СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 9100

В.П.Хен

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ БЕЛЬТРАМИ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО К КИНЕМАТИКЕ РЕАКЦИЙ МЕЖДУ АДРОНАМИ

1975

P2 - 9100

В.П.Хен

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ БЕЛЬТРАМИ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО К КИНЕМАТИКЕ РЕАКЦИЙ МЕЖДУ АДРОНАМИ

1. Введение

Обычно в любой реакции измеряются импульсы вторичных частиц. От измеренных импульсов можно перейти к скоростям частиц в данной системе отсчета. Тогда совокупность скоростей всех частиц измеренного события представится некоторой системой материальных точек в трехмерном пространстве скоростей.

Ценность такого представления кинематики обусловлена следующим фактом. Как показано в работах А.П.Котельникова /1/, В.А. Фока /2/ и Н.А.Черникова /3/, в релятивистском случае пространство скоростей обладает геометрией Лобачевского. Поэтому при анализе кинематики в пространстве скоростей появляется возможность использовать аппарат геометрии Лобачевского.

В работе показывается практическое применение геометрии Лобачевского к анализу многочастичных реакций. В начале работы приводятся необходимые сведения по аналитической геометрии Лобачевского в модели Бельтрами. Модель Бельтрами удобна тем, что прямые и плоскости Лобачевского выражаются линейными уравнениями в бельтрамиевых координатах.

Эта модель широко использовалась Черниковым, впервые сформулировавшим представление кинематики в пространстве скоростей Лобачевского /3,4/. Некоторые аспекты релятивистской кинематики в модели Бельтрами рассматривал Вик /9/ *. В данной работе приведены конкретные аналитические формулы тех геометрических образов, которые применялись для анализа реакции $\pi^- p \to p \pi^+ \pi^- \pi^-$ при 5 *ГэВ/с*.

---

*Геометрический смысл преобразований Лоренца в модели Бельтрами был указан Б.В.Оппелендером /10/.

II. Модель Бельтрами пространства скоростей Лобачевского

В работах[1-3] показано, что в релятивистском случае пространство скоростей обладает геометрией Лобачевского с кривизной, равной $-1/C^2$, где C - скорость света. В пространстве скоростей Лобачевского, по аналогии с эвклидовым пространством, можно ввести различные координатные системы. Наиболее простой и удобной для изложения аналитической геометрии Лобачевского является система координат Бельтрами. Координаты Бельтрами непосредственно связаны с измеряемыми скоростями частиц и вводятся следующим образом.

Пусть вектор $\vec{V}_{0a}$ представляет скорость частицы "а" в системе отсчета "О". В пространстве скоростей выберем произвольную точку "О" за начало декартовой системы координат XYZ. В этой системе координат вектор $\vec{V}_{0a}$ характеризуется тройкой координат $/x_a,\ y_a,\ z_a/$, являющихся его ортогональными проекциями на оси $0X$, $0Y$, $0Z$ /*рис. 1а*/.

Ортогональные компоненты скорости $/x_a,\ y_a,\ z_a/$ и называются бельтрамиевыми координатами частицы "а" в пространстве скоростей. В дальнейшем будут использоваться следующие выражения для бельтрамиевых координат:

$$x_a = \frac{P_x^a}{E^a},\quad y_a = \frac{P_y^a}{E^a},\quad z_a = \frac{P_z^a}{E^a}, \qquad /1/$$

где P_x^a, P_y^a, P_z^a, E^a - компоненты импульса и полная энергия частицы "а" в системе отсчета "О"*.

Поскольку скорости частиц ограничены скоростью света, в бельтрамиевых координатах все пространство скоростей Лобачевского заполняет эвклидов шар $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Этот шар называется моделью Бельт-

*Здесь и далее скорость света принята равной 1.

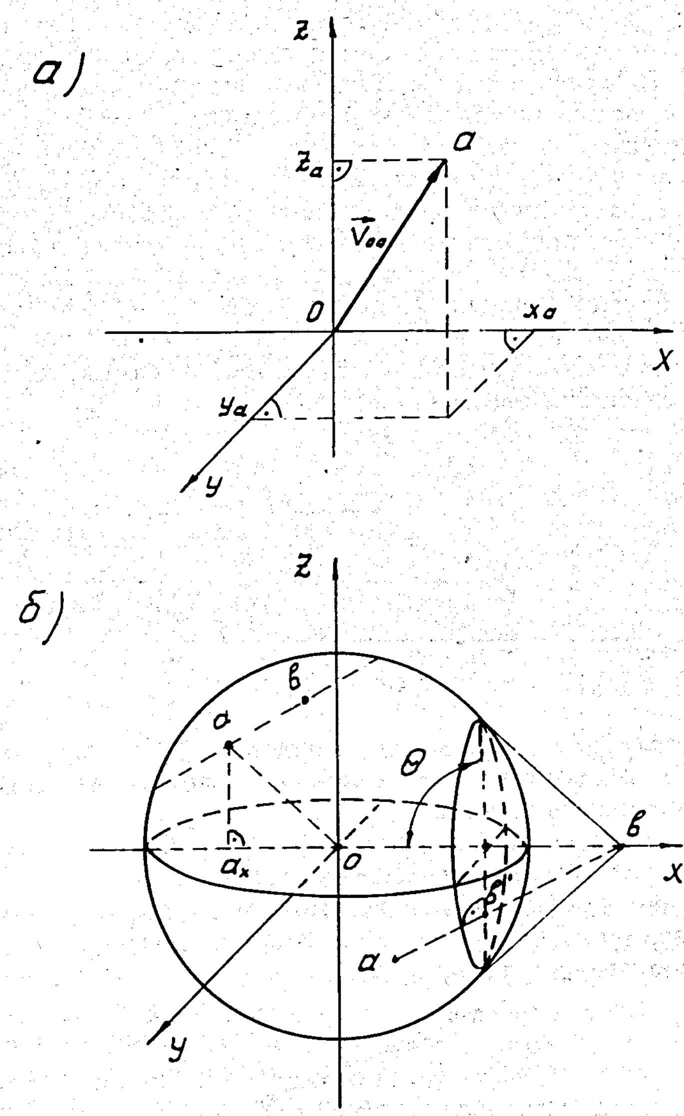

Рис. 1. а - система координат Бельтрами; б - модель Бельтрами пространства Лобачевского.

рами пространства скоростей Лобачевского[5]. Граничная сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ называется абсолютом пространства Лобачевского в модели Бельтрами.

Часть пространства, лежащая вне абсолюта, называется идеальной областью пространства Лобачевского. Формальным образом точки идеальной области можно также определять тройкой бельтрамиевых координат /λ, μ, ν /, удовлетворяющих условию $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 > 1$*.

Важным свойством модели Бельтрами является то, что прямая Лобачевского в этой модели изображается также прямой /хорда абсолюта, *рис. 1б*/. Расстояние между точками "a" / x_a, y_a, z_a / и "b" / x_b, y_b, z_b / вдоль этой прямой в геометрии Лобачевского выражается соотношением[5]

$$\rho_{ab} = \frac{1}{2}\ln a = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{1-\sqrt{1-r^2}}\right),$$

$$r = \frac{1}{\operatorname{ch}\rho_{ab}} = \frac{\sqrt{(1-x_a^2-y_a^2-z_a^2)(1-x_b^2-y_b^2-z_b^2)}}{1-x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b}. \qquad /2/$$

Расстояние ρ_{ab} между точками "a" и "b" в пространстве скоростей Лобачевского является инвариантом преобразований Лоренца.

Как видно из выражения /2/, точки абсолюта находятся на бесконечно удаленном расстоянии от любой точки пространства Лобачевского. Поэтому абсолют является геометрическим местом бесконечно удаленных точек пространства Лобачевского.

---

* Внутренние точки абсолюта $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ изображают скорости досветовых частиц с действительной массой покоя. Точки абсолюта изображают скорости световых частиц с нулевыми массами покоя. Внешние точки абсолюта изображают скорости сверхсветовых частиц с мнимой массой покоя.

Если одна из точек /"b"/ совпадает с началом координат, то выражение /2/ дает расстояние ρ_{0a} точки "a" до начала координат. С учетом выражений /1/ его можно записать в виде

$$\rho_{0a} = \frac{1}{2}\ln\frac{E^a + P^a}{E^a - P^a}.$$

В физике величину ρ_{0a} называют быстротой частицы "a" вдоль ее импульса $\overline{P^a}$. Аналогично можно вычислить расстояние от начала координат до точки "a_x"/основания перпендикуляра, опущенного из точки "a" на ось $0X$ /:

$$\rho_{0a_x} = \frac{1}{2}\ln\frac{E^a + P_x^a}{E^a - P_x^a}.$$

Если ось $0X$ считать за ось реакции, то величина ρ_{0a_x} является продольной быстротой частицы "a" /*рис. 1б*/.

Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятие расстояния между реальными и идеальными точками пространства Лобачевского. В случае, если точка "a" / x_a, y_a, z_a / лежит внутри, а точка "b" / λ_b, μ_b, ν_b / - вне абсолюта, то выражение /2/ для расстояния становится комлексным числом. Действительно, координаты идеальной точки "b" удовлетворяют условию $\lambda_b^2 + \mu_b^2 + \nu_b^2 > 1$. Поэтому величина a в выражении /2/ всегда отрицательна.

Логарифм отрицательной величины a будет комплексным числом

$$R_{ab} = \frac{1}{2}\ln a = \frac{1}{2}\ln|a|' + i\frac{\pi}{2} = \rho_{ab'} + i\frac{\pi}{2}, \qquad /3/$$

которое представляет расстояние между идеальной точкой "b" и реальной точкой "a" в геометрии Лобачевского. Его мнимая часть постоянна и равна $\pi/2$. Реальная часть комплексного расстояния /3/ представляет расстояние от точки "a" до некоторой реальной точки "b'". Очевидно, что положение точки "b'" однозначно связано с положением идеальной точки "b".

Именно точка "b'" является полярно сопряженной точке "b" относительно абсолюта. Понятие полярной сопряженности состоит в следующем[6]. Любой точке "b" вне абсолюта однозначно соответствует плоскость, пересекающая абсолют /называемая полярной/. Геометрически эту плоскость можно построить таким образом. Из точки "b" проводим конус касательных прямых к абсолюту. Плоскость круга, граничными точками которого служат точки касания, является полярной плоскостью точки "b". Сама точка "b" называется полюсом плоскости этого круга /*рис. 1б*/.

Точка "b′" лежит в полярной плоскости идеальной точки "b". Она является точкой пересечения прямой "ab" с этой плоскостью /*рис. 1б*/. Отметим, что все прямые, которые сходятся в некоторой идеальной точке "b", в геометрии Лобачевского всегда перпендикулярны полярной плоскости этой точки. Поэтому реальная часть расстояния /3/ представляет расстояние точки "a" до полярной плоскости идеальной точки "b".

III. Геометрические образы в пространстве Лобачевского

Здесь приводится аналитическое представление основных геометрических образов в пространстве Лобачевского

1. Прямая

Прямая Лобачевского определяется заданием бельтрамиевых координат пары точек "a" и "b". Она представляется системой уравнений /5/:

$$\frac{x - x_a}{\ell} = \frac{y - y_a}{m} = \frac{z - z_a}{n}\,, \qquad /4/$$

где x, y, z - бельтрамиевы координаты произвольной точки прямой Лобачевского, а коэффициенты ℓ, m, n можно найти из решения системы уравнений

$$\ell : m : n = (x_b - x_a) : (y_b - y_a) : (z_b - z_a)\,.$$

Как видно из уравнения /4/, в модели Бельтрами прямая Лобачевского изображается частью эвклидовой прямой, лежащей внутри абсолюта /*рис. 1б*/.

2. Плоскость

Плоскость Лобачевского определяется тройкой точек "a", "b" и "d". Она представляется линейным уравнением вида /5/

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \delta\,, \qquad /5/$$

где x, y, z - бельтрамиевы координаты произвольной точки плоскости, а коэффициенты λ, μ, ν находятся из решения системы уравнений

$$\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i = \delta\,, \quad i = a, b, d. \qquad /6/$$

Значение величины δ равно нулю /единице/, если плоскость проходит /не проходит/ через начало координат.

В силу линейности уравнения /5/ в модели Бельтрами плоскость Лобачевского изображается частью эвклидовой плоскости, лежащей внутри абсолюта /круг, *рис. 1б*/. Координаты полюса (λ, μ, ν) этого круга и являются коэффициентами плоскости /5/.

3. Угол между двумя плоскостями

В пространстве Лобачевского стандартным образом определяется угол θ между плоскостями $(\lambda_a, \mu_a, \nu_a)$ и $(\lambda_b, \mu_b, \nu_b)$, который можно вычислить по формуле /*рис. 1б*/

$$\cos\theta = B = \frac{\delta_a \delta_b - \lambda_a \lambda_b - \mu_a \mu_b - \nu_a \nu_b}{\sqrt{(\lambda_a^2 + \mu_a^2 + \nu_a^2 - \delta_a^2)(\lambda_b^2 + \mu_b^2 + \nu_b^2 - \delta_b^2)}}\,. \qquad /7/$$

Если прямая пересечения этих плоскостей находится вне абсолюта, то понятие угла не имеет смысла. Поэтому плоскости, пересекающиеся под действительным углом θ в пространстве Лобачевского, должны удовлетворять условию $|B| \leq 1$. В случае, если $|B| > 1$, то угол θ становится мнимым.

4. Поверхность вращения

Поверхность вращения в пространстве Лобачевского, аналогично поверхности вращения в эвклидовом пространстве, характеризуется постоянным расстоянием любой ее точки "а" /x, y, z / до некоторого центра вращения "с"/ x_c, y_c, z_c /. Но, в отличие от эвклидового, в пространстве Лобачевского существуют поверхности вращения, центр которых находится в идеальной области /не принадлежит реальному пространству Лобачевского/. Поэтому радиус вращения R в общем случае является комплексным числом. При помощи выражений /2/ и /3/ можно получить выражение для гиперболического косинуса комплексного радиуса R в виде

$$\mathrm{ch}\, R = \frac{1 - xx_c - yy_c - zz_c}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2 - z^2)(1 - x_c^2 - y_c^2 - z_c^2)}} . \qquad /8/$$

В зависимости от положения центра "с" относительно абсолюта поверхность вращения в пространстве Лобачевского называют сферой ($x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 < 1$), орисферой ($x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 = 1$) и поверхностью равных расстояний ($x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 > 1$). Очевидно, сфера характеризуется действительным, орисфера - бесконечно большим и поверхность равных расстояний - комплексным значениями радиуса вращения *.

В бельтрамиевых координатах поверхность вращения выражается алгебраическим уравнением второго порядка. Это легко увидеть, если возвести в квадрат обе части выражения /8/. Это уравнение представляет эвклидов эллипсоид вращения. Ось вращения этого эллипсоида совпадает с малой полуосью и всегда направлена к началу координат. Эллипсоиды, не касающиеся абсолюта, касающиеся его в одной точке и касающиеся по окружности,

* Реальная часть комплексного радиуса вращения представляет расстояние любой точки поверхности вращения до полярной плоскости идеального центра вращения. Поэтому все точки поверхности вращения вокруг идеального центра находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости /отсюда и ее название - поверхность равных расстояний/.

изображают, соответственно, сферы орисферы и поверхности равных расстояний /*рис. 2а*/ *.

В заключение этого раздела укажем, что все формулы двумерной геометрии Лобачевского получаются из формул пространственной геометрии при $z = \nu = 0$. Соответственно везде вместо слова "плоскость" нужно использовать слово "прямая". Например, вместо угла между плоскостями формула /7/ при $\nu_a = \nu_b = 0$ дает величину угла между парой прямых на плоскости Лобачевского.

IV. *Применение геометрии Лобачевского к анализу кинематики многочастичных реакций*

Рассмотрим реакцию вида

$$a + b \to A + B, \quad A \to 1 + 2, \quad B \to 3 + 4 + 5 . \qquad /9/$$

Ортогональные компоненты скоростей частиц реакции /9/ в некоторой системе отсчета /например, с.ц.м. реакции/ можно выразить соотношениями

$$x_i = \frac{P_x^i}{E^i}, \quad y_i = \frac{P_y^i}{E^i}, \quad z_i = \frac{P_z^i}{E^i}, \quad i = a, b, A, B, 1, 2, 3, 4, 5. \qquad /10/$$

*Скольжения точки "а" по поверхности вращения в пространстве скоростей Лобачевского образуют группу Лоренца. Действительно, скольжение по сфере представляет обычное эвклидово вращение, скольжение по орисфере - вращение с бесконечно большим радиусом и скольжение по поверхности равных расстояний - сдвиг вдоль полярной плоскости идеального центра вращения. Такое представление движений пространства Лобачевского в виде вращений использовалось П.А.Широковым в модели Клейна-Пуанкаре [7].

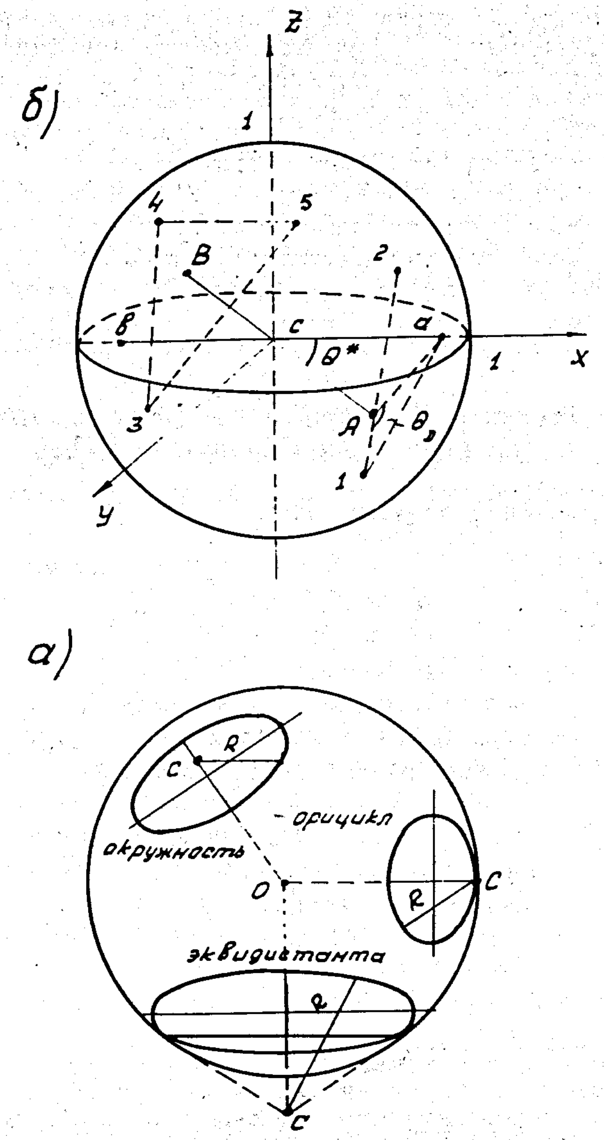

Рис. 2. а - сечения эллипсоидов вращений, изображающих различные типы поверхностей вращения пространства Лобачевского в модели Бельтрами /плоскостями, проходящими через малые полуоси эллипсоидов/; б - кинематика многочастичной реакции в модели Бельтрами пространства скоростей Лобачевского.

Выражения /10/ являются бельтрамиевыми координатами частиц реакции /9/ в пространстве скоростей Лобачевского /*рис. 2б*/. В дальнейшем через m_i будем обозначать массы частиц реакции /9/.

Обычно пару частиц 1 и 2 характеризуют их эффективной массой m_A. Очевидно, что вместо массы m_A пару частиц можно характеризовать расстоянием ρ_{12} между точками 1 и 2 в пространстве скоростей Лобачевского /*рис. 2б*/. Расстояние ρ_{12} можно вычислить по формуле /2/, подставляя в нее бельтрамиевые координаты частиц 1 и 2. С массой m_A оно связано соотношением

$$m_A^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \operatorname{ch} \rho_{12} .$$

Для характеристики рассеяния частицы A обычно используется квадрат переданного четырехимпульса t от частицы "а" к частице A. Так как передача t зависит от бельтрамиевых координат пары частиц "а" и A, то она должна быть связана с длиной отрезка ρ_{aA} /*рис. 2б*/. Выражение для передачи t имеет вид/8/

$$t = m_a^2 + m_A^2 - 2(E^a E^A - \vec{P}^a \vec{P}^A) . \qquad /11/$$

Используя выражения /10/ и /11/, передачу t можно записать в виде

$$t = m_a^2 + m_A^2 - 2m_a m_A \operatorname{ch} \rho_{aA} .$$

Поэтому, наряду с передачей t, рассеяние частицы A можно характеризовать длиной отрезка ρ_{aA}.

Тройку частиц 3, 4 и 5 характеризуют их эффективной массой m_B. Масса m_B связана с длинами отрезков ρ_{34}, ρ_{35} и ρ_{45} в пространстве скоростей Лобачевского соотношением/3/

$$m_B^2 = m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + 2(m_3 m_4 \operatorname{ch}\rho_{34} + m_3 m_5 \operatorname{ch}\rho_{35} + m_4 m_5 \operatorname{ch}\rho_{45}) .$$

При анализе спина частицы A обычно исследуют угловое распределение вылета частицы 1 в системе Готфрида-Джексона. Геометрия Лобачевского позволяет вычислить углы θ_D Джексона и $\Phi_{Т-Я}$ Треймана-Янга без перехода в систему покоя частицы A. По определению, угол θ_D является углом треугольника $aA1$ в простран-

стве скоростей, противолежащем стороне a1 /*рис. 2б/*. Для треугольника aA1 в геометрии Лобачевского существует теорема косинусов /5/

$$\operatorname{ch}\rho_{a1} = \operatorname{ch}\rho_{aA}\operatorname{ch}\rho_{A1} - \operatorname{sh}\rho_{aA}\cdot\operatorname{sh}\rho_{A1}\cos\theta_D \,. \qquad /12/$$

Из выражения /12/ легко вычислить угол θ_D.

Угол $\Phi_{T-Я}$ является углом между плоскостью рождения и плоскостью распада частицы A. Плоскость рождения $(\lambda_R, \mu_R, \nu_R)$ в пространстве скоростей Лобачевского находим из решения системы уравнений /плоскость треугольника aAc, *рис. 2б/*:

$$\lambda_R x_n + \mu_R y_n + \nu_R z_n = \delta_R\,, \quad n = a, A, c.$$

Плоскость распада $(\lambda_r, \mu_r, \nu_r)$ находим из решения системы уравнений /плоскость треугольника 1a2, *рис. 2б/*:

$$\lambda_r x_n + \mu_r y_n + \nu_r z_n = \delta_r\,, \quad n = 1, a, 2.$$

Угол между этими плоскостями можно вычислить по формуле /7/.

Таким образом, геометрия Лобачевского позволяет упростить вычисление стандартных характеристик многочастичных реакций. Именно: их можно вычислять, не делая никаких преобразований Лоренца. Достаточно только знания бельтрамиевых координат частиц реакции /9/ в некоторой системе отсчета /выбранной произвольно/.

V. *Заключение*

Кинематика реакций получает наглядное лоренц-инвариантное представление в пространстве скоростей Лобачевского. Такое представление, упрощая вычисления, кроме того, позволяет использовать геометрический способ введения новых инвариантов группы Лоренца. Именно, можно строить инварианты как характеристики геометрических образов в пространстве скоростей Лобачевского.

В заключение я глубоко благодарен Э.Г.Бубелеву за научное руководство и В.М.Поповой за критические замечания.

Литература

1. *А.П.Котельников. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. Сб. "In memorian N.I.Lobatchevskij", 2, 37, Изд. КГУ, Казань, 1927.*
2. *В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, М., 1955.*
3. *Н.А.Черников. а/ Научные доклады высшей школы, физ.-мат. науки, 2, 158, 1958; б/ Препринт ИТФ-68-44, Киев, 1968 /Диссертация. ЛГУ, Ленинград/; в/ Межд. зимн. школа теор. физ. при ОИЯИ, 3, 151, Дубна, 1964. ОИЯИ, Р-1772, Дубна, 1964.*
4. *Н.А.Черников. Геометрия Лобачевского и релятивистская механика. ЭЧАЯ, 4, 3, 773, Атомиздат, М., 1973.*
5. *М.Г.Андриевская. Аналитическая геометрия в пространстве Лобачевского. Изд. КГУ, Киев, 1963.*
6. *Н.В.Ефимов. Высшая геометрия. Изд. "Наука", М., 1971.*
7. *П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Изд. КГУ, Казань, 1966.*
8. *А.М.Балдин, В.И.Гольданский, В.М.Максименко, И.Л.Розенталь. Кинематика ядерных реакций. Атомиздат, М., 1968.*
9. *G.C.Wick. Visual Aids to Relativistic Kinematics. Preprint CERN, 73-31, Geneva, 1973.*
10. *Б.В.Оппелендер. Геометрический смысл преобразований Лоренца. Тезисы докл. V Всесоюзной конф. по совр. проблемам геометрии, 155, СГУ, Самарканд, 1972.*

Рукопись поступила в издательский отдел 4 августа 1975 года.