СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 9179

И.В.Полубаринов

ЗАМЕЧАНИЯ О КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1975

P2 - 9179

И.В.Полубаринов

ЗАМЕЧАНИЯ О КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

I. В качестве основных переменных в квантовой теории обычно используются собственные значения оператора импульса (реже координаты). Вместо них можно применять средние значения x и p координаты и импульса, что и реализуется в представлении когерентных состояний. В таком виде квантовая теория становится похожей на классическую. Внешнее сходство не исключает принципиальных различий, начиная с формы исходных уравнений движения/I/. Уравнения движения в интегральной форме наряду с координатами и импульсами содержат и производные по этим переменным. Им эквивалентны дифференциальные уравнения движения, сходные с классическими, но тогда производные входят в "начальные условия". Константа Планка $\hbar$ появляется как коэффициент при этих производных (в комбинациях $x+i\frac{\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}$, $p-i\frac{\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial x}$, $x(t)+i\frac{\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\xi(t)}$ в квантовой механике и $\varphi(x)+i\frac{\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\mathfrak{I}(x)}$ в квантовой теории поля, см./I/, где однако было положено $\hbar$ =I).

2. Когерентные состояния и соответствующие представления когерентных состояний/I/можно вводить на разных уровнях: для свободных квантов, для свободных квантованных полей, для тех или иных взаимодействующих систем. Ниже обсуждается, главным образом, квантовая теория поля, записанная в терминах одноквантовых когерентных состояний $|\vec{x}\vec{p}\rangle$, т.е. последние используются как базис, вместо обычно применяемого базиса $|\vec{p}'\rangle$. Так, для оператора поля $\hat{\varphi}(\vec{x})$ имеем[x)xx)]

$$\hat{\varphi}(\vec{x}')=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p'e^{i\vec{p}'\vec{x}'}[\hat{a}(\vec{p}')+\hat{a}^+(-\vec{p}')]\equiv\int d^3p'\langle\vec{x}'|\vec{p}'\rangle[\hat{a}(\vec{p}')+\hat{a}^+(-\vec{p}')]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\, d^3p\,\langle\vec{x}'|\vec{x}\vec{p}\rangle\ [\hat{a}(\vec{x}\vec{p})+\hat{a}^+(\vec{x}-\vec{p})]=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\, d^3p\,[\langle\vec{x}'|\vec{x}\vec{p}\rangle\hat{a}(\vec{x}\vec{p})+\langle\vec{x}\vec{p}|\vec{x}'\rangle\hat{a}^+(\vec{x}\vec{p})], \qquad (I)$$

где

$$\hat{a}(\vec{x}\vec{p})=\int d^3p'\,\langle\vec{x}\vec{p}|\vec{p}'\rangle\hat{a}(\vec{p}'),\quad \hat{a}^+(\vec{x}\vec{p})=\int d^3p'\hat{a}^+(\vec{p}')\langle\vec{p}'|\vec{x}\vec{p}\rangle \qquad (2)$$

x) Для импульса поля $\dot{\hat{\varphi}}(\vec{x}')=i(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int d^3p'\,e^{i\vec{p}'\vec{x}'}\omega_{\vec{p}'}[-\hat{a}(\vec{p}')+\hat{a}^+(-\vec{p}')]$ аналогично.

xx) При этом используются соотношения (П.I) из Приложения.

Для операторов уничтожения и рождения когерентного кванта выполняются перестановочные соотношения

$$[\hat{a}(\vec{x}_2\vec{p}_2),\hat{a}(\vec{x}_1\vec{p}_1)]=0,\quad [\hat{a}(\vec{x}_2\vec{p}_2),\hat{a}^+(\vec{x}_1\vec{p}_1)]=\langle\vec{x}_2\vec{p}_2|\vec{x}_1\vec{p}_1\rangle, \tag{3}$$

в частности, $$[\hat{a}(\vec{x}\vec{p}),\hat{a}^+(\vec{x}\vec{p})]=1. \tag{3.a}$$

Операторы числа квантов, импульса и энергии в терминах этих операторов уничтожения и рождения записываются$^{x)}$

$$\hat{N}=\int d^3p'\,\hat{a}^+(\vec{p}\,')\hat{a}(\vec{p}\,')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\,d^3p\,\hat{a}^+(\vec{x}\vec{p})\hat{a}(\vec{x}\vec{p}) \tag{4}$$

$$\hat{P}_m=\int d^3p'\,p'_m\hat{a}^+(\vec{p}\,')\hat{a}(\vec{p}\,')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\,d^3p\,p_m\hat{a}^+(\vec{x}\vec{p})\hat{a}(\vec{x}\vec{p}) \tag{5}$$

$$\hat{P}_0=\int d^3p'\sqrt{\vec{p}\,'^2+m^2}\,\hat{a}^+(\vec{p}\,')\hat{a}(\vec{p}\,')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\,d^3p\sqrt{\left(\vec{p}+\frac{\hbar}{2}A\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right)^2+m^2}\,\hat{a}^+(\vec{x}\vec{p})\hat{a}(\vec{x}\vec{p})=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\,d^3p\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}\,\Lambda^{-1}\hat{a}^+(\vec{x}\vec{p})\hat{a}(\vec{x}\vec{p}), \tag{6}$$

где оператор Λ дается формулой (Б.5) Приложения Б к работе /I/. Полной системой нормируемых собственных функций оператора $\hat{N}$ будут n-квантовые состояния

$$|\vec{x}_1\vec{p}_1\vec{x}_2\vec{p}_2\ldots\vec{x}_n\vec{p}_n\rangle=\hat{a}^+(\vec{x}_1\vec{p}_1)\ldots\hat{a}^+(\vec{x}_n\vec{p}_n)|0\rangle, \tag{7}$$

но, как и следовало ожидать, они не являются собственными функциями операторов $\hat{P}_m$ и $\hat{P}_0$.

Обратимся к средним от 4-импульса в состояниях (7).

а) Для одноквантового состояния, вводя матрицы плотности

$$\hat{\rho}(\vec{x}\vec{p})=\hat{a}^+(\vec{x}\vec{p})|0\rangle\ \langle 0|\hat{a}(\vec{x}\vec{p}) \tag{8}$$

$$\hat{Q}(\vec{x}\vec{p})=\Lambda^{-1}\hat{a}^+(\vec{x}\vec{p})|0\rangle\ \langle 0|\hat{a}(\vec{x}\vec{p}), \tag{9}$$

получаем

$$\langle\hat{P}_m\hat{\rho}\rangle=p_m,\qquad \langle\hat{P}_0\hat{\rho}\rangle=\sqrt{\left(\vec{p}+\frac{\hbar}{2}A\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right)^2+m^2} \tag{10}$$

$$\langle\hat{P}_m\hat{Q}\rangle=p_m,\qquad \langle\hat{P}_0\hat{Q}\rangle=\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}. \tag{11}$$

$^{x)}$ С помощью формулы (П.2) Приложения можно убедиться, что

$$\hat{F}=\int d^3p'\,f(\vec{p}\,')\hat{a}^+(\vec{p}\,')\hat{a}(\vec{p}\,')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\,d^3p\,f\left(\vec{p}+\frac{\hbar}{2}A\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right)\hat{a}^+(\vec{x}\vec{p})\hat{a}(\vec{x}\vec{p})=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\,d^3p\,f(\vec{p})\,\Lambda^{-1}\hat{a}^+(\vec{x}\vec{p})\hat{a}(\vec{x}\vec{p})$$

для любой функции f.

Естественно, это согласуется с тем, что получалось для одноквантовых состояний в /I/ (без вторичного квантования).

б) Двухквантовое состояние с нетождественными квантами:

$$\hat{\rho}(\vec{x}_1\vec{p}_1\vec{x}_2\vec{p}_2)=\hat{a}^+(\vec{x}_1\vec{p}_1)\hat{b}^+(\vec{x}_2\vec{p}_2)|0\rangle\langle 0|\hat{b}(\vec{x}_2\vec{p}_2)\hat{a}(\vec{x}_1\vec{p}_1) \tag{12}$$

$$\hat{Q}(\vec{x}_1\vec{p}_1\vec{x}_2\vec{p}_2)=\Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1}\ \hat{\rho}(\vec{x}_1\vec{p}_1\vec{x}_2\vec{p}_2) \tag{13}$$

$$\langle\hat{P}_m\hat{\rho}\rangle=p_{1m}+p_{2m},\quad \langle\hat{P}_0\hat{\rho}\rangle=\sqrt{\left(\vec{p}_1+\frac{\hbar}{2}A\frac{\partial}{\partial\vec{p}_1}\right)^2+m_1^2}+\sqrt{\left(\vec{p}_2+\frac{\hbar}{2}A\frac{\partial}{\partial\vec{p}_2}\right)^2+m_2^2} \tag{14}$$

$$\langle\hat{P}_m\hat{Q}\rangle=p_{1m}+p_{2m},\quad \langle\hat{P}_0\hat{Q}\rangle=\sqrt{\vec{p}_1^{\,2}+m_1^2}+\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m_2^2}. \tag{15}$$

в) Двухквантовое состояние с тождественными квантами:

$$\hat{\rho}(\vec{x}_1\vec{p}_1\vec{x}_2\vec{p}_2)=\hat{a}^+(\vec{x}_1\vec{p}_1)\hat{a}^+(\vec{x}_2\vec{p}_2)|0\rangle\ \langle 0|\hat{a}(\vec{x}_2\vec{p}_2)\hat{a}(\vec{x}_1\vec{p}_1) \tag{16}$$

$$\hat{Q}(\vec{x}_1\vec{p}_1\vec{x}_2\vec{p}_2)=\Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1}\ \hat{\rho}(\vec{x}_1\vec{p}_1\vec{x}_2\vec{p}_2) \tag{17}$$

$$\langle\hat{\rho}\rangle=1+|\langle\vec{x}_2\vec{p}_2|\vec{x}_1\vec{p}_1\rangle|^2 \tag{18}$$

$$\langle\hat{Q}\rangle=\Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1}\left[1+|\langle\vec{x}_2\vec{p}_2|\vec{x}_1\vec{p}_1\rangle|^2\right] \tag{19}$$

$$\langle\hat{P}_m\hat{\rho}\rangle=\left[\left(p_1+\frac{\hbar}{2}A\frac{\partial}{\partial p_1}\right)_m+\left(p_2+\frac{\hbar}{2}A\frac{\partial}{\partial p_2}\right)_m\right]\left[1+|\langle\vec{x}_2\vec{p}_2|\vec{x}_1\vec{p}_1\rangle|^2\right] \tag{20}$$

$$\langle\hat{P}_m\hat{Q}\rangle=(p_1+p_2)_m\Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1}\left[1+|\langle\vec{x}_2\vec{p}_2|\vec{x}_1\vec{p}_1\rangle|^2\right]. \tag{21}$$

Неортогональность системы состояний $|\vec{x}\vec{p}\rangle$ приводит к усложнению. Вместе с тем из $\langle\hat{P}_m\hat{Q}\rangle$ лишние члены естественным образом исключаются путем деления на норму, но, по-видимому, это не всегда так.$^{x)}$ Однако во всяком случае эти члены пренебрежимо малы для частиц удаленных друг от друга, так что

$$\langle\hat{P}_0\hat{\rho}\rangle\approx\sqrt{\left(\vec{p}_1+\frac{\hbar}{2}A\frac{\partial}{\partial\vec{p}_1}\right)^2+m^2}+\sqrt{\left(\vec{p}_2+\frac{\hbar}{2}A\frac{\partial}{\partial\vec{p}_2}\right)^2+m^2}, \tag{22}$$

$^{x)}$ С помощью формулы (П.3) Приложения имеем

$$\langle\hat{F}\hat{\rho}\rangle=f\left(\vec{p}_1+\frac{\hbar}{2}A\frac{\partial}{\partial\vec{p}_1}\right)+f\left(\vec{p}_2+\frac{\hbar}{2}A\frac{\partial}{\partial\vec{p}_2}\right)+$$

$$+\langle\vec{x}_1\vec{p}_1|\vec{x}_2\vec{p}_2\rangle f\left(\frac{1}{2}\left[\vec{p}_1+\vec{p}_2+\hbar A\left(\frac{\partial}{\partial\vec{p}_1}+\frac{\partial}{\partial\vec{p}_2}\right)-i\frac{\hbar}{2}A(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\right]\right)\langle\vec{x}_2\vec{p}_2|\vec{x}_1\vec{p}_1\rangle+$$

$$+\langle\vec{x}_1\vec{p}_1|\vec{x}_2\vec{p}_2\rangle f\left(\frac{1}{2}\left[\vec{p}_1+\vec{p}_2+\hbar A\left(\frac{\partial}{\partial\vec{p}_1}+\frac{\partial}{\partial\vec{p}_2}\right)+i\frac{\hbar}{2}A(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\right]\right)\langle\vec{x}_1\vec{p}_1|\vec{x}_2\vec{p}_2\rangle$$

$$\langle \hat{P}_0 \hat{Q} \rangle \approx \sqrt{\vec{p}_1^{\,2}+m^2} + \sqrt{\vec{p}_2^{\,2}+m^2}\,. \qquad (23)$$

Для состояний с большим числом квантов ситуация аналогичная.

3. Теперь покажем, что распределения в ПКС-2 /I/ по средним значениям импульсов совпадают с распределениями по собственным значениям оператора импульса. Возьмем, например, амплитуду перехода $\langle \vec{p}_4{}' \vec{p}_3{}' | \hat{U} | \vec{p}_2{}' \vec{p}_1{}' \rangle$ между состояниями, в которых каждый квант имеет определенный импульс. Для каждого кванта перейдем к когерентному состоянию. Это приведет к амплитуде $\langle \vec{x}_4 \vec{p}_4 \vec{x}_3 \vec{p}_3 | \hat{U} | \vec{x}_2 \vec{p}_2 \vec{x}_1 \vec{p}_1 \rangle$. Тогда, используя соотношение (П.4.а), можно убедиться в сделанном утверждении:

$$\frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3x_3\, d^3x_4\, \Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} \Lambda_3^{-1} \Lambda_4^{-1} \left| \langle \vec{x}_4 \vec{p}_4 \vec{x}_3 \vec{p}_3 | \hat{U} | \vec{x}_2 \vec{p}_2 \vec{x}_1 \vec{p}_1 \rangle \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^3x_1\, d^3x_2\, d^3x_3\, d^3x_4\, \Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} \Lambda_3^{-1} \Lambda_4^{-1} \Big| \int d^3p_1'\, d^3p_2'\, d^3p_3'\, d^3p_4'$$

$$\langle \vec{x}_4 \vec{p}_4 | \vec{p}_4{}' \rangle \langle \vec{x}_3 \vec{p}_3 | \vec{p}_3{}' \rangle \langle \vec{p}_4{}' \vec{p}_3{}' | \hat{U} | \vec{p}_2{}' \vec{p}_1{}' \rangle \langle \vec{p}_2{}' | \vec{x}_2 \vec{p}_2 \rangle \langle \vec{p}_1{}' | \vec{x}_1 \vec{p}_1 \rangle \Big|^2 =$$

$$= \left| \langle \vec{p}_4 \vec{p}_3 | \hat{U} | \vec{p}_2 \vec{p}_1 \rangle \right|^2 . \qquad (24)$$

Здесь кроме действия операторами Λ^{-1} для перехода в ПКС-2 произведено, так сказать, "усреднение по начальным и суммирование по конечным координатам" $\vec{x}_I \ldots \vec{x}_4$ аналогично тому, как мы поступили бы в классике в подобной задаче о пучках (ансамблях) частиц, когда импульсы частиц регистрируются, а координаты нет.x)

Сделанное утверждение справедливо для вероятностей переходов и сечений любых процессов (например, для сечения комптон-эффекта).

Его можно проиллюстрировать также и на простом примере состояния с определенным импульсом (см. формулы (П.IO)).

Далее отметим, что матрица плотности

$$\frac{1}{(2\pi)^{3n}} \int d^3x_1\, d^3x_2 \ldots d^3x_n\, \Lambda_1^{-1} \ldots \Lambda_n^{-1}\, \hat{a}^+(\vec{x}_1 \vec{p}_1) \ldots \hat{a}^+(\vec{x}_n \vec{p}_n) |0\rangle \langle 0| \hat{a}(\vec{x}_n \vec{p}_n) \ldots \hat{a}(\vec{x}_1 \vec{p}_1) =$$

$$= \hat{a}^+(\vec{p}_1) \ldots \hat{a}^+(\vec{p}_n) |0\rangle \langle 0| \hat{a}(\vec{p}_n) \ldots \hat{a}(\vec{p}_1) \qquad (25)$$

уже есть собственная функция $\hat{N}$, $\hat{P}_m$ и $\hat{P}_0$.

x) Стандартный для квантовой теории тип задач (для решения которых существует стандартная техника). В классике к этому типу задач относится получение резерфордовского рассеяния.

Независимо от того, является ли сходство с классикой, обусловленное использованием языка средних, чисто внешним или более знаменательным для квантовой теории (и в какой мере оправдано отождествлять переменные $\vec{x}$ и $\vec{p}$ с наблюдаемыми координатой и импульсом хотя бы только для "асимптотически свободных" частицx)), в обсуждаемом представлении не изменяются а) формула Планка, б) спектры собственных значений, в частности, уровни энергии (например, у атома водорода) /I/ и в) распределения по импульсам (вероятности переходов, сечения).

4. Выше рассматривались не зависящие от времени (шредингеровские) операторы поля. Зависящие от времени можно ввести обычным образом:

$$\hat{\varphi}(x') = e^{i \hat{P}_0 x_0'} \hat{\varphi}(\vec{x}') e^{-i \hat{P}_0 x_0'} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x\, d^3p \left[\langle x' | \vec{x} \vec{p} \rangle \hat{a}(\vec{x} \vec{p}) + \hat{a}^+(\vec{x} \vec{p}) \langle \vec{x} \vec{p} | x' \rangle \right] \qquad (26)$$

где в свободном случае

$$\langle x' | \vec{x} \vec{p} \rangle \equiv \langle \vec{x}' x_0' | \vec{x} \vec{p} \rangle = e^{-i x_0' \sqrt{-\Delta' + m^2}} \langle \vec{x}' | \vec{x} \vec{p} \rangle\,. \qquad (27)$$

Из аппарата работы /I/ ясно, что эволюцию гайзенберговского оператора можно представить в виде

$$\mathbf{Q}(t) = e^{i \hbar^{-1} (t-t')(\mathcal{H} - \mathcal{H}^+)} \mathbf{Q}(t') = \qquad (28.а)$$

$$= \mathcal{U}^{-1}(t,t';+)\, \tilde{\mathcal{U}}(t,t';-)\, Q(t) \qquad \left(Q(t) = e^{i \hbar^{-1} (t-t')(\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_0^+)} \mathbf{Q}(t') \right), \qquad (28.б)$$

а эволюцию матрицы плотности – в виде

$$\varrho(t) = e^{-i \hbar^{-1} (\mathcal{H} - \mathcal{H}^+)(t-t')} \varrho(t') \qquad \text{(шредингеровская картина)}, \qquad (29)$$

$$\varrho^{\text{вз}}(t) = \Lambda^{-1} \langle \varphi | \hat{\varrho}^{\text{вз}}(t) | \varphi \rangle = \mathcal{U}(t,t';+)\, \tilde{\mathcal{U}}^{-1}(t,t';-)\, \varrho^{\text{вз}}(t') \qquad \text{(картина взаимодействия)}. \qquad (30)$$

Эти формулы вытекают из обычных операторных формулxx) и справедливы как в квантовой механике, так и в квантовой теории поля, при любых взаимодействиях, в ПКС-I и в ПКС-2 (в зависимости от выбранной

x) Правда, в самой по себе применявшейся выше операции $(2\pi)^{-3} \int d^3x\, \Lambda^{-1} \ldots$ можно видеть и более тривиальный смысл: просто способ перехода из ПКС в p-представление.

xx) $\hat{\mathbf{Q}}(t) = e^{i \hat{H}(t-t')} \hat{\mathbf{Q}}(t') e^{-i \hat{H}(t-t')} = \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t,t') \hat{Q}(t) \hat{\mathcal{U}}(t,t')$ $\left(\hat{Q}(t) = e^{i \hat{H}_0 (t-t')} \hat{\mathbf{Q}}(t') e^{-i \hat{H}_0 (t-t')} \right)$,

$\hat{\varrho}(t) = e^{-i \hat{H}(t-t')} \hat{\varrho}(t') e^{i \hat{H}(t-t')}$, $\quad \hat{\varrho}^{\text{вз}}(t) = \hat{\mathcal{U}}(t,t') \hat{\varrho}^{\text{вз}}(t') \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t,t')$.

реализации операторов координаты и импульса). Отметим, что оператор

$$L = \hbar^{-1}(\mathcal{H} - \mathcal{H}^{+}) \tag{31}$$

есть оператор Лиувилля, обобщенный на квантовый случай.

Формула (29) использовалась в /I/ применительно к свободному нерелятивистскому движению, когда в ПКС-2 оператор $L = \hbar^{-1}(\mathcal{H} - \mathcal{H}^{+}) = -i\frac{p_n}{m}\frac{\partial}{\partial x_n}$ тождественен с соответствующим оператором Лиувилля в классике. Оператор эволюции в этом случае есть просто оператор сдвига: $e^{-iLt} = e^{-t\frac{p_n}{m}\frac{\partial}{\partial x_n}}$, и результат его действия на "плотности в фазовом пространстве" (П.10.в) (П.11.в) и (П.12.в) такой же, как в классике (см. /I/ или формулы для осциллятора при $\omega = 0$ в Приложении к настоящей работе).

Для осциллятора (снова как в классике)

$$L = \hbar^{-1}(\mathcal{H} - \mathcal{H}^{+}) = -i\left(\frac{p_n}{m}\frac{\partial}{\partial x_n} - m\omega^2 x_n \frac{\partial}{\partial p_n}\right) . \tag{32}$$

Действие соответствующего оператора эволюции e^{-iLt} проиллюстрировано в Приложении. Операторы Лиувилля для других систем в квантовой механике легко получить с помощью выражений для $\mathcal{H}$ из п. 5 работы /I/.

Приведем пример оператора Лиувилля в квантовой теории поля. Для свободного скалярного поля в ПКС-2 имеем

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int d^3x\left[m^2\left(\varphi(x) + i\frac{\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2 + \left(\partial_k\varphi(x) + i\frac{\hbar}{2}\partial_k\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2 - \left(\partial_4\varphi(x) + i\frac{\hbar}{2}\partial_4\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2\right] ,$$

$$L = \hbar^{-1}(\mathcal{H} - \mathcal{H}_0^{+}) = i\int d^3x\left(m^2\varphi(x)\frac{\delta}{\delta J(x)} + \partial_k\varphi(x)\partial_k\frac{\delta}{\delta J(x)} - \partial_4\varphi(x)\partial_4\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) . \tag{33}$$

Автор благодарен Б.Н.Валуеву, М.А.Маркову и Ю.М.Широкову за полезные обсуждения вопросов, связанных с данной работой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Из явного вида величин $\langle\vec{x}'|\vec{x}\vec{p}\rangle$ и $\langle\vec{p}'|\vec{x}\vec{p}\rangle$ (см. формулы (Б.19) и (Б.20) в Приложении Б к работе /I/) следуют соотношения

$$\langle\vec{x}'|\vec{x}\,-\vec{p}\rangle = \langle-\vec{x}'|-\vec{x}\,\vec{p}\rangle = \langle\vec{x}\,\vec{p}|\vec{x}'\rangle , \quad \langle\vec{p}'|-\vec{x}\,\vec{p}\rangle = \langle-\vec{p}'|\vec{x}\,-\vec{p}\rangle = \langle\vec{x}\,\vec{p}|\vec{p}'\rangle , \tag{П.1}$$

$$\frac{1}{2}(p''_m + p'_m)\langle\vec{p}''|\vec{x}\vec{p}\rangle\langle\vec{x}\vec{p}|\vec{p}'\rangle = \left(p_m + \frac{\hbar}{2}A\frac{\partial}{\partial p_m}\right)\langle\vec{p}''|\vec{x}\vec{p}\rangle\langle\vec{x}\vec{p}|\vec{p}'\rangle , \tag{П.2}$$

$$p'_m\langle\vec{x}_2\vec{p}_2|\vec{p}'\rangle\langle\vec{p}'|\vec{x}_1\vec{p}_1\rangle = \frac{1}{2}\left[p_1 + p_2 + \hbar A\left(\frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2}\right) - i\frac{\hbar}{2}A(x_1 - x_2)\right]_m\langle\vec{x}_2\vec{p}_2|\vec{p}'\rangle\langle\vec{p}'|\vec{x}_1\vec{p}_1\rangle , \tag{П.3}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\,\Lambda^{-1}\langle\vec{p}''|\vec{x}\,\vec{p}\rangle\langle\vec{x}\,\vec{p}|\vec{p}'\rangle = \delta(\vec{p}'' - \vec{p})\,\delta(\vec{p}' - \vec{p}) , \tag{П.4.а}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\,\Lambda^{-1}|\vec{x}\,\vec{p}\rangle\langle\vec{x}\,\vec{p}| = |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| , \tag{П.4.б}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\Lambda^{-1}\langle\vec{x}''|\vec{x}\,\vec{p}\rangle\langle\vec{x}\,\vec{p}|\vec{x}'\rangle = \delta(\vec{x}'' - \vec{x})\,\delta(\vec{x}' - \vec{x}) , \tag{П.5.а}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\Lambda^{-1}|\vec{x}\,\vec{p}\rangle\langle\vec{x}\,\vec{p}| = |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}| , \tag{П.5.б}$$

$$\Lambda^{-1}|\langle\vec{x}\,\vec{p}|\vec{p}'\rangle|^2 = \delta(\vec{p} - \vec{p}') , \tag{П.6}$$

$$\Lambda^{-1}|\langle\vec{x}\,\vec{p}|\vec{x}'\rangle|^2 = \delta(\vec{x} - \vec{x}') . \tag{П.7}$$

Из

$$\langle\vec{x}_2\vec{p}_2|\vec{x}_1\vec{p}_1\rangle = \exp\left(-\frac{1}{4}\left(A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 + A^{-1}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2\right) + \frac{i}{2}(\vec{p}_1\vec{x}_2 - \vec{p}_2\vec{x}_1)\right) \tag{П.8}$$

следует

$$\Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1}|\langle\vec{x}_2\vec{p}_2|\vec{x}_1\vec{p}_1\rangle|^2 = (2\pi)^3\,\delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\,\delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) . \tag{П.9}$$

Приведем примеры "плотностей в фазовом пространстве".

$\hat{\rho}(t') = |\vec{p}'\rangle\langle\vec{p}'|$ (состояние с определенным импульсом), (П.10.а)

$\rho(t') = \langle\vec{x}\,\vec{p}|\hat{\rho}(t')|\vec{x}\,\vec{p}\rangle = |\langle\vec{x}\,\vec{p}|\vec{p}'\rangle|^2$ (ПКС-1), (П.10.б)

$Q(t') = \Lambda^{-1}\langle\vec{x}\,\vec{p}|\hat{\rho}(t')|\vec{x}\,\vec{p}\rangle = \Lambda^{-1}|\langle\vec{x}\,\vec{p}|\vec{p}'\rangle|^2 = \delta(\vec{p} - \vec{p}')$ (ПКС-2) (П.10.в)

("плотность" $Q(t')$ означает, что импульс фиксирован ($\vec{p} = \vec{p}'$), а любое значение координаты $\vec{x}$ равновероятно).

$\hat{\rho}(t') = |\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|$ (состояние с определенной координатой), (П.11.а)

$\rho(t') = \langle\vec{x}\,\vec{p}|\hat{\rho}(t')|\vec{x}\,\vec{p}\rangle = |\langle\vec{x}\,\vec{p}|\vec{x}'\rangle|^2$ (ПКС-1), (П.11.б)

$Q(t') = \Lambda^{-1}\langle\vec{x}\,\vec{p}|\hat{\rho}(t')|\vec{x}\,\vec{p}\rangle = \Lambda^{-1}|\langle\vec{x}\,\vec{p}|\vec{x}'\rangle|^2 = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ (ПКС-2) (П.11.в)

(эта плотность $Q(t)$ означает, что фиксирована координата $\vec{x} = \vec{x}'$, а любое значение импульса $\vec{p}$ равновероятно). Плотности (П.10) и (П.11) можно получить путем интегрирования соответственно по $\vec{x}'$ и $\vec{p}'$ более детальной "плотности в фазовом пространстве"

$$\hat{\rho}(t') = \Lambda'^{-1} |\vec{x}'\vec{p}'\rangle\langle\vec{x}'\vec{p}'| , \qquad \text{(П.I2.а)}$$

$$\rho(t') = \langle\vec{x}\vec{p}|\hat{\rho}(t')|\vec{x}\vec{p}\rangle = \Lambda'^{-1}|\langle\vec{x}\vec{p}|\vec{x}'\vec{p}'\rangle|^2 , \qquad \text{(П.I2.б)}$$

$$Q(t') = \Lambda^{-1}\langle\vec{x}\vec{p}|\hat{\rho}(t')|\vec{x}\vec{p}\rangle = \Lambda^{-1}\Lambda'^{-1}|\langle\vec{x}\vec{p}|\vec{x}'\vec{p}'\rangle|^2 = (2\pi)^3\delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta(\vec{p}-\vec{p}') . \qquad \text{(П.I2.в)}$$

Остановимся на эволюции в случае осциллятора. Принимая плотности (П.I0.б), (П.I0.в), (П.II.б), (П.II.в), (П.I2.б) и (П.I2.в) за начальные, получаем ($t'=0$)

$$\rho(t) = \Lambda Q(t) = \pi^{-\frac{3}{2}}(\det A(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-A^{-1}(t)(\vec{p}\cos\omega t + m\omega\vec{x}\sin\omega t - \vec{p}')^2\right), \qquad (\text{П.I0.}\tilde{\text{б}})$$

$$Q(t) = e^{-itL}Q(t') = \delta(\vec{p}\cos\omega t + m\omega\vec{x}\sin\omega t - \vec{p}') , \qquad (\text{П.I0.}\tilde{\text{в}})$$

$$\rho(t) = \Lambda Q(t) = \pi^{-\frac{3}{2}}(\det C(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-C^{-1}(t)\left(\vec{x}\cos\omega t - \frac{\vec{p}}{m\omega}\sin\omega t - \vec{x}'\right)^2\right), \qquad (\text{П.II.}\tilde{\text{б}})$$

$$Q(t) = e^{-itL}Q(t') = \delta\left(\vec{x}\cos\omega t - \frac{\vec{p}}{m\omega}\sin\omega t - \vec{x}'\right) , \qquad (\text{П.II.}\tilde{\text{в}})$$

$$\rho(t) = \Lambda Q(t) =$$
$$= 2^3 \exp\left(-A\left(\vec{x}-\vec{x}'\cos\omega t - \frac{\vec{p}'}{m\omega}\sin\omega t\right)^2 - A^{-1}(\vec{p}-\vec{p}'\cos\omega t + m\omega\vec{x}'\sin\omega t)^2\right), \qquad (\text{П.I2.}\tilde{\text{б}})$$

$$Q(t) = e^{-itL}Q(t') =$$
$$= (2\pi)^3\delta\left(\vec{x}\cos\omega t - \frac{\vec{p}}{m\omega}\sin\omega t - \vec{x}'\right)\delta(\vec{p}\cos\omega t + m\omega\vec{x}\sin\omega t - \vec{p}') =$$
$$= (2\pi)^3\delta\left(\vec{x}-\vec{x}'\cos\omega t - \frac{\vec{p}'}{m\omega}\sin\omega t\right)\delta(\vec{p}-\vec{p}'\cos\omega t + m\omega\vec{x}'\sin\omega t) . \qquad (\text{П.I2.}\tilde{\text{в}})$$

В этих выражениях $A = 2\|\overline{\Delta p_m \Delta p_n}\|$, $A^{-1} = C = 2\|\overline{\Delta x_m \Delta x_n}\|$ при $t=t'$,

$$A(t) = A\cos^2\omega t + A^{-1}m^2\omega^2\sin^2\omega t , \quad C(t) = A^{-1}\cos^2\omega t + A\frac{\sin^2\omega t}{m^2\omega^2} . \qquad \text{(П.I3)}$$

Из (П.I2.в) можно получить все предыдущие плотности путем применения Λ и интегрирований по $\vec{x}'$ или $\vec{p}'$. Если же проинтегрировать по $\vec{x}$ или по $\vec{p}$, то можно получить распределения соответственно только по $\vec{p}$ или по $\vec{x}$ при заданных (начальных) $\vec{x}'$ и $\vec{p}'$:

$$\rho(t) = \pi^{-\frac{3}{2}}(\det A)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-A^{-1}(\vec{p}-\vec{p}'\cos\omega t + m\omega\vec{x}'\sin\omega t)^2\right), \qquad \text{(П.I4.б)}$$

$$Q(t) = \delta(\vec{p}-\vec{p}'\cos\omega t + \omega m\vec{x}'\sin\omega t), \qquad \text{(П.I4.в)}$$

$$\rho(t) = \pi^{-\frac{3}{2}}(\det A^{-1})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-A\left(\vec{x}-\vec{x}'\cos\omega t - \frac{\vec{p}'}{m\omega}\sin\omega t\right)^2\right), \qquad \text{(П.I5.б)}$$

$$Q(t) = \delta\left(\vec{x}-\vec{x}'\cos\omega t - \frac{\vec{p}'}{m\omega}\sin\omega t\right) . \qquad \text{(П.I5.в)}$$

(Чтобы получить известную эволюцию гауссовского пакета в $\vec{p}$- и $\vec{x}$-представлениях, нужно подействовать на величины (П.I4.в) и (П.I5.в) оператором Λ':

$$\Lambda' Q(t) = \pi^{-\frac{3}{2}}(\det A(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-A^{-1}(t)(\vec{p}-\vec{p}'\cos\omega t + \omega m\vec{x}'\sin\omega t)^2\right) = |\langle\vec{p}t|\vec{x}'\vec{p}'\rangle|^2, \qquad \text{(П.I6)}$$

$$\Lambda' Q(t) = \pi^{-\frac{3}{2}}(\det C(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-C^{-1}(t)\left(\vec{x}-\vec{x}'\cos\omega t - \frac{\vec{p}'}{m\omega}\sin\omega t\right)^2\right) = |\langle\vec{x}t|\vec{x}'\vec{p}'\rangle|^2 .) \qquad \text{(П.I7)}$$

Отметим, что "плотности в фазовом пространстве" $Q(t)$ правильно описывают поведение средних и в то же время позволяют воспроизвеести любые другие результаты квантовой теории.

ЛИТЕРАТУРА

I. И.В.Полубаринов. Сообщения ОИЯИ Р2-8862, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 сентября 1975 г.