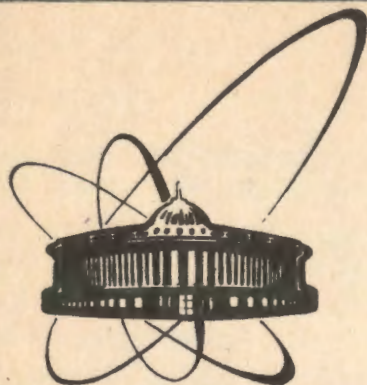


91-520



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2-91-520

В. Л. Любошиц

УГЛОВАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ТРАНСПОРТНОЕ
СЕЧЕНИЕ ДИФРАКЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ
НА "ЧЕРНОМ" ШАРЕ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1991

1. Амплитуда упругого рассеяния в центрально-симметричном поле имеет, как известно, структуру

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell} (2\ell + 1)(S_{\ell} - 1)P_{\ell}(\cos\theta), \quad (1)$$

где θ - угол рассеяния, $k = \frac{p}{\hbar}$, p - импульс частицы, $P_{\ell}(\cos\theta)$ - полиномы Лежандра, S_{ℓ} - элементы S -матрицы в упругом канале, удовлетворяющие требованиям унитарности $|S_{\ell}| \leq 1$.

В случае дифракции волн и частиц на полностью поглощающем ("черном") шаре, радиус которого a гораздо больше длины волны $\lambda = \frac{1}{k}$, мы можем считать, что при орбитальных моментах $\ell < ka$

$$S_{\ell} = 0, \quad (2)$$

а при орбитальных моментах $\ell > ka$

$$S_{\ell} = 1. \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) амплитуда дифракции на "черном" шаре* принимает вид ('1', § 142):

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{\ell=0}^n (2\ell + 1)P_{\ell}(\cos\theta), \quad (4)$$

где число n есть целая часть параметра ka :

$$n + 1 > ka > n \gg 1. \quad (5)$$

Интегральное сечение дифракции, вычисленное с помощью амплитуды (4), составляет

$$\sigma_{\text{дифр.}} = 2\pi \int_0^{\pi} |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^n (2\ell + 1) = \frac{\pi}{k^2} (n+1) = \pi a^2. \quad (6)$$

* В частности, речь может идти об упругом рассеянии быстрых адронов на тяжелом ядре.

В то же время, согласно оптической теореме, суммарное эффективное сечение поглощения и дифракционного рассеяния определяется по формуле

$$\sigma_{\text{полн.}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}f(0) = \frac{2\pi}{k^2} (n+1)^2 = 2\sigma_{\text{дифр.}} \quad (7)$$

т.е. сечение поглощения равно по величине полному сечению упругого рассеяния. Мы видим, что при $\theta = 0$ выполняется точное равенство

$$f(0) = ik \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta, \quad (8)$$

которое является прямым следствием условия унитарности S-матрицы в применении к взаимодействию падающего пучка с полностью поглощающим сферическим рассеивателем. При ненулевых углах рассеяния амплитуда (4) удовлетворяет аналогичному соотношению

$$f(\theta_{\vec{n}, \vec{n}'}) = \frac{ik}{2\pi} \int f(\theta_{\vec{n}, \vec{n}''}) f^*(\theta_{\vec{n}', \vec{n}''}) d\Omega_{\vec{n}''} \quad (9)$$

Здесь \vec{n} и \vec{n}' - единичные векторы вдоль направления падающего и рассеянного пучков соответственно, а интегрирование проводится по всем направлениям промежуточного вектора \vec{n}'' .

2. Мы хотим обратить внимание на то, что именно унитарная амплитуда (4) правильно описывает дифракцию коротковолнового излучения на "черном" шаре при произвольных углах θ . Обычно дифракционное рассеяние рассматривается только в области малых углов $\theta \ll 1$, когда оправдан эйкональный подход. При $\theta \ll 1$ и $n \gg 1$ формула (4) с учетом приближенного равенства

$$P_\ell(\cos\theta) \approx J_0(\sqrt{\ell(\ell+1)}\theta) \quad (10)$$

переходит в выражение

$$f(\theta) \approx \frac{ika}{k} \int_0^{\theta} J_0(\ell\theta)\ell d\ell = \frac{ia}{\theta} J_1(ka\theta), \quad (11)$$

совпадающее с известным результатом классической теории Фраунгоферовской дифракции электромагнитных волн (11, § 142; 12, § 61). Здесь и в дальнейшем J_m - функция Бесселя m -го порядка. Существенно, что при $ka \gg 1$ основной вклад в полное сечение упругого рассеяния на "черном" шаре связан с дифракцией

именно на малые углы $\theta \ll 1$, при которых выражение (11) является хорошим приближением. Действительно, распространяя интегрирование по углам до бесконечности, мы можем написать

$$\sigma_{\text{дифр.}} \approx 2\pi \int_0^\infty |f(\theta)|^2 \theta d\theta = 2\pi a^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(ka\theta)}{\theta} d\theta = \pi a^2,$$

что совпадает с (6).

Вместе с тем транспортное сечение дифракционного рассеяния на "черном" шаре

$$\sigma_{\text{tr}} = \int |f(\theta)|^2 (1 - \cos\theta) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 (1 - \cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (12)$$

определяется в основном областью больших углов $\theta \sim 1$, в которой формула (11) для амплитуды упругого рассеяния заведомо неверна*. Поэтому, чтобы найти транспортное сечение дифракции, следует взять за основу вместо (11) более общую формулу (4).

Подставляя в (12) амплитуду (4), находим

$$\sigma_{\text{tr}} = \frac{\pi}{2k^2} \int_{-1}^1 \sum_{\ell=0}^n \sum_{\ell'=0}^n (2\ell+1)(2\ell'+1) P_\ell(x) P_{\ell'}(x) (1-x) dx$$

(здесь интегрирование проводится по переменной $x = \cos\theta$). При этом соотношение ортонормировки для полиномов Лежандра

*Вопрос о транспортном сечении при малоугловом потенциальном рассеянии недавно обсуждался в работе 13. При этом предполагалось, что область малых углов дает определяющий вклад не только в полное сечение упругого рассеяния, но и в транспортное сечение; тогда транспортное сечение может быть вычислено с помощью формулы

$$\sigma_{\text{tr}} = \pi \int_0^\infty |f(\theta)|^2 \theta^3 d\theta.$$

В рассматриваемом нами случае дифракции на "черном" шаре такой подход некорректен: расчет транспортного сечения на основе указанной формулы с амплитудой рассеяния (11) приводит к выражению, расходящемуся на верхнем пределе.

$$\int_{-1}^1 P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \quad (13)$$

и известное равенство (см., например¹¹, § 29)

$$\int_{-1}^1 P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) x dx = \frac{2\ell}{(2\ell+1)(2\ell-1)} \delta_{\ell,\ell'+1} + \frac{2(\ell+1)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} \delta_{\ell,\ell'-1}, \quad (14)$$

получаем с учетом (5):

$$\sigma_{tr} = \frac{\pi}{k^2} \left[\sum_{\ell=0}^n (2\ell+1) - \sum_{\ell=0}^n \ell - \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \right] = \frac{\pi}{k^2} (n+1) = \frac{\pi a}{k}. \quad (15)$$

Таким образом, имеем отношение

$$\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_{дифр.}} = \frac{1}{ka} \ll 1. \quad (16)$$

При облучении "черного" шара потоком частиц I, каждая из которых имеет импульс $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, на шар действует сила

$$\vec{F} = I(\sigma_{погл.} + \sigma_{tr}) \vec{p}.$$

В первом приближении по параметру $1/ka$ сила $\vec{F} = \pi I \hbar a^2 \vec{k}$. С учетом (15) дифракционная поправка к силе, обусловленная передачей импульса при упругом рассеянии, имеет величину

$$\vec{F}_{дифр.} = \frac{1}{ka} \vec{F} = \pi I \hbar a \vec{n}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}. \quad (17)$$

3. Можно показать (см. приложение, а также⁴, с.1040), что справедливо следующее равенство:

$$\sum_{\ell=0}^n (2\ell+1) P_{\ell}(\cos\theta) = (n+1) \frac{P_n(\cos\theta) - P_{n+1}(\cos\theta)}{1 - \cos\theta}. \quad (18)$$

С учетом (18) формулу (4) для амплитуды дифракционного рассеяния на "черном" шаре можно переписать в виде

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} (n+1) \frac{P_n(\cos\theta) - P_{n+1}(\cos\theta)}{1 - \cos\theta}, \quad (19)$$

где целое число n по-прежнему определяется в соответствии с (5)*.

Выражение (19) удобно для анализа дифракционного рассеяния на большие углы. При углах рассеяния, удовлетворяющих условиям квазиклассичности

$$\theta \gg \frac{1}{n} \approx \frac{1}{ka}, \quad (\pi - \theta) \gg \frac{1}{n}, \quad n \gg 1, \quad (20)$$

выполняется приближенное соотношение (см., например,¹¹, § 49; ¹⁵, с.164):

$$P_n(\cos\theta) \approx \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})\theta + \frac{\pi}{4}]}{\sqrt{\sin\theta}}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (19) и учитывая, что

$$\sin[(n + \frac{1}{2})\theta + \frac{\pi}{4}] - \sin[(n + \frac{3}{2})\theta + \frac{\pi}{4}] =$$

$$= 2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos[(n+1)\theta - \frac{3\pi}{4}],$$

находим

$$f(\theta) = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi \sin\theta}} \frac{\cos[(n+1)\theta - \frac{3\pi}{4}]}{2 \sin(\frac{\theta}{2})} (1 + O(\frac{1}{n})), \quad (22)$$

*С помощью (19) легко получить результат (15) для транспортного сечения. Комбинируя в формуле (12) эквивалентные выражения (4) и (19) для амплитуды $f(\theta)$, имеем

$$\sigma_{tr} = \frac{\pi}{2k^2} \int_{-1}^1 \sum_{\ell=0}^n (2\ell+1) P_{\ell}(x) (n+1) (P_n(x) - P_{n+1}(x)) dx.$$

Отсюда с учетом соотношения ортонормировки (13) сразу следует, что

$$\sigma_{tr} = \frac{\pi}{k^2} (n+1) = \frac{\pi a}{k}.$$

или в силу (5)

$$f(\theta) \approx i \sqrt{\frac{2a}{\pi k \sin \theta}} \frac{\cos(ka\theta - \frac{3\pi}{4})}{2 \sin(\theta/2)}. \quad (23)$$

В интервале $\frac{1}{ka} \ll \theta \ll 1$ имеем

$$f(\theta) \approx i \sqrt{\frac{2a}{\pi k \theta}} \frac{\cos(ka\theta - \frac{3\pi}{4})}{\theta}. \quad (24)$$

Легко убедиться в том, что основной вклад в транспортное сечение дает интервал углов (20), в котором справедлива формула (23). Действительно, расчет транспортного сечения по общей формуле (12) с амплитудой (23) дает

$$\sigma_{tr} \approx \frac{2a}{k} \int_0^{\pi} \cos^2(ka\theta - \frac{3\pi}{4}) d\theta.$$

При больших аргументах квадрат косинуса можно заменить его средним значением 1/2, и мы приходим к выражению (15).

Легко видеть, что при углах рассеяния $\theta \sim 1$ осциллирующая амплитуда (23) неустойчива по отношению к малым изменениям волнового числа $\Delta k > 1/a$ (или радиуса $\Delta a > \lambda$). Однако после усреднения квадрата косинуса по разбросу импульсов $\Delta r \gg \hbar/a$, $\Delta r \ll r$ дифференциальное сечение упругого рассеяния на угол $\theta \sim 1$, вычисленное на основе (23), принимает определенное значение

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{a}{2\pi k \sin \theta (1 - \cos \theta)}. \quad (25)$$

Как видно из формулы (19), неустойчивым по отношению к малым изменениям длины волны излучения и радиуса шара является также знак амплитуды рассеяния "назад". Вместе с тем дифференциальное сечение упругого рассеяния "назад" однозначно:

$$\frac{d\sigma(\pi)}{d\Omega} = \frac{a^2}{4}. \quad (26)$$

При углах, близких к π , формула (19) с учетом приближенного равенства

$$P_n(\cos \theta) = (-1)^n P_n(\cos \delta) \approx (-1)^n J_0(n\delta) \quad (10')$$

(здесь $n \gg 1$, $\delta = (\pi - \theta) \ll 1$) дает

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \approx \frac{1}{4} a^2 J_0^2(ka\delta). \quad (27)$$

При $\delta \ll 1$, $\delta \gg \frac{1}{ka}$ имеем

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \approx \frac{a}{2\pi k \delta} \cos^2(ka\delta - \frac{\pi}{4}). \quad (28)$$

Таким образом, в области основного дифракционного пика, которому соответствуют углы рассеяния $\theta \leq \lambda/a$, дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma/d\Omega \sim a^4/\lambda^2$. Далее в интервале $\lambda/a \leq \theta \leq 1$ величина $d\sigma/d\Omega$ быстро уменьшается ($d\sigma/d\Omega \sim \lambda a/\theta^3$) и при углах $\theta \sim 1$, $\delta = (\pi - \theta) \sim 1$ достигает значений порядка λa . При приближении к углу $\theta = \pi$ возникает относительно небольшой подъем ($d\sigma/d\Omega \sim a\lambda/\delta$), и в области $\delta \leq \lambda/a$ дифференциальное сечение $d\sigma/d\Omega \sim a^2$.

Подчеркнем, что наше рассмотрение относится к дифракционному рассеянию на "черном" шаре с очень резкой границей - предполагается, что толщина граничного переходного слоя от полной непрозрачности к полной прозрачности гораздо меньше не только радиуса шара, но и длины волны $\lambda = 1/k$. Анализ показывает, что если толщина граничного переходного слоя $b \gg \lambda$, но $b \ll a$, то соответствующие поправки к дифференциальному сечению дифракционного рассеяния на углы $\theta \ll \lambda/b$, а также к полному сечению дифракции, относительно малы (порядка b/a). Однако в этом случае при углах $\theta \geq \lambda/b$ наши результаты становятся уже некорректными. В широкой области углов $\theta \gg \lambda/b$ дифференциальное сечение дифракционного рассеяния на "черном" шаре с размытой границей становится малым по сравнению с дифференциальным сечением дифракции на шаре с резкой границей:

$$R(b) = \frac{d\sigma(b)}{d\Omega} / \frac{d\sigma(b=0)}{d\Omega} \sim \frac{\lambda^2}{b^2 \theta^2} \ll 1.$$

Это приводит к падению транспортного сечения: по порядку величины

$$\sigma_{tr} \sim \frac{\pi a}{b} \lambda^2.$$

Заметим, что значения $R(b)$ и σ_{tr} чувствительны к конкретной структуре граничного слоя.

4. Приведенные в настоящей работе соотношения описывают дифракцию коротковолнового излучения не только на "черном" шаре,

но и на полностью поглощающем диске того же радиуса, ориентированном перпендикулярно падающему пучку*.

Рассмотрим дифракционное рассеяние на "черном" экране, имеющем форму кругового кольца с внешним и внутренним радиусами a_1 и a_2 соответственно; плоскость кольца будем считать перпендикулярной начальному импульсу. Ясно, что в этом случае амплитуда дифракционного рассеяния представляет собой разность амплитуд, отвечающих круговым экранам (или шарам), имеющим радиусы a_1 и a_2 . С учетом формул (4) и (19) находим

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{\ell=m+1}^n (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos\theta) = \quad (29)$$

$$= \frac{i}{2k} \left[\sum_{\ell=0}^n (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos\theta) - \sum_{\ell=0}^m (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos\theta) \right],$$

или

$$f(\theta) = \frac{i}{2k(1 - \cos\theta)} \left[(n+1)(P_n(\cos\theta) - P_{n+1}(\cos\theta)) - (m+1)(P_m(\cos\theta) - P_{m+1}(\cos\theta)) \right]. \quad (30)$$

Здесь

$$n+1 > ka_1 > n, \quad m+1 > ka_2 > m, \quad (n-m) \gg 1. \quad (31)$$

Полное сечение дифракции, очевидно, равно площади кольца:

$$\sigma_{\text{дифр.}} = \sigma_{\text{погл.}} = \pi[(n+1)^2 - (m+1)^2] = \pi(a_1^2 - a_2^2).$$

В то же время транспортное сечение, вычисленное по формуле (12) с амплитудой (29)-(30), имеет величину (см. примечание на с.3)

$$\sigma_{\text{tr}} = \frac{\pi}{k} (a_1 + a_2) = \frac{1}{2k} L, \quad (32)$$

где L - периметр кольца (суммарная длина внешней и внутренней границ экрана).

*Это верно, конечно, только в рамках применимости рассматриваемой теории, т.е. при условии, что длина волны $\lambda=1/k$ мала по сравнению с поперечными размерами "черного" тела; при достаточно больших λ объемную мишень уже нельзя считать эквивалентной плоскому экрану.

5. В заключение заметим, что полученные результаты можно применить к задаче о дифракции электронов на тонком круговом тороидальном соленоиде с радиусом "дыры" $a \gg \lambda = 1/k$. Ранее эта проблема в рамках эйконального приближения исследовалась в нашей работе^{'6'} (см. также^{'7'}). Согласно^{'6'}, амплитуда упругого рассеяния заряженных частиц на тороидальном соленоиде (поглощение в данном случае отсутствует) связана с амплитудой дифракционного рассеяния на "черном" экране, покрывающем "дыру" соленоида, соотношением

$$f_c = (1 - \exp(i e \phi / \hbar c)) f_{\text{э}}, \quad (33)$$

где e - заряд, ϕ - магнитный поток внутри соленоида. Анализ показывает, что с учетом условия унитарности равенство (33) должно выполняться при произвольных углах рассеяния, а не только в области применимости эйконального приближения $\theta \ll 1$. В случае рассеяния электронов на круговом тороидальном соленоиде, плоскость которого перпендикулярна их начальному импульсу, мы можем непосредственно воспользоваться формулами (4) и (19) со всеми вытекающими из них следствиями. В соответствии с этим эффективные сечения дифракционного рассеяния на "черном" шаре (диске) просто умножаются на фактор

$$K = 4 \sin^2 \frac{e \phi}{2 \hbar c}. \quad (34)$$

В частности, транспортное сечение при рассеянии электронов на круговом тороидальном соленоиде, ориентированном перпендикулярно падающему пучку, описывается формулой

$$\sigma_{\text{tr}} = 4 \sin^2 \frac{e \phi}{2 \hbar c} \cdot \frac{\pi a}{k}. \quad (35)$$

Автор выражает глубокую благодарность М.И.Подгорецкому и Я.А.Сморозинскому за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим разложение функции

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{\ell=0}^n (2\ell + 1) P_{\ell}(x) (1 - x) \quad (\text{П.1})$$

по полиномам Лежандра в интервале $[-1, 1]$. Мы можем написать

$$\mathcal{F}(x) = \sum_m a_m P_m(x), \quad (П.2)$$

где согласно соотношению ортонормировки (13)

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_0^1 \mathcal{F}(x) P_m(x) dx. \quad (П.3)$$

Подставляя (П.1) в (П.3) и используя соотношения (13) и (14), получаем

$$a_m = (2m+1) - m - (m+1) = 0 \text{ при } m \leq (n-1),$$

$$a_n = (2n+1) - n = n+1,$$

$$a_{n+1} = -(n+1),$$

$$a_m = 0 \text{ при } m \geq n+2.$$

Таким образом,

$$\mathcal{F}(x) = (n+1)(1-x)(P_n(x) - P_{n+1}(x)), \quad (П.4)$$

т.е. справедливо равенство (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. - Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. - Теория поля. М.: Наука, 1988.
3. Дьяконов М.И., Хаецкий А.В. - ЖЭТФ, 1991, т.99, с.1066.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. - Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ТИФМП, 1963.
5. Янке Е., Эмде Ф., Лем Ф. - Специальные функции. М.: Наука, 1964.
6. Любошиц В.Л., Смородинский Я.А. - ЖЭТФ, 1978, т.75, с.40; ОИЯИ, P2-11189, Дубна, 1978.
7. Афанасьев Г.Н. - ЭЧАЯ, 1990, т.21, с.172.

Рукопись поступила в издательский отдел

27 ноября 1991 года.