ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 9169

Е.Н.Румянцева

НЕЙТРИННЫЙ ГАЗ В МИРЕ ФРИДМАНА

1975

P2 - 9169

Е.Н.Румянцева

НЕЙТРИННЫЙ ГАЗ В МИРЕ ФРИДМАНА

Направлено в ТМФ

Здесь построена статистическая модель сферического мира Фридмана, геометрические свойства которого определяются нейтринным газом. Аналогичная задача для газа безмассовых скалярных частиц была решена в нашей работе [1].

Оператор нейтринного поля Ψ подчиняется уравнению Дирака

$$\gamma^{\nu}\Psi_{;\nu} = 0 ,$$

где γ^{ν}-матрицы:

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma^{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^{3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\Psi_{;\nu} = e_{\nu}\Psi + \Omega_{\nu}\Psi$ - ковариантные производные в ортогональном базисе e_{ν}.

$$\Omega_{\nu} = \frac{1}{4}\,\omega_{\alpha\beta\nu}\,\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}.$$

$\omega_{\alpha\beta\nu}$ - коэффициенты связности в ортогональном базисе.

Тензор энергии-импульса нейтринного поля в ортогональном базисе равняется

$$T_{\mu\nu} = \frac{hc}{4i}\{\bar\Psi H_\mu \Psi_\nu - \bar\Psi_\nu H_\mu \Psi + \bar\Psi H_\nu \Psi_\mu - \bar\Psi_\mu H_\nu \Psi\}, \qquad /1/$$

где $\bar\Psi = \Psi^* H_0$, $\bar\Psi_\nu = e_\nu \bar\Psi - \bar\Psi \Omega_\nu$.

Сопряженный спинор $\bar\Psi$ подчиняется сопряженному уравнению Дирака:

$$\bar\Psi_\nu H^\nu = 0.$$

В работе /2/ доказана конформная инвариантность поведения нейтрино, означающая, что нейтрино ведет себя одинаково в двух мирах, находящихся в конформном соответствии $ds'^2 = B^2 ds^2$. Здесь ds^2 и ds'^2 - метрические формы двух миров. B - скалярная функция. В частности, если ds^2 - статическая метрика, то в любом мире с метрикой $ds'^2 = B^2 ds^2$ нейтрино не рождаются и не уничтожаются. Основанием для такого заключения являются три теоремы, доказанные в /2/. Первая говорит о том, что оператор Ψ' нейтринного поля в мире с метрикой ds'^2 равняется

$$\Psi' = B^{-\frac{3}{2}} \Psi, \qquad /2/$$

где Ψ - оператор нейтринного поля в мире с метрикой ds^2. Вторая теорема свидетельствует о том, что тензор $T'_{\mu\nu}$, построенный из Ψ' так же, как $T_{\mu\nu}$ из Ψ, равняется

$$T'_{\mu\nu} = B^{-4}\, T_{\mu\nu}. \qquad /3/$$

Наконец, в силу третьей теоремы для всех миров, находящихся в конформном соответствии со статическим миром, существует один и тот же оператор энергии $H' = H$. Ниже он будет выписан для интересующего нас случая сферического мира Фридмана.

Сферический мир Фридмана имеет метрику

$$ds'^2 = r^2 B^2(\theta)\,(-d\theta^2 + \sin^2\zeta d\xi^2 + \cos^2\zeta d\eta^2 + d\zeta^2),$$

где r - некоторая константа, имеющая смысл радиуса мира; ξ, η, ζ - бисферические координаты, изменяющиеся в пределах:

$$0 \le \zeta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \zeta \le 2\pi, \quad 0 \le \eta \le 2\pi.$$

Упомянутый выше оператор энергии равняется

$$H = r^3 \int T_{00}\, d\Omega = ihcr^2 \int \bar\Psi H_0 \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} d\Omega, \qquad /4/$$

где

$$d\Omega = \sin\zeta \cos\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Метрика Фридмана должна подчиняться уравнению Эйнштейна:

$$R'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R' \eta_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} \langle : T'_{\alpha\beta} : \rangle, \qquad /5/$$

где $\langle : T'_{\alpha\beta} : \rangle$ - тензор энергии-импульса нейтринного газа, равный статистическому среднему тензора энергии-импульса поля. Двоеточия означают нормальные произведения операторов рождения и уничтожения частиц.

Для любого оператора A статистическое среднее равняется /3/:

$$\langle A \rangle = \frac{Sp A e^{-\frac{H-\mu N}{kt}}}{Sp\, e^{-\frac{H-\mu N}{kt}}},$$

где H - гамильтониан, равный /4/, μ - химический потенциал, k - постоянная Больцмана, t - глобальная температура газа. Локальная температура газа равняется $t_{лок.} = \frac{t}{B(\theta)}$. О локальной и глобальной температурах см. /4/.

В силу уравнения Дирака след тензора энергии-импульса /1/ равняется нулю. Поэтому на основании уравнений Эйнштейна /5/ скалярная кривизна R' тоже должна равняться нулю. Если два мира находятся в конформном соответствии, то их скалярные кривизны связаны соотношением $B^3 R' = BR + 6\Box B$. Из этого равенства следует способ нахождения такой метрики, для которой скалярная кривизна $R' = 0$. А именно, выбираем произвольную метрику ds^2 и решаем уравнение

$$\Box B + \frac{R}{6} B = 0 .$$

Искомой метрикой будет метрика $ds'^2 = B^2 ds^2$. Интересно отметить, что уравнение для B совпадает с конформно инвариантным уравнением для скалярного поля. В рассматриваемом случае решением этого уравнения является $B = \cos\theta$.

Таким образом, тензор энергии-импульса нейтринного поля в статическом мире равняется, согласно /3/,

$$T_{\mu\nu} = \cos^4\theta \, T'_{\mu\nu} .$$

Из уравнений /5/, имеем условия, накладываемые на тензор энергии-импульса нейтринного газа в статическом мире

$$\langle : T_{00} : \rangle = \frac{3c^4}{r^2 \, 8\pi\gamma} ,$$

$$\langle : T_{\alpha\beta} : \rangle = 0 , \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta , \qquad /6/$$

$$\langle : T_{11} : \rangle = \langle : T_{22} : \rangle = \langle : T_{33} : \rangle = \frac{c^4}{r^2 8\pi\gamma} .$$

Наоборот, при этих условиях уравнения Эйнштейна удовлетворяются. Нам осталось, следовательно, проверить, что тензор энергии-импульса, построенный из оператора поля Ψ, в статическом мире удовлетворяет этим условиям.

В работе [5] получено решение уравнения Дирака в мире де Ситтера в базисе dx пятимерного псевдоевклидова пространства. Мир де Ситтера находится в конформном соответствии со статическим сферическим миром с $B = \frac{1}{\cos\theta}$. Поэтому, найдя решение уравнения

Дирака в базисе f мира де Ситтера с помощью указанной в [6] матрицы S, мы с помощью /2/ найдем решение уравнения Дирака в базисе f статического сферического мира. Под базисом f понимается базис:

$$f^{a} = \{ r d\theta , \; r \sin\zeta \, d\xi , \; r \cos\zeta \, d\eta , \; r d\zeta \} .$$

Решение уравнения Дирака есть

$$\Psi = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{m,n} \{ A_{mn}^{s+\frac{1}{2}} u_{mn}^{s+\frac{1}{2}} + B_{mn}^{s+\frac{1}{2}*} v_{mn}^{s+\frac{1}{2}} \} ,$$

где

$$u_{mn}^{s+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi r^{3/2}} e^{-i(s+\frac{1}{2})\theta} e^{i(m+n)\xi} e^{i(n-n)\eta} \times$$

$$\times \left[(z_2 + i z_1) e^{-i\frac{\zeta}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (z_1 + i z_2) e^{i\frac{\zeta}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

при

$$s = p + 1 , \quad |m| < \frac{p+1}{2} , \quad |n| < \frac{p}{2} , \quad p = 0, 1, 2, \ldots ;$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{p+2}{2} - n} \; P^{\frac{p+1}{2}}_{-m, n-\frac{1}{2}} (\cos 2\zeta) \; ; \quad z_2 = \sqrt{\frac{p+2}{2} + n} \; P^{\frac{p+1}{2}}_{-m, n+\frac{1}{2}} (\cos 2\zeta) ;$$

$$u_{mn}^{s+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi r^{3/2}} e^{i(s+\frac{1}{2})\theta} e^{i(m+n)\xi} e^{i(m-n)\eta} \times$$

$$\times \left[(z_4 - i z_3) e^{-i\frac{\zeta}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (i z_4 - z_3) e^{i\frac{\zeta}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

при

$$s = -p - 2 , \quad |m| \le \frac{p}{2} , \quad |n| \le \frac{p+1}{2} , \quad p = 0, 1, 2, \ldots ;$$

$$z_3 = \sqrt{\frac{p+2}{2}+m}\, P^{\frac{p+1}{2}}_{-n,m+\frac{1}{2}}(\cos 2\zeta)\,;\quad z_4 = \sqrt{\frac{p+2}{2}-m}\, P^{\frac{p+1}{2}}_{-n,m-\frac{1}{2}}(\cos 2\zeta)\,;$$

$$v^{s+\frac{1}{2}}_{mn}(\theta,\xi,\eta,\zeta) = iH_0 u^{-s-\frac{1}{2}}_{nm}(-\theta,\xi,\eta,\zeta)\,.$$

Числа m,n изменяются в указанных пределах с единичным интервалом. Произведя квантование согласно /4/, получаем следующие коммутационные соотношения:

$$[A^{s+\frac{1}{2}}_{mn}, B^{\sigma+\frac{1}{2}}_{\mu\nu}]_+ = 0\,;\quad [A^{s+\frac{1}{2}*}_{mn}, B^{\sigma+\frac{1}{2}}_{\mu\nu}]_+ = 0\,;$$
$$[A^{s+\frac{1}{2}}_{mn}, A^{\sigma+\frac{1}{2}*}_{\mu\nu}]_+ = [B^{s+\frac{1}{2}}_{mn}, B^{\sigma+\frac{1}{2}*}_{\mu\nu}]_+ = \delta_{\sigma s}\delta_{m\mu}\delta_{n\nu}\,, \tag{/7/}$$

где скобки обозначают антикоммутатор. Таким образом, операторы A^* и A есть операторы рождения и уничтожения нейтрино, а операторы B^* и B - операторы рождения и уничтожения антинейтрино.

Операторы энергии /4/ и числа частиц равны

$$:H: = \sum_{s,m,n} \frac{ch}{r}\left|s+\frac{1}{2}\right|\left(A^{s+\frac{1}{2}*}_{mn} A^{s+\frac{1}{2}}_{mn} + B^{s+\frac{1}{2}*}_{mn} B^{s+\frac{1}{2}}_{mn}\right),$$
$$:N: = \sum_{s,m,n}\left(A^{s+\frac{1}{2}*}_{mn} A^{s+\frac{1}{2}}_{mn} + B^{s+\frac{1}{2}*}_{mn} B^{s+\frac{1}{2}}_{mn}\right). \tag{/8/}$$

Статистические средние произведений операторов рождения и уничтожения частиц, подчиняющихся коммутационным соотношениям /7/, согласно /3/, равняются

$$\langle A^{s+\frac{1}{2}*}_{mn}, B^{\sigma+\frac{1}{2}}_{\mu\nu}\rangle = 0\,;\quad \langle B^{s+\frac{1}{2}*}_{mn}, A^{\sigma+\frac{1}{2}}_{\mu\nu}\rangle = 0\,;$$

$$\langle A^{s+\frac{1}{2}*}_{mn}, A^{\sigma+\frac{1}{2}}_{\mu\nu}\rangle = \langle B^{s+\frac{1}{2}*}_{mn}, B^{\sigma+\frac{1}{2}}_{\mu\nu}\rangle = \Lambda_{|s+\frac{1}{2}|}\,\delta_{\sigma s}\delta_{m\mu}\delta_{n\mu}\,,$$

где

$$\Lambda_{|s+\frac{1}{2}|} = \left\{1+\exp\left[\frac{ch}{rtk}\left|s+\frac{1}{2}\right| - \frac{\mu}{tk}\right\}^{-1}.$$

Статистические средние операторов /8/ есть:

$$\bar{H} = \langle :H:\rangle = 4h\frac{c}{r}\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)\left(p+\frac{3}{2}\right)(p+2)\,\Lambda_{p+\frac{3}{2}}\,,$$
$$\bar{N} = \langle :N:\rangle = 4\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)(p+2)\,\Lambda_{p+\frac{3}{2}}\,.$$

Первое из них - энергия газа, второе - число частиц газа.

Чтобы проверить условия /6/, надо подсчитать статистическое среднее тензора энергии-импульса /1/, который пропорционален действительной части симметризованного тензора $i:\bar{\Psi}H_\mu\Psi_\nu:$

В базисе f имеем:

$$\Psi_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\,;\quad \Psi_1 = \frac{1}{r\sin\zeta}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \frac{1}{2r}\operatorname{ctg}\zeta H_1H_3\Psi\,;$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{r\cos\zeta}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} - \frac{1}{2r}\operatorname{tg}\zeta H_2H_3\Psi\,;\quad \Psi_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}\,.$$

Пользуясь приведенным выше решением уравнения Дирака в базисе f, нетрудно получить следующие выражения:

$$i<:\bar\Psi H_\mu \Psi_0:> = 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq 0;$$

$$i<:\bar\Psi H_0 \Psi_\nu:> = 0 \quad \text{при} \quad \nu \neq 0;$$

$$i<:\bar\Psi H_0 \Psi_0:> = \frac{2}{r} \sum_{s,m,n} |s+\frac{1}{2}| \Lambda_{|s+\frac{1}{2}|} \bar u_{mn}^{s+\frac{1}{2}} H_0 u_{mn}^{s+\frac{1}{2}};$$

$$i<:\bar\Psi H_\mu \Psi_\nu:> = 2i \sum_{s,m,n} \Lambda_{|s+\frac{1}{2}|} \bar u_{mn}^{s+\frac{1}{2}} H_\mu (u_{mn}^{s+\frac{1}{2}})_\nu$$

при $\mu, \nu \neq 0$.

Основываясь на соотношениях для специальных функций $P_{mn}(\cos 2\zeta)$, приведенных в /7/, приходим к следующим результатам:

$$i<:\bar\Psi H_\mu \Psi_\nu:> = 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq \nu;$$

$$i<:\bar\Psi H_1 \Psi_1:> = i<:\bar\Psi H_2 \Psi_2:> = i<:\bar\Psi H_3 \Psi_3:> =$$

$$= \frac{1}{3} i<:\bar\Psi H_0 \Psi_0:> = \frac{-2}{3r^4\pi^2} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(p+\frac{3}{2})(p+2)\Lambda_{p+\frac{3}{2}}.$$

Отсюда следует, что

$$<:T_{\mu\nu}:> = -ihc <:\bar\Psi H_\mu \Psi_\nu:>,$$

и, далее,

$$<:T_{\mu\nu}:> = 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq 0;$$

$$<:T_{00}:> = 3<:T_{11}:> = 3<:T_{22}:> = 3<:T_{33}:> =$$

$$= \frac{2hc}{r^4\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(p+\frac{3}{2})(p+2)\Lambda_{p+\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, для того, чтобы удовлетворить уравнениям Эйнштейна, необходимо потребовать, чтобы

$$r^2 = \frac{16 h\gamma}{3\pi c^3} \sum_{q=1}^{\infty} q(q+\frac{1}{2})(q+1)\Lambda_{q+\frac{1}{2}}.$$

Это единственное условие, накладываемое уравнениями Эйнштейна на радиус мира.

В заключение автор выражает благодарность профессору Н.Н.Боголюбову /мл./ за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

Литература

1. *Е.Н.Черникова. В сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц", вып. 6, М., Атомиздат, 1975.*
2. *Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. В сб. "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц", вып.5, М., Атомиздат, 1974.*
3. *Н.Н.Боголюбов. Лекции по квантовой статистике. Избранные труды, т. 2, Киев, 1970.*
4. *N.A.Chernikov. Acta Physica Polonica, vol. XXVI (1964). Препринт ОИЯИ, Р-1159, Дубна, 1962.*
5. *Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. ТМФ, 16, 77 /1973/.*
6. *Н.С.Шавохина. ТМФ, 10, 412 /1972/.*
7. *Н.Я.Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп, Наука, 1965.*

Рукопись поступила в издательский отдел
17 сентября 1975 года.