ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 917

Ч.Д.Палев

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ПАРАПОЛЕЙ ИЗ АЛГЕБРЫ ТОКОВ

1975

P2 - 9171

Ч.Д.Палев

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ПАРАПОЛЕЙ ИЗ АЛГЕБРЫ ТОКОВ

Направлено в "Болгарский физический журнал"

В настоящей заметке в рамках лагранжевой теории поля мы будем изучать те линейные калибровочные преобразования параполей, для которых выполняются коммутационные соотношения между временными компонентами токов. Мы увидим, что гипотезы алгебры токов накладывают в этом случае существенные ограничения на вид калибровочных преобразований. Покажем также, что любую модель, удовлетворяющую аксиомам алгебры токов /например, модель кварков, σ -модель/, можно обобщить на случай параполей. При этом, в зависимости от вида калибровочного преобразования, иногда возможны несколько неэквивалентных обобщений.

Обозначим через $\{\Phi\}$ совокупность входящих в теорию полей и разобьем ее на "семейства" $\{\Phi\} = \bigcup_{i\eta} \{\Phi\}_i^{\eta}$, считая, что в i-ом семействе содержатся поля одного сорта статистики: парабозе для $\eta = +$ и параферми - для $\eta = -$. Индекс λ отличает поля внутри семейства: $\Phi_{i\lambda}^{\eta}$. Следуя работе /1/, будем рассматривать только случай нормальных коммутационных соотношений между полями, т.е. внутри каждого семейства поля удовлетворяют соответствующим парастатистикам трехлинейных коммутационных соотношений /2/, в то время как для полей, состоящих из разных семейств $(i \neq j$ или $\eta \neq \eta')$, имеем обычные коммутационные соотношения:

$$\{\Phi^{-}_{i\lambda}, \Phi^{-}_{j\mu}\} = [\Phi^{-}_{i\lambda}, \Phi^{+}_{j\mu}] = [\Phi^{+}_{i\lambda}, \Phi^{+}_{j\mu}] = 0 . \qquad /1/$$

Рассмотрим теперь линейное калибровочное преобразование наиболее общего вида:

$$ {}'\Phi^{\eta'}_{i\lambda}(x) = \Phi^{\eta}_{i\lambda}(x) + \lambda(x) \sum_{\eta' i'\lambda'} f^{\eta\eta'}_{i\lambda,\, i'\lambda'}\, \Phi^{\eta'}_{i'\lambda'} \,. \qquad /2/ $$

Как известно [3], если $\{\Phi\}$ состоит только из бозонных и фермионных полей, то временные компоненты токов $J^0_f(x)$, $J^0_g(x)$, соответствующих преобразованиям вида /2/, дают

$$ [\, J^0_f(x)\, ,\, J^0_g(y)\,]_{x^0 = y^0} = -i\delta(\vec{x} - \vec{y})\, J^0_{[\, f,\, g\,]}(x)\,, \qquad /3/ $$

только если

$$ f^{\eta\eta'}_{i\lambda,\, i'\lambda'} = \delta^{\eta\eta'} f^{\eta}_{i\lambda,\, i'\lambda'} \,, \qquad /4/ $$

т.е. если калибровочные преобразования вида /2/ не содержат перекрестных бозон-фермионных членов. При этом

$$ J^0_f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i\lambda\; i'\lambda'\eta} f^{\eta}_{i\lambda,\, i'\lambda'} [\, \pi^{\eta}_{i\lambda}(x)\, ,\, \Phi^{\eta}_{i'\lambda'}(x)\,]\,, \qquad /5/ $$

где $\eta = +(-)$ для бозонных /фермионных/ полей, $\pi^{\eta}_{i\lambda}(x)$ - импульсы сопряженных к полю $\Phi^{\eta}_{i\lambda}(x)$, а

$$ [\, A, B\,]_{\eta} = AB + \eta BA\,, \qquad \eta = +, - \text{ /или } \pm 1/. $$

Рассмотрим теперь общий случай параполей. Докажем следующее предложение.

<u>Предложение:</u> Коммутатор /3/ имеет место тогда и только тогда, когда токи /5/ не содержат перекрестных членов между разными семействами параполей, т.е. когда они соответствуют калибровочным преобразованиям /2/, для которых

$$ f^{\eta\eta'}_{i\lambda,\, i'\lambda'} = \delta^{\eta\eta'} \delta_{ii'} f^{i\eta}_{\lambda\lambda'} \,. \qquad /6/ $$

Для того чтобы сделать это утверждение точным, заметим, что объединение коммутирующих /антикоммутирующих/ бозонных /фермионных/ семейств полей есть то же бозонное /фермионное/ семейство /что неверно для других параполей/. Поэтому без ограничения общности будем

считать, что в $\{\Phi\}$ содержится не более чем по одному бозонному и фермионному семейству.

Поскольку калибровочные преобразования, перемешивающие парабозонные и парафермионные поля, не удовлетворяют аксиомам алгебры токов уже для обычных полей, ясно, что они запрещены. Поэтому рассмотрим преобразования вида:

$$ {}'\Phi^{\eta}_{i\lambda}(x) = \Phi^{\eta}_{i\lambda}(x) + \lambda(x) \sum_{i'\lambda'} f^{\eta}_{i\lambda,\, i'\lambda'}\, \Phi^{\eta}_{i'\lambda'}(x)\,, \qquad /7/ $$

т.е. мы полагаем в /2/

$$ f^{\eta\eta'}_{i\lambda,\, i'\lambda'} = \delta^{\eta\eta'} f^{\eta}_{i\lambda,\, i'\lambda'} \,. $$

Предположение будет доказано, как только мы покажем, что равенство

$$ [\, [\, \pi_{i\mu}(x), \Phi_{j\nu}(x)\,]_{\eta}, [\, \pi_{i'\mu'}(y), \Phi_{j'\nu'}(y)\,]_{\eta}\,]_{x^0 = y^0} = $$

$$ = 2i\delta(\vec{x} - \vec{y})\, (\delta_{ji'} \delta_{\nu\mu'} [\, \pi_{i\mu}(x), \Phi_{j'\nu'}(y)\,]_{\eta} - \qquad /8/ $$

$$ - \delta_{ij'} \delta_{\mu\nu'} [\, \pi_{i'\mu'}(y), \Phi_{j\nu}(x)\,]_{\eta})\,, $$

выполняется только для полей и импульсов из одной и той же функции, т.е. когда $i = i' = j = j'$.

Верхние индексы у полей и импульсов в /7/ мы опускаем, считая, что для $\eta = +(-)$ все поля парабозонны /парафермионны/.

Исходя из трехлинейных соотношений Грина в импульсном пространстве, нетрудно показать, что в конфигурационном пространстве /для скалярных, векторных и спинорных полей/ верны следующие одновременные соотношения $(x^0 = y^0 = z^0)$:

$$ [\, [\, \pi_{i\alpha}(x), \phi_{j\beta}(y)\,]_{\eta}, \phi_{j\gamma}(z)\,] = -2i\delta_{\alpha\gamma} \delta(\vec{x} - \vec{z})\, \phi_{i\beta}(y)\,, $$

$$ [\, [\, \pi_{i\alpha}(x), \phi_{j\beta}(y)\,]_{\eta}, \pi_{j\gamma}(z)\,] = 2i\delta_{\beta\gamma} \delta(\vec{y} - \vec{z})\, \pi_{j\alpha}(x)\,. \qquad /9/ $$

Для $i = i' = j = j'$ соотношение /8/ следует теперь из /9/.

Положим в /8/ $i=j'$, $j=i'$ и $i \neq j$. Тогда для $\eta = +(-)$ поля и импульсы $\phi_{i\lambda}, \pi_{i\delta}$ коммутируют /антикоммутируют/ с $\phi_{j\mu}, \pi_{j\nu}$. В этом случае соотношения /8/ могут быть переписаны в виде:

$$[[\pi_{i\mu}(x), \Phi_{j\nu}(x)]_{\eta}, [\pi_{j\mu'}(y), \Phi_{i\nu'}(y)]_{\eta}] =$$
$$= 2[\pi_{j\mu'}(y), \Phi_{j\nu}(x)]_{-\eta}[\pi_{i\mu}(x), \Phi_{i\nu'}(y)]_{\eta} - \qquad /10/$$
$$- 2[\pi_{i\mu}(x), \Phi_{i\nu'}(y)]_{-\eta}[\pi_{j\mu'}(y), \Phi_{j\nu}(x)]_{\eta}.$$

Видно, что для $x^0 = y^0$ соотношение /7/ получится только, если

$$[\pi_{j\mu'}(y), \Phi_{j\nu}(x)]_{-\eta} = \delta_{\mu'\nu}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}),$$
$$[\pi_{i\mu}(x), \Phi_{i\nu'}(y)]_{-\eta} = \delta_{\mu\nu'}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}), \qquad /11/$$

т.е. если оба поля фермионные / $\eta = -$ / или бозонные $(\eta = +)$. Это, однако, невозможно, ибо $i \neq j$. Следовательно, равенство /8/ выполняется только в случае, если все поля являются парабозонными /парафермионными/ с относительными парабозе /паraферми/ трехлинейными соотношениями. Иными словами, /8/ имеет место, если все поля принадлежат одному и тому же семейству. Из этого результата вытекает, что одновременный коммутатор токов /3/ соблюдается для калибровочных преобразований, удовлетворяющих условию /6/, т.е. не содержащих перекрестных членов между разными парасемействами.

Отметим одно следствие доказанных результатов. Пусть задан лагранжиан $\mathfrak{L}(\{\Phi\})$ бозонных $\Phi^{+}_{i\mu}$ и фермионных $\Phi^{-}_{j\nu}$ полей и пусть калибровочные преобразования не содержат перекрестных членов между разовыми семействами полей:

$$\Phi'^{\eta}_{i\mu}(x) = \Phi^{\eta}_{i\mu}(x) + \lambda(x)\sum_{\nu} f^{\eta}_{i\mu\nu}\Phi^{\eta}_{i\nu}(x). \qquad /12/$$

Тогда, если токи, соответствующие этим калибровочным преобразованиям, замыкают алгебру, то тот же лагранжиан, в котором, однако, $\Phi^{\eta}_{i\mu}(x)$ являются параполями /с коммутационными соотношениями /1//, будет порождать токи, удовлетворяющие той же алгебре.

Поэтому, например, кварковая модель [4] или σ - модель [5] будут удовлетворять тем же аксиомам алгебры токов, если считать, что кварки являются парафермионами, а пион и σ' - парабозонами. Используя различные парапредставления для входящих в эти модели полей, можно построить бесконечное множество моделей для алгебры токов.

Литература

1. *O.W.Greenberg, A.M.L.Messiah. Phys.Rev., 138, 1155 (1965).*
2. *H.S.Green. Phys.Rev., 90, 270 (1953).*
3. *См., напр., А.Адлер и Р.Дашен. Алгебры токов, Москва, 1970, где содержатся все оригинальные работы.*
4. *M.Gell-Mann. Phys.Letters, 8, 214 (1964).*
5. *M.Gell-Mann, M.Levy. Nuovo Cim., 16, 705 (1960).*

Рукопись поступила в издательский отдел
17 сентября 1975 года.