = [(\varepsilon + p) \, \xi_m \xi_n - p \, \theta_{mn}] \, c^{-2} , \qquad (99)$$

где ε - внутренняя энергия, p - давление, $\xi_m = \theta_{mn} \xi^n$, а ξ^n - 4-скорость жидкости.

Изложенная теория удовлетворяет своего рода принципу соответствия: полагая, что в некоторой координатной карте компоненты фоновой связности (78) равняются нулю, мы возвращаемся к эйнштейновской теории гравитации. Для этого необходимо, чтобы тензор кривизны (91) равнялся нулю, а если он равняется нулю, то найдется координатная карта, в которой компоненты связности (78) равняются нулю. Такая карта определяется с точностью до аффинных преобразований координат. Следовательно, в эйнштейновской теории наряду с римановой геометрией, задаваемой метрическим тензором (69), имеется аффинная геометрия [6, с. 41], что не было должным образом учтено ни самим Эйнштейном, ни другими авторами, применявшими и развивавшими эйнштейновскую теорию.

Отказываясь от необходимости принимать равенство

$$\check{R}_{mnb}^{\ \ \ a} = 0 , \qquad (100)$$

мы приходим к более общей теории, чем эйнштейновская. Мы оказываемся за рамками последней, если равенство (100) нарушается, даже в случае

$$\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm} = 0 , \qquad (101)$$

когда гравитационные уравнения (98) все еще совпадают с уравнениями Эйнштейна - Гильберта: ведь, чтобы эйнштейновский "псевдотензор энергии" гравитационного поля [11, с. 205; 12, с. 106] не потерял свой смысл, необходимо сохранить равенство (100).

Связность (78) называем примитивной, если она удовлетворяет условию (100), и полупримитивной - если она удовлетворяет условию (101).

5. ВЫБОР ФОНОВОЙ СВЯЗНОСТИ

В случае, когда нет гравитации, полагаем

$$\Gamma_{mn}^{\ \ a} = \check{\Gamma}_{mn}^{\ \ a} . \qquad (102)$$

Это есть тривиальное решение уравнений (98). Действительно, в этом случае всюду на многообразии тензор массы должен равняться нулю, а, следовательно, уравнения (98) должны принимать вид

$$S_{mn} = 0 \; . \tag{103}$$

Условие (102) означает, что фоновая связность (78) может быть представлена в виде связности Кристоффеля. Такая связность непременно должна быть эквиаффинной [6, с.150]. Следовательно, должны выполняться условия

$$\check{R}^{s}_{mns} = 0 \; , \qquad \check{R}_{mn} = \check{R}_{nm} \; , \tag{104}$$

а уравнения (103) должны принимать вид

$$R_{mn} = \check{R}_{nm} \; . \tag{105}$$

Вышеизложенная теория сама по себе каких-либо иных условий на фоновую связность не накладывает и допускает большую свободу при их выборе.

Воспользуемся этой свободой и условимся, что в отсутствие гравитации метрика принимает вид

$$g_{ab}\, d x^{a}\, d x^{b} = c^{2}\, d t^{2} - L_{\alpha\beta}\, d x^{\alpha}\, d x^{\beta} \; , \tag{106}$$

где компоненты $L_{\alpha\beta}$ не зависят от координаты $x^{4} = t$ и составляют метрику (1). Известная задача Шварцшильда решается в предельном случае (11), когда фоновая связность определяется геометрией Евклида. Не доходя до этого предела, при любом значении характерной константы k мы можем поставить и решить аналогичную задачу в случае, когда фоновая связность определяется геометрией Лобачевского.

Итак, в лоренцевом случае фоновую связность полагаем равной связности Кристоффеля, задаваемой метрикой (106), и находим, что она равна связности (35) при U = const , т. е.

$$\check{\Gamma}^{4}_{mn} = 0 \; , \quad \check{\Gamma}^{a}_{4n} = 0 \; , \quad \check{\Gamma}^{a}_{m4} = 0 \; , \quad \check{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = L^{\alpha}_{\mu\nu} \; . \tag{107}$$

Интересно, что в компоненты выбранной фонововой связности скорость света c не вошла, несмотря на то, что она явно входит в метрику (106). Поэтому выбранная нами фоновая связность в лоренцевом случае совпала с той, которую мы выбрали в качестве фоновой в галилеевом случае.

Соответственно, тензор кривизны (91) равняется тензору (46) при U = const , т. е.

$$\check{R}^{4}_{mnb} = 0 \; , \quad \check{R}^{a}_{4nb} = 0 \; , \quad \check{R}^{a}_{m4b} = 0 \; , \quad \check{R}^{a}_{mn4} = 0 \; ,$$

$$\check{R}^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = L^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = (L_{\mu\beta}\, \delta^{\alpha}_{\nu} - L_{\nu\beta}\, \delta^{\alpha}_{\mu})\, k^{-2} \; . \tag{108}$$

Из полученных формул следует, что уравнения (105) принимают вид

$$R_{4n} = 0 \; , \quad R_{n4} = 0 \; , \quad R_{\mu\nu} = -\, 2\, k^{-2}\, L_{\mu\nu} \; . \tag{109}$$

Замечательно, что ковариантная производная тензорного поля (108) по фоновой связности (107) равна нулю:

$$\check{\nabla}_{s}\, \check{R}^{a}_{mnb} = 0 \; . \tag{110}$$

6. УСЛОВИЯ ГАРМОНИЧНОСТИ

В связи с дискуссией о гармонических координатах большой интерес представляет вектор ангармоничности (87), так как условия гармоничности, на которых настаивал В.А. Фок [5, с. 239], можно записать [3, с. 1030] в виде

$$\Phi^{a} = 0 \; . \tag{111}$$

Условия (111) приняты как в биметрической теории А. Розена [13], так и в РТГ (релятивистской теории гравитации) А.А. Логунова [14, 15].

Интересно рассмотреть условия (111) в развиваемой здесь теории гравитации с двумя аффинными связностями. Будем называть их условиями гармоничности, даже если фоновая связность непримитивна, хотя в таком случае они не определяют системы гармонических координат. Будем, однако, считать, что действие источников гравитационного поля (как, например, в рассмотренном выше случае идеальной жидкости) не зависит от выбора фоновой связности. При этом условии тензор массы удовлетворяет равенству

$$\nabla_{s}\, g^{sm}\, M_{mn} = 0 \; . \tag{112}$$

Из этого равенства и уравнения (98) получаем следствие

$$\nabla_{s}\, g^{sm}\, (\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm} - g^{ab}\, \check{R}_{ab}\, g_{mn}) = 0 \; . \tag{113}$$

Левую часть равенства (113) можно привести к виду

$$(\check{\nabla}_{s} - P_{s})\, [g^{sm}\, (\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm})] - g^{ab}\, \check{\nabla}_{n}\, \check{R}_{ab} \; . \tag{114}$$

Поэтому, если фоновая связность удовлетворяет условию

$$\check{\nabla}_{s}\, (\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm}) = 0 \; , \tag{115}$$

то согласно (113) получаем следствие

$$(\check{R}_{mn} + \check{R}_{nm})\, \Phi^{m} = 0 \; . \tag{116}$$

Применим полученные результаты к фоновой связности (107). В силу равенства (110) условие (115) выполняется. Поэтому мы располагаем равенством (116), в данном случае согласно (108) означающим

$$k^{-2}\, L_{\mu\nu}\, \Phi^{\nu} = 0 \; . \tag{117}$$

Так как множитель k^{-2} и определитель матрицы $(L_{\mu\nu})$ не равны нулю, то из четырех условий гармоничности (111) три условия

$$\Phi^{\alpha} = 0 \tag{118}$$

являются следствиями гравитационных уравнений (98). Нам представляется возможность принять четвертое условие гармоничности, а именно:

$$\Phi^{4} = 0 \; , \tag{119}$$

которое из гравитационных уравнений (98) не следует. Этой возможностью мы и воспользуемся.

7. СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МЕТРИКА

Будем решать уравнения (98), полагая

$$g_{ab}\, d x^{a}\, d x^{b} =$$

$$= V^{2}\, d t^{2} - F^{2}\, d \rho^{2} - H^{2}\, (d \theta^{2} + \sin^{2} \theta\, d \varphi^{2}) \; , \tag{120}$$

где функции V, F, H зависят только от координаты ρ. В таком случае отличные от нуля компоненты связности (79) равны

$$\Gamma^{4}_{41} = V^{-1} \frac{d V}{d \rho} = \Gamma^{4}_{14} \; , \qquad \Gamma^{1}_{44} = F^{-2}\, V \frac{d V}{d \rho} \; ,$$

$$\Gamma^{1}_{11} = F^{-1} \frac{d F}{d \rho} \; , \quad \Gamma^{1}_{22} = - F^{-2}\, H \frac{d H}{d \rho} \; , \quad \Gamma^{1}_{33} = \Gamma^{1}_{22} \sin^{2} \theta \; ,$$

$$\Gamma^{2}_{12} = H^{-1} \frac{d H}{d \rho} = \Gamma^{2}_{21} \; , \qquad \Gamma^{2}_{33} = - \sin \theta \cos \theta \; ,$$

$$\Gamma^{3}_{13} = H^{-1} \frac{d H}{d \rho} = \Gamma^{3}_{31} \; , \qquad \Gamma^{3}_{23} = \operatorname{ctg} \theta = \Gamma^{3}_{32} \; . \tag{121}$$

В этих же координатах отличные от нуля компоненты фоновой связности равны

$$\check{\Gamma}^{1}_{22} = - k\, \operatorname{sh} \frac{\rho}{k}\, \operatorname{ch} \frac{\rho}{k} \; , \qquad \check{\Gamma}^{1}_{33} = \check{\Gamma}^{1}_{22} \sin^{2} \theta \; ,$$

$$\check{\Gamma}^{2}_{12} = k^{-1} \operatorname{cth} \frac{\rho}{k} = \check{\Gamma}^{2}_{21} \; , \qquad \check{\Gamma}^{2}_{33} = - \sin \theta \cos \theta \; , \tag{122}$$

$$\check{\Gamma}^{3}_{13} = k^{-1} \operatorname{cth} \frac{\rho}{k} = \check{\Gamma}^{3}_{31} \; , \qquad \check{\Gamma}^{3}_{23} = \operatorname{ctg} \theta = \check{\Gamma}^{3}_{32} \; .$$

Все недиагональные компоненты тензора R_{mn} в данном случае равны нулю, а диагональные удовлетворяют условию

$$R_{33} = R_{22} \sin^{2} \theta \; . \tag{123}$$

Поэтому из уравнений (98) остается удовлетворить только следующим трем уравнениям:

$$R_{44} = 0 \; , \quad R_{11} = - 2\, k^{-2} \; , \quad R_{22} = - 2\, \operatorname{sh}^{2} \frac{\rho}{k} \; . \tag{124}$$

В рассматриваемом случае имеем

$$R_{44} = F^{-1}\, H^{-2}\, V \frac{d}{d \rho} \left(F^{-1}\, H^{2} \frac{d V}{d \rho} \right) \; , \tag{125}$$

$$R_{11} = - V^{-1} V'' - 2\, H^{-1} H'' + F^{-1} F' \left(V^{-1} V' + 2\, H^{-1} H' \right) \; , \tag{126}$$

$$R_{22} = 1 - (F\, V)^{-1} \frac{d}{d \rho} \left(F^{-1}\, V\, H \frac{d H}{d \rho} \right) \; , \tag{127}$$

где штрих и двойной штрих означают первую и вторую производные по ρ. Из (125) и (127) следует, что

$$\frac{1}{2}\, H\, (R_{11} + V^{-2} F^{2} R_{44}) = - H'' + H' (V^{-1} V' + F^{-1} F') \; . \tag{128}$$

Воспользовавшись этой комбинацией вместо (126), получаем следующие уравнения:

$$H'' - H\, k^{-2} = H' (F\, V)^{-1} (F\, V)' \; , \tag{129}$$

$$(F^{-1}\, H^{2}\, V')' = 0 \; , \tag{130}$$

$$(F^{-1}\, V\, H\, H')' = F\, V \operatorname{ch} \frac{2 \rho}{k} \; . \tag{131}$$

Прежде чем решать эти уравнения, вернемся к вопросу об условиях гармоничности (111). Нетрудно подсчитать, что в данном случае первая компонента вектора (87) равна

$$\Phi^{1} = F^{-1}\, V^{-1}\, H^{-2} \left[- (F^{-1}\, V\, H^{2})' + k\, F\, V \operatorname{sh} \frac{2 \rho}{k} \right] \; , \tag{132}$$

а остальные его компоненты равны нулю. Таким образом, дополнительное условие (119) удовлетворяется. Условия же (118) следуют из гравитационных уравнений. Значит, из уравнений (129), (130) и (131) должно следовать равенство $\Phi^{1} = 0$, что согласно (132) эквивалентно равенству

$$\frac{d}{d \rho} \left(F^{-1}\, V\, H^{2} \right) = F\, V\, k \operatorname{sh} \frac{2 \rho}{k} \; . \tag{133}$$

В пределе (11) отсюда получается то самое условие гармоничности, на котором настаивал В.А. Фок [5, с. 256]. По этому поводу он писал:

"В заключение сделаем одно замечание по вопросу об определении прямой линии в теории тяготения. Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x_1, x_2, x_3? Нам представляется единственно правильным второе определение." [5, с. 273].

Заменяя в этом замечании евклидово пространство на неевклидово, мы улучшаем свою позицию, так как обсуждаемое условие гармоничности, являющееся в евклидовом случае уравнением, дополнительным к основным гравитационным уравнениям, в неевклидовом случае оказывается простым следствием последних. В первом случае можно говорить о четырех дополнительных уравнения (111), а во втором - только об одном дополнительном уравнении (119), поскольку остальные три (уравнения (118) во втором случае) следуют из гравитационных уравнений.

Ввиду важности вопроса выведем равенство (133) непосредственно из уравнений (129), (130) и (131). Для этого рассмотрим тензор Эйнштейна

$$G^b_a = R_{as} g^{sb} - \frac{1}{2} R_{mn} g^{mn} \delta^b_a , \qquad (134)$$

ковариантная дивергенция

$$\nabla_b G^b_a = \partial_b G^b_a - \Gamma^s_{ba} G^b_s + \Gamma^b_{bs} G^s_a \qquad (135)$$

которого, как известно, равна нулю. Убедимся в этом непосредственно. В рассматриваемом случае тензор G^a_b диагонален и не зависит от углов и времени, а среди компонент (121) вида Γ^a_{mn} при $a = m$, $n \neq 1$ имеются только одна компонента Γ^3_{32} . Поэтому три последние компоненты вектора (135) равны нулю, а его первая компонента равна

$$\nabla_b G^b_1 = \qquad (136)$$

$$\frac{d}{d\rho} G^1_1 + \Gamma^b_{b1} G^1_1 - \Gamma^1_{11} G^1_1 - \Gamma^2_{21} G^2_2 - \Gamma^3_{31} G^3_3 - \Gamma^4_{41} G^4_4 .$$

Но и эта компонента равна нулю вследствие конкретных формул для Γ^a_{m1} и G^a_m при $a = m$. Действительно, для компонент связности они составляют первую колонку формул (121), т. е.

$$\Gamma^1_{11} = F^{-1} F' , \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = H^{-1} H' , \quad \Gamma^4_{41} = V^{-1} V' , \qquad (137)$$

а для компонент тензора(134) имеют следующий вид:

$$G^1_1 = A - B , \quad G^2_2 = G^3_3 = - A - C , \quad G^4_4 = - A - B ; \qquad (138)$$

где

$$A = H^{-1} F^{-2} [H'' - H' (F V)^{-1} (F V)'] ,$$

$$B = V^{-1} F^{-1} H^{-2} (V H F^{-1} H')' - H^{-2} , \qquad (139)$$

$$C = V^{-1} F^{-1} H^{-2} (H^2 F^{-1} V')' .$$

Подставляя (137), а затем (138) в формулу (136), получаем

$$\nabla_b G^b_1 = \frac{d}{d\rho} G^1_1 + 2 H^{-1} H' (G^1_1 - G^2_2) + V^{-1} V' (G^1_1 - G^4_4) = \qquad (140)$$

$$= (A - B)' + 2 H^{-1} H' (2 A - B + C) + 2 V^{-1} V' A .$$

Нетрудно убедиться в том, что комбинация (140) при подстановке (139) обращается в нуль, каковы бы ни были функции F, H, V. Но если эти функции удовлетворяют гравитационным уравнениям (129), (130), (131), то

$$A = F^{-2} k^{-2} , \quad B = 2 H^{-2} sh^2 \frac{\rho}{k} , \quad C = 0 . \qquad (141)$$

Подставляя последние выражения в (140), получаем

$$\nabla_b G^b_1 = 2 k^{-2} H^{-2} F^{-1} V^{-1} [(F^{-1} V H^2)' - k F V sh \frac{2\rho}{k}]. \qquad (142)$$

Так как мы доказали, что выражение (140) равно нулю, то доказали и равенство (133).

8. ЗАДАЧА ШВАРЦШИЛЬДА

Как известно, Шварцшильд нашел решение гравитационных уравнений Эйнштейна - Гильберта

$$R_{mn} = 0 . \qquad (143)$$

Последние получаются из уравнений (109) в предельном случае (11). Стараясь решить аналогичную задачу, сначала рассмотрим решение Шварцшильда.

Начнем с уравнений

$$H'' = H' (F V)^{-1} (F V)' , \qquad (144)$$

$$(F^{-1} H^2 V')' = 0 , \qquad (145)$$

$$(F^{-1} V H H')' = F V , \qquad (146)$$

которые получаются из уравнений (129), (130), (131) в пределе (11).

Из уравнения (144) следует, что

$$F V = C H' , \qquad (147)$$

где C = const, а из уравнения (145) следует, что

$$H^2 V V' = B F V , \qquad (148)$$

где B = const. Подставляя (147) в (148), получаем

$$H^2 V V' = B C H' , \qquad (149)$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{B C}{H} = A , \qquad (150)$$

где $A = \mathrm{const}$. Подставляя (147) в (146), получаем

$$(V^2 H)' = C^2 H' . \tag{151}$$

Подставляя сюда (150), получаем

$$2 A = C^2 . \tag{152}$$

Итак, общее решение системы уравнений (144), (145), (146) зависит от двух констант B, C и от одной произвольной функции H:

$$F = C V^{-1} H' , \quad V^2 = C^2 - 2 B C H^{-1} . \tag{153}$$

Это есть статическое сферически симметричное решение уравнений (143) в лоренцевом случае. Подставив это решение в (119), координату ρ удобно заменить координатой H.

Рассмотрим аналогичное решение тех же уравнений (143) в галилеевом случае, когда они согласно (49) сводятся к уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0 \tag{154}$$

в евклидовом пространстве с метрикой (16). Считая, что гравитационный потенциал U от углов и времени не зависит, находим общее решение

$$U = M \rho^{-1} + N , \tag{155}$$

где M, N - произвольные константы. Их выбирают равными $N = 0$, $M = -\mu$.
Аналогично, в решении (153) константы выбирают равными $C = c$, $B C = \mu$.

Заметим теперь, что в уравнение (143) входит только аффинная связность Γ^a_{mn}. Мы приходим к уравнению (154), полагая, подобно (35),

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = E^{\alpha}_{\mu\nu} , \quad \Gamma^{\alpha}_{44} = E^{\alpha\nu} \partial_{\nu} U , \tag{156}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu 4} = 0 , \quad \Gamma^{\alpha}_{4\nu} = 0 , \quad \Gamma^{4}_{mn} = 0 .$$

Мировая траектория материальной точки является геодезической линией относительно связности (156). Если мы не будем прибегать к понятию фоновой связности, то не сможем ничего сказать о силе тяжести. А вот если положим фоновую связность $\overset{\circ}{\Gamma}{}^a_{mn}$ равной (156) при $U = \mathrm{const}$, то сможем сказать, что 4-сила тяжести G^a равна

$$G^a = M P^a_{mn} \xi^m \xi^n , \tag{157}$$

где P^a_{mn} - тензор аффинной деформации, ξ^m - 4-скорость, M - масса материальной точки.

В данном случае тензор аффинной деформации имеет вид (40). В силу равенства (32) вектор

$$\Phi^a = h^{mn} P^a_{mn} \tag{158}$$

равняется нулю, а это значит, что в данном случае выполняются условия гармоничности. Поэтому естественно требовать, чтобы они выполнялись и в аналогичном лоренцевом случае, когда связность равна (79).

Возвращаясь к задаче Шварцшильда, введем фоновую связность, равную связности (121) при $V = c$, $F = 1$, $H = \rho$. Неравными нулю могут быть только следующие компоненты тензора аффинной деформации:

$$P^4_{41} = - V^{-1} V' = P^4_{14} , \quad P^1_{44} = - F^{-2} V V' , \tag{159}$$

$$P^1_{11} = - F^{-1} F' , \quad P^1_{22} = F^{-2} H H' - \rho , \quad P^1_{33} = P^1_{22} \sin^2 \theta ,$$

$$P^2_{12} = \rho^{-1} - H^{-1} H' = P^2_{21} , \quad P^3_{13} = \rho^{-1} - H^{-1} H' = P^3_{31} .$$

Следовательно, в данном случае неравной нулю может быть только одна компонента вектора ангармоничности (87), а именно:

$$\Phi^1 = F^{-1} V^{-1} H^{-2} [- (F^{-1} V H^2)' + 2 F V \rho] . \tag{160}$$

Приравнивая ее нулю, получаем условие гармоничности

$$\frac{d}{d\rho} (F^{-1} V H^2) = 2 F V \rho , \tag{161}$$

которое следует из (133) в пределе (11).

Подставляя в (161) $F V = c H'$, $V^2 = c^2 - 2 \mu H^{-1}$, получаем

$$\frac{d}{dH} \left[(H^2 - 2 \alpha H) \frac{d\rho}{dH} \right] = 2 \rho , \tag{162}$$

где

$$\alpha = \mu / c^2 . \tag{163}$$

В работах [5, с. 262] и [13, с. 6] константы интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения (162) выбираются так, что

$$H = \rho + \alpha , \quad F^2 = \frac{\rho + \alpha}{\rho - \alpha} , \quad V^2 = \frac{\rho - \alpha}{\rho + \alpha} c^2 . \tag{164}$$

При таком выборе

$$F V = c . \tag{165}$$

Вопрос о необходимости такого выбора изучен в работе [16].

9. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО В РЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ

Согласно цитированному выше замечанию Фока, метрику Шварцшильда

$$\frac{\rho - \alpha}{\rho + \alpha}\, c^2\, d\, t^2 - \frac{\rho + \alpha}{\rho - \alpha}\, d\, \rho^2 - (\rho + \alpha)^2\, d\, \Omega^2, \qquad (166)$$

где

$$d\, \Omega^2 = (\, d\, \theta^2 + \sin^2\, \theta\, d\, \varphi^2)\ ,$$

следует рассматривать на фоне евклидова пространства. Найдем аналогичную метрику на фоне пространства Лобачевского.

Система уравнений (129), (130), (131) легко интегрируется при условии

$$F\ V\ =\ C\ , \qquad (167)$$

где C = const , что аналогично (165). Уравнение (130) совпадает с уравнением (145). Поэтому

$$H^2\ V'\ =\ B\ F\ , \qquad (168)$$

где B = const , что эквивалентно (148). Подставляя (167) в (129), получаем уравнение

$$H'' - H\ k^{-2} = 0\ , \qquad (169)$$

общее решение которого запишем в виде

$$H = P\ k\ sh\ \frac{\rho + \hat{\rho}}{k}\ , \qquad (170)$$

где P и $\hat{\rho}$ - константы интегрирования. Подставляя это решение в уравнение

$$H^2\ \frac{d}{d\ \rho}(\ \frac{1}{2}\ V^2) = B\ C\ , \qquad (171)$$

которое следует из (167) и (168), получаем

$$\frac{1}{2}\ V^2 = N - B\ C\ P^{-2}\ k^{-1}\ cth\ \frac{\rho + \hat{\rho}}{k}\ , \qquad (172)$$

где N - еще одна константа интегрирования.

Остается рассмотреть уравнение (131). Вместо него можно рассмотреть сумму уравнений (130) и (131)

$$\frac{d}{d\ \rho}\ [(F\ V)^{-1}\ \frac{d}{d\ \rho}\ (\frac{1}{2}\ V^2\ H^2)\ ] = F\ V\ ch\ \frac{2\ \rho}{k}\ , \qquad (173)$$

что удобнее. Подставляя сюда (167), получаем уравнение

$$(\ \frac{1}{2}\ V^2\ H^2)'' = C^2\ ch\ \frac{2\ \rho}{k}\ . \qquad (174)$$

Согласно (170) и (171) имеем

$$\frac{1}{2}\ V^2\ H^2 = \qquad (175)$$

$$[\ N\ P^2\ k\ sh\ \frac{\rho + \hat{\rho}}{k} - B\ C\ ch\ \frac{\rho + \hat{\rho}}{k}\ ]\ k\ sh\ \frac{\rho + \hat{\rho}}{k}\ .$$

Дифференцируя эту функцию, получаем первую производную

$$(\ \frac{1}{2}\ V^2\ H^2)' = \qquad (176)$$

$$N\ P^2\ k\ sh\ \frac{2}{k}(\rho + \hat{\rho}) - B\ C\ ch\ \frac{2}{k}(\rho + \hat{\rho})$$

и вторую

$$(\ \frac{1}{2}\ V^2\ H^2\ )'' = \qquad (177)$$

$$2\ N\ P^2\ ch\ \frac{2}{k}(\rho + \hat{\rho}) - 2\ B\ C\ k^{-1}\ sh\ \frac{2}{k}(\rho + \hat{\rho})\ .$$

Чтобы удовлетворить уравнению (174), константы интегрирования надо связать следующими условиями:

$$2\ N\ P^2\ ch\ \frac{2\ \hat{\rho}}{k} - 2\ B\ C\ k^{-1}\ sh\ \frac{2\ \hat{\rho}}{k} = C^2\ , \qquad (178)$$

$$2\ N\ P^2\ sh\ \frac{2\ \hat{\rho}}{k} - 2\ B\ C\ k^{-1}\ ch\ \frac{2\ \hat{\rho}}{k} = 0\ .$$

Отсюда находим

$$2\ B = C\ k\ sh\ \frac{2\ \hat{\rho}}{k}\ ,\quad 2\ N\ P^2 = C^2\ ch\ \frac{2\ \hat{\rho}}{k}\ . \qquad (179)$$

Подставляя эти значения в (175), получаем

$$V^2\ H^2 = C^2\ k^2\ sh\ \frac{\rho + \hat{\rho}}{k}\ sh\ \frac{\rho - \hat{\rho}}{k}\ . \qquad (180)$$

Затем на основе (167) и (170) получаем

$$V^2 = C^2\ P^{-2}\ sh\ \frac{\rho - \hat{\rho}}{k}\ /\ sh\ \frac{\rho + \hat{\rho}}{k}\ , \qquad (181)$$

$$F^2 = P^2\ sh\ \frac{\rho + \hat{\rho}}{k}\ /\ sh\ \frac{\rho - \hat{\rho}}{k}\ . \qquad (182)$$

Нетрудно проверить, что условие гармоничности (133) выполняется. Действительно, согласно (167) в данном случае оно означает

$$\frac{d}{d\ \rho}\ (\ V^2\ H^2\ ) = C^2\ k\ sh\ \frac{2\ \rho}{k}\ , \qquad (183)$$

а согласно (180) -

$$V^2\ H^2 = \frac{1}{2}\ C^2\ k^2\ [\ ch\ \frac{2\ \rho}{k} - ch\ \frac{2\ \hat{\rho}}{k}\ ]\ . \qquad (184)$$

Остается выбрать значения констант интегрирования. Полагая

$$C = c\ ,\quad P = 1\ ,\quad \hat{\rho} = \alpha \qquad (185)$$

и обозначая $\xi = \rho\ /\ k$, $\kappa = \alpha\ /\ k$, получаем метрику

$$\frac{sh(\xi - \kappa)}{sh(\xi + \kappa)}\ c^2 dt^2 - \frac{sh(\xi + \kappa)}{sh(\xi - \kappa)}\ d\rho^2 - k^2 sh^2(\xi + \kappa)\ d\ \Omega^2, \qquad (186)$$

аналогичную метрике Шварцшильда (166).

Литература

1. Лобачевский Н.И. *О началах геометрии*. Полн. собр. соч., т. 1, М. - Л. : Гостехиздат, 1946, с. 185 - 261.

2. Лобачевский Н.И. *Новые начала геометрии с полной теорией параллельных*. Полн. собр. соч., т. 2, М. - Л.: Гостехиздат, 1949, с. 147 - 454.

3. Черников Н.А. *Трудные вопросы теории относительности*. ЭЧАЯ, 1987, т. 18, вып. 5, с. 1000 - 1034.

4. Черников Н.А. *Введение геометрии Лобачевского в теорию гравитации Ньютона*. Препринт ОИЯИ Р2-91-381, Дубна, 1991. (Направлено в журнал ТМФ).

5. Фок В.А. *Теория пространства, времени и тяготения*. М.: Гостехиздат, 1955.

6. Норден А.П. *Пространства аффиной связности*. М.: Наука, 1976.

7. Черников Н.А. *Геометрия Лобачевского как физическая наука*. В кн.: 150 лет геометрии Лобачевского. Пленарные доклады. М.: ВИНИТИ, 1977, с. 146 - 153.

8. Черников Н.А. *Необходимый объект в ОТО - тензор аффинной деформации*. Труды первого ежегодного семинара "Гравитационная энергия и гравитационные волны". ОИЯИ Р2-89-138, Дубна 1989, с. 12-23.

9. Черников Н.А. *Локальная теория гравитаци*. Труды второго ежегодного семинара "Гравитационная энергия и гравитационные волны". ОИЯИ Р2-90-245, Дубна, 1990, с. 3-14.

10. Черников Н.А. *Эйнштейновская теория гравитации с точки зрения тензорного анализа*. Сообщение ОИЯИ Р2-90-399, Дубна, 1990.

11. Эйнштейн А. Собр. научн. трудов, т. 2. М.: Наука, 1966.

12. Паули В. *Теория относительности*. М.: Наука, 1983.

13. Rosen N. *Flat-Space Metric in General Relativity Theory*. Annals of physics: 22, 1963, p. 1-11.

14. Логунов А.А. *Основные принципы релятивистской теории гравитации*. Препринт ИФВЭ 91-130, Протвино, 1991.

15. Логунов А.А. *Релятивистская теория гравитации*. В кн.: Перспективы единой теории поля. М.: Из-во Моск. ун-та, 1991, с. 36-55.

16. Асанов Р.А. *Замечание к точному решению задачи о гравитационном поле точечной массы*. Сообщение ОИЯИ Р2-86-525, Дубна, 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 марта 1992 года.