ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 9155

Л.Г.Заставенко

СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В МОДЕЛИ $g[\varphi^4]_2$. ТОЧНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ВНЕ РАМОК ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

1975

P2 - 9155

Л.Г.Заставенко

СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ В МОДЕЛИ $g[\varphi^4]_2$. ТОЧНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ВНЕ РАМОК ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Направлено в ТМФ

§1. Введение

1.1. Мы будем рассматривать модель квантовой теории поля, определяемую гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\int [-\frac{\delta^2}{\delta\phi(k)\delta\phi(-k)} + (k^2 + M^2)\phi(k)\phi(-k)]\,dk$$
$$+ g \int \prod_{i=1}^{4} (\phi(k_i)dk_i)\,\delta(\sum_{j=1}^{4} k_j); \qquad (1)$$

здесь импульсы k, k_i – одномерные. Преобразованием

$$k = p\sqrt{g},$$
$$\phi(k) = f(p)/\sqrt{g}, \qquad (2)$$
$$M^2 = N^2 g,$$
$$H = h\sqrt{g}$$

гамильтониан (1) приводится к виду

$$h = \frac{1}{2}\int [-\frac{\delta^2}{\delta f(p)\delta f(-p)} + (p^2 + N^2) f(p) f(-p)]\,dp$$
$$+ \int \prod_{i=1}^{4} (f(p_i)dp_i)\,\delta(\sum_{j=1}^{4} p_j), \qquad (3)$$

не содержащему размерных параметров. Согласно /1/ основное состояние уравнения Шредингера

$$(h - E_0)\Omega_0 = 0 \qquad (4)$$

следует искать в виде

$$\Omega_0 = e^{-\kappa}\ , \tag{5}$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2}\Big[\int a(q) f(q) f(-q)\,dq + \int C_4(q_1,q_2,q_3,q_4)\prod_{i=1}^{4}(f(q_i)dq_i)\,\delta\Big(\sum_{j=1}^{4} q_j\Big) + \ldots\Big] \tag{6}$$

в случае невырожденного основного состояния либо

$$f(q) = \beta\,\delta(q) + \psi(q), \tag{7}$$

$$\kappa = \frac{1}{2}\Big[\int b(q)\psi(q)\psi(-q)\,dq + \int D_3(q_1,q_2,q_3)\prod_{i=1}^{3}(\psi(q_i)dq_i)\times \delta\Big(\sum_{j=1}^{3} q_j\Big) + \int D_4(q_1,q_2,q_3,q_4)\prod_{i=1}^{4}(\psi(q_i)dq_i)\,\delta\Big(\sum_{j=1}^{4} q_j\Big) + \ldots\Big] \tag{8}$$

в случае вырожденного основного состояния. Подстановка (6)-(8) в (3)-(5) согласно [1] дает уравнения

$$a^2(p_i\ \epsilon) = p^2 + \epsilon^2 + 6\int ds\,[C_4(p,-p,s,-s;\epsilon) - C_4(0,0,s,-s;\epsilon)],$$

$$C_4(p_1,p_2,p_3,p_4;\epsilon)\,\Sigma_4 = 2 + 15\int ds\, C_6(p_1,p_2,p_3,p_4,s,-s;\epsilon),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{9}$$

$$\Sigma_{2n} C_{2n}(p_1,p_2,\ldots p_{2n};\epsilon) + \sum_{2\alpha+2\beta=2n+2}\frac{2\alpha\, 2\beta}{4}[C_{2\alpha} C_{2\beta}] = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2}\int ds\, C_{2n+2}(p_1,p_2,\ldots p_{2n}, s,-s;\epsilon),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N^2\beta + 4\beta^3 + \frac{3}{2}\int D_3(s,-s,0;\beta)\,ds = 0,$$

$$b^2(p;\beta) = p^2 + 12\beta^2 + N^2 + 6\int D_4(p,-p,s,-s;\beta)\,ds,$$

$$D_3(p_1,p_2,p_3;\beta)\sigma_3 = 8\beta + 10\int D_5(p_1,p_2,\ldots p_3,s,-s;\beta)\,ds,$$

$$\sigma_4 D_4(p_1,p_2,p_3,p_4;\beta) + \frac{3\cdot 3}{4}[D_3,D_3] = 2 + 15\int D_6(p_1,p_2,p_3,p_4;s,-s;\beta)\,ds, \tag{10}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_n(p_1,p_2,\ldots p_n;\beta)\sigma_n + \sum_{\alpha+\beta=n+2}\frac{\alpha\beta}{4}[D_\alpha,D_\beta] = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\int D_{n+2}(p_1,p_2,\ldots,p_n,s,-s;\beta)\,ds,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

для определения коэффициентных функций разложений (6) и (8). Здесь

$$\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} a(p_i,\epsilon),\qquad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} b(p_i,\beta), \tag{11}$$

а $[C_{2\alpha},C_{2\beta}]$, $2\alpha+2\beta=2n+2$ обозначает результат симметризации выражения

$$C_{2\alpha}(p_1,p_2,\ldots,p_{2\alpha-1},-\sum_{i=1}^{2\alpha-1}p_i)\,C_{2\beta}(p_{2\alpha},p_{2\alpha+1},\ldots p_{2n},-\sum_{j=2\alpha}^{2n}p_j)$$

по переменным $p_1,p_2,\ldots p_{2n}$. Обозначение $[D_\alpha,D_\beta]$ вводится аналогично.

В уравнениях (9) вместо N^2 введен новый параметр ϵ по формуле

$$N^2 = \epsilon^2 - 6\int C_4(0,0,s,-s;\epsilon)\,ds, \tag{12}$$

аналогичным образом в (10) первое уравнение дает

$$N^2 = -4\beta^2 - \frac{3}{2\beta}\int D_3(s,-s;0;\beta)\,ds, \tag{13}$$

так что второе уравнение системы (10) можно переписать в виде

$$b^2(p;\beta) = p^2 + 8\beta^2 + \int ds\,[6D_4(p,-p,s,-s;\beta) - \frac{3}{2\beta}D_3(s,-s;0;\beta)] \tag{10a}$$

1.2. Кажется естественным ожидать, что система уравнений (9) имеет интересующее нас решение во всей области

$$\epsilon^2 > 0 \tag{14}$$

и что система (10) имеет решение в области

$$\beta^2 > 0. \tag{15}$$

Тогда уравнения (12) и (13) определяют две функции, $N_1^2(\epsilon)$ и $N_2^2(\beta)$. В настоящей работе мы покажем, что

$$N_1^2(0) = N_2^2(0). \tag{16}$$

Аналогичным образом уравнения (6) и (8) определяют функционалы $\kappa_1(\epsilon)$ и $\kappa_2(\beta)$ в областях (14) и (15) соответственно. Из нашего рассмотрения будет следовать, что

$$\kappa_1(0) = \kappa_2(0). \tag{17}$$

§2. Доказательство равенства (16)

2.1. Из (10) видно, что коэффициентные функции D с четными номерами при $\beta \to 0$ стремятся к конечному пределу, а с нечетными номерами – исчезают. Сделав соответственно замену

$$D_{2n+1}(p_1, \dots p_{2n+1}; \beta) = \beta\, \mathcal{E}_{2n+1}(p_1, \dots p_{2n+1}; \beta), \tag{18}$$

перепишем (10, (10a) в виде

$$b^2(p;\beta) = p^2 + 8\beta^2 + \int ds[6D_4(p_1 - p, s, -s; \beta) - \frac{3}{2}\mathcal{E}_3(s, -s, 0; \beta)],$$

$$D_4(p_1, p_2, p_3, p_4; \beta)\sigma_4 + \beta^2 \frac{3\cdot 3}{4}[\mathcal{E}_3 \mathcal{E}_3] = 2 + 15\int D_6(p_1, p_2, p_3, p_4, s, -s; \beta)ds,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{10a}$$

$$\mathcal{E}_3(p_1, p_2, p_3; \beta)\sigma_3 = 8 + 10\int \mathcal{E}_5(p_1, p_2, p_3, s, -s; \beta)ds,$$

$$\mathcal{E}_5(p_1, \dots, p_5; \beta)\sigma_5 + 2\frac{3\cdot 4}{4}[\mathcal{E}_3, D_4] = 21\int \mathcal{E}_7(p_1, \dots p_5, s, -s; \beta)ds,$$

$$\mathcal{E}_{2n+1}(p_1, p_2, \dots p_{2n+1}; \beta)\sigma_{2n+1} + \sum_{2a+1+2\beta=2n+3} 2\frac{(2a+1)\,2\beta}{4}[\mathcal{E}_{2a+1} D_{2\beta}] \tag{10γ}$$

$$= \frac{(2n+3)(2n+2)}{2}\int \mathcal{E}_{2n+3}(p_1, p_2, \dots p_{2n+1}; s, -s; \beta)ds,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

2.2. Предполагая, что система (9) при $\epsilon = 0$ имеет решение $a(p;0)$, $C_4(p_1, p_2, p_3, p_4; 0), \dots$, мы покажем, что система (10a), (10γ) при $\beta = 0$ имеет решение

$$b(p;0) = a(p;0),\ D_{2n}(p_1, \dots p_{2n}; 0) = C_{2n}(p_1, \dots p_{2n}; 0),\ n = 2, 3, \dots; \tag{19}$$

$$\mathcal{E}_{2n-1}(p_1, \dots p_{2n-1}; 0) = 2nC_{2n}(p_1, p_2, \dots p_{2n-1}, 0; 0) \tag{20}$$

$$\equiv 2nC^\circ_{2n}(p_1, p_2, \dots p_{2n-1}),\ n = 2, 3, \dots$$

2.3. Для этого перепишем уравнения (9), начиная со второго, положив $\epsilon = 0$ и приняв равным нулю один из аргументов в каждой из функций C_4, C_6 … . Воспользовавшись введенным (20) обозначением $C^\circ_{2n}(p_1, p_2, \dots p_{2n-1})$ и учитывая, что согласно (9) $a(0;0) = 0$, будем иметь:

$$C^\circ_4(p_1, p_2, p_3)\cdot \Sigma^\circ_3 = 2 + 15\int ds\, C^\circ_6(p_1, p_2, p_3, s, -s),$$

$$C^\circ_{2n+2}(p_1, \dots p_{2n+1})\,\Sigma^\circ_{2n+1} + \sum_{2a-1+2\beta=2n+3} 2\frac{2a-1}{2n+2}\frac{2a\,2\beta}{4}[C^\circ_{2a} C_{2\beta}] \tag{9a}$$

$$= \frac{(2n+3)(2n+4)}{2}\int C^\circ_{2n+4}(p_1, p_2, \dots p_{2n+1}, s, -s)ds,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Здесь множитель $(2a-1)/(2n+2)$ соответствует вероятности того, что нулем окажется один из $2a-1$ свободных аргументов функции C_{2a} (последний аргумент равен, ввиду (6), минус сумме всех остальных); $\Sigma^{\circ}_{n} = \Sigma_{n}/_{\epsilon=0}$. Вводя обозначение

$$2nC^{\circ}_{2n} = \mathcal{E}'_{2n-1}, \tag{21}$$

приведем (9а) к виду

$$\mathcal{E}'_{3}(p_1,p_2,p_3)\,\Sigma^{\circ}_{3} = 8+10\int \mathcal{E}'_{5}(p_1,p_2,p_3,s,-s)\,ds,$$

$$\mathcal{E}'_{2n+1}(p_1,\dots p_{2n+1})\Sigma^{\circ}_{2n+1} + \sum_{2a-1+2\beta=2n+3} 2\,\frac{(2a-1)2\beta}{4}[\mathcal{E}'_{2a-1},C_{2\beta}] \tag{9б}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+3)}{2}\int \mathcal{E}'_{2n+3}(p_1,\dots p_{2n+1},s,-s)ds,\ n=2,3,\dots,$$

который отличается от (10γ) при $\beta=0$ лишь заменами

$$b(p;0)\to a(p,0),\ D_{2n}(p_1,\dots p_{2n};0)\to C_{2n}(p_1,\dots p_{2n};0),$$

$$\mathcal{E}_{2n+1}(p_1,\dots p_{2n+1})\to \mathcal{E}'_{2n+1}(p_1,\dots p_{2n+1}),\ 2a+1\to 2a-1. \tag{22}$$

Заметив еще, что система $(10a)$ при $\beta=0$ отличается от (9) при $\epsilon=0$ лишь заменой

$$6\int D_4(0,0,s,-s;0)\,ds \to \frac{3}{2}\int \mathcal{E}_3(s,-s,0;0)ds, \tag{23}$$

убеждаемся в справедливости утверждения пункта 2.2, поскольку согласно (21)

$$4C^{\circ}_{4} = \mathcal{E}'_{3}.$$

2.4. После этого справедливость формул (16) и (17) становится очевидной.

2.5. Формулы (22), (23) работы [1] показывают, что в правой части (12) и (13) при $\epsilon^2\to+\infty$ и при $\beta^2\to+\infty$ главными являются члены ϵ^2 и $-4\beta^2$, так что при $\epsilon^2\to+\infty$ основное состояние заведомо не вырождено, а при $\beta^2\to+\infty$ основное состояние заведомо вырождено.

Поэтому можно ожидать, что основное состояние гамильтониана (3) не вырождено в некоторой области $N^2 \geq N_1^2$ и вырождено в другой области, $N^2 < N_2^2$. Результат настоящей работы показывает, что $N_1^2 = N_2^2$.

Литература

1. Л.Г.Заставенко. ТМФ, 7, 20 (1971).
2. F.Coester, R.Haag. Phys.Rev., 117, 1137 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
10 сентября 1975 года.