объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-91-473

В.К.Мельников

РОЖДЕНИЕ И УНИЧТОЖЕНИЕ СОЛИТОНОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ

Направлено в Труды II Международной конференции по ренормгруппе. Дубна, сентябрь 1991

1991

Рождение и уничтожение солитонов в нелинейных интегрируемых системах является, пожалуй, наиболее неожиданным фактом в теории этих систем, и так достаточно богатой разными неожиданностями. Хотя рождение и уничтожение солитонов является одним из наиболее распространенных процессов в природе, до самого недавнего времени казалось, что в нелинейных интегрируемых системах обнаружить это явление вряд ли удастся, т.е. нелинейные интегрируемые системы не могут описывать такие процессы. Сейчас стало ясно, что это не так, и нелинейные интегрируемые системы прекрасно подходят для этой цели.

В настоящей работе мы рассмотрим это явление на примере двух нелинейных интегрируемых систем. Первой из них послужит модифицированное уравнение Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником. Точнее, речь будет идти о следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 2\sum_{n=1}^{N}(\bar{\phi}_n p_n + \phi_n \bar{p}_n - \bar{\psi}_n q_n - \psi_n \bar{q}_n), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + u\psi_n - i\zeta_n\phi_n = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - u\phi_n + i\zeta_n\psi_n = 0, \quad n = 1, \dots, N, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial x} + uq_n - i\zeta_n p_n = \frac{\partial q_n}{\partial x} - up_n + i\zeta_n q_n = 0, \quad n = 1, \dots, N. \tag{3}$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, черта означает комплексное сопряжение. При этом нас будет интересовать случай, когда решение $u = u(x, t)$ является вещественной, достаточно быстро убывающей функцией x, а именно при любом $t \geq 0$ функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{r=0}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^r u(x,t)}{\partial x^r}\right| dx < \infty. \tag{4}$$

В соответствии с этим условием мы потребуем, чтобы решение $\phi_n = \phi_n(x, t)$, $\psi_n = \psi_n(x,t)$ системы (2) при любом $t \geq 0$ стремилось к нулю, если $x \to \pm\infty$. Далее, мы будем считать, что решение $p_n = p_n(x,t)$, $q_n = q_n(x,t)$ системы (3) при любом $t \geq 0$

стремится к бесконечности, если $x \to \pm\infty$, т.е. мы предположим, что при любом $t \geq 0$ выполняются условия

$$
\begin{aligned}
&|\phi_n(x,t)| + |\psi_n(x,t)| \to 0, \quad \text{если } x \to \pm\infty, \\
&|p_n(x,t)| + |q_n(x,t)| \to \infty, \quad \text{если } x \to \pm\infty.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Отсюда следует, что точки $\zeta = \zeta_n$ являются точками дискретного спектра оператора L вида

$$L = \Lambda\partial + U, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{6}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}(1,-1), \quad U = \begin{vmatrix} 0 & u \\ u & 0 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Очевидно, что точки $\zeta = \zeta_n$ не могут лежать на вещественной оси, т.е. $\mathrm{Im}\,\zeta_n \neq 0$, $n = 1,\ldots, N$.

Хорошо известно, что если точка $\zeta = \zeta_0$ является точкой дискретного спектра оператора L вида (6), (7), то точка $\zeta = \bar{\zeta}_0$ также является точкой дискретного спектра этого оператора. Более того, если точка $\zeta = \zeta_0$ является точкой дискретного спектра оператора L и $\zeta_0 + \bar{\zeta}_0 \neq 0$, то точки $\zeta = -\zeta_0$ и $\zeta = -\bar{\zeta}_0$ также являются точками дискретного спектра. В действительности все четыре точки ζ_0, $\bar{\zeta}_0$, $-\zeta_0$ и $-\bar{\zeta}_0$ в случае $\zeta_0 + \bar{\zeta}_0 \neq 0$ и обе точки ζ_0 и $\bar{\zeta}_0$, если $\zeta_0 + \bar{\zeta}_0 = 0$, в некотором смысле определяют одно и то же собственное значение, ибо все собственные функции, отвечающие этим собственным значениям, просто выражаются друг через друга, причем так, что правая часть уравнения (1) при этом не меняется. Поэтому для определенности мы будем всюду в дальнейшем считать, что все точки $\zeta_1,\ldots,\zeta_N$ разные и принадлежат правому верхнему квадранту комплексной плоскости ζ, т.е. $\mathrm{Re}\,\zeta_n \geq 0$, $\mathrm{Im}\,\zeta_n > 0$, $n = 1,\ldots, N$. При этом оказывается, что точки $\zeta = \zeta_n$ дискретного спектра оператора L вида (6), (7) являются функциями времени, удовлетворяющими уравнению

$$r_n \frac{d\zeta_n}{dt} - i(W_n + \gamma_n \bar{W}_n) = 0, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{8}$$

где r_n – кратность собственного значения $\zeta = \zeta_n$,

$$\gamma_n = \begin{cases} 0, & \text{если } \zeta_n + \bar{\zeta}_n \neq 0, \\ 1, & \text{если } \zeta_n + \bar{\zeta}_n \equiv 0, \end{cases} \tag{9}$$

а величины W_n определяются равенством

$$W_n = \phi_n(x,t)\,q_n(x,t) - \psi_n(x,t)\,p_n(x,t) \tag{10}$$

и в силу уравнений (2), (3) не зависят от x. Здесь необходимо отметить следующее. Из уравнения (8) следует, что если точка $\zeta = \zeta_{n_0}$ в какой-то момент времени $t = t'$ находилась на мнимой оси, то и во все остальные моменты времени эта точка может принадлежать мнимой оси. В то же время нетрудно понять, что в процессе эволюции вещественная часть какого-нибудь из комплексных собственных значений, например ζ_{n_1}, может обратиться в нуль, т.е. само ζ_{n_1} может в момент времени $t = t'$ попасть на мнимую ось, а при $t > t'$ снова ее покинуть. Таким образом, мы видим, что обращение в нуль величины $\mathrm{Re}\,\zeta_n$ в момент времени $t = t'$ еще не решает однозначно вопрос о том, по какому пути эволюционировало собственное значение $\zeta = \zeta_n$ при $t < t'$ и как оно будет эволюционировать при $t > t'$. Это значит, что необходимо какое-то дополнительное правило, позволяющее в критические моменты времени решать вопрос о путях эволюции того или иного собственного значения. Таким правилом может явиться требование непрерывности какого-то числа производных по времени функции $\zeta_n = \zeta_n(t)$. Существуют и другие правила выбора, о которых будет сказано ниже. Наконец, заметим, что согласно (8) в процессе эволюции мнимая часть какого-нибудь из собственных значений, скажем $\zeta_{n'}$, также может обратиться в нуль, т.е. само $\zeta_{n'}$ в процессе эволюции может попасть на вещественную ось. Это приводит к тому, что соответствующий этому собственному значению солитон исчезает. Более того, если в дальнейшем величина $\zeta_{n'}$ покинет вещественную ось, то исчезнувший на время солитон появится вновь, т.е. он как бы рождается заново. Очевидно, что появление нового собственного значения и рождение соответствующего ему солитона может происходить и без предварительного их исчезновения.

В качестве второго примера мы рассмотрим уравнение sine-Gordon с самосогласованным источником, т.е. рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t\,\partial x} + \sin\theta = 4\sum_{n=1}^{N}(\phi_n p_n + \bar{\phi}_n \bar{p}_n - \psi_n q_n - \bar{\psi}_n \bar{q}_n), \tag{11}$$

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\psi_n - i\zeta_n\phi_n = \frac{\partial\psi_n}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\phi_n + i\zeta_n\psi_n = 0, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{12}$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x} q_n - i\zeta_n p_n = \frac{\partial q_n}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x} p_n + i\zeta_n q_n = 0, \quad n = 1, \dots, N. \tag{13}$$

Нас будет интересовать случай, когда решение $\theta = \theta(x, t)$ при $x \to \pm\infty$ стремится к некоторым кратным 2π величинам настолько быстро, что при любом $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ |\sin\theta(x,t)| + |\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}| \} dx < \infty. \tag{14}$$

Кроме того, мы будем предполагать, что решения $\phi_n = \phi_n(x, t)$, $\psi_n = \psi_n(x, t)$ и $p_n = p_n(x, t)$, $q_n = q_n(x, t)$ соответственно уравнений (12) и (13) при любом $t \geq 0$ удовлетворяют условиям (5), и, следовательно, точки $\zeta = \zeta_n$ являются точками дискретного спектра оператора $X - i\zeta\Lambda$ вида

$$X - i\zeta\Lambda = \partial + V - i\zeta\Lambda, \tag{15}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(1, -1)$, а матрица V получается из определенной согласно (7) матрицы ΛU, если в ней положить $u = \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}$, т.е.

$$V = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\theta}{\partial x} \\ -\frac{\partial\theta}{\partial x} & 0 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

При этом точки $\zeta = \zeta_n$ дискретного спектра оператора $X - i\zeta\Lambda$ вида (15), (16) также зависят от времени. Эта зависимость определяется равенствами (8)-(10). Однако на этот раз в этих равенствах должны быть использованы решения уравнений (12) и (13).

Как будет показано ниже, интересующее нас решение системы (1)-(3) может быть получено с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора L вида (6), (7), а удовлетворяющее условиям (14) решение системы (11)-(13) находится с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора $X - i\zeta\Lambda$ вида (15), (16). Достигается это следующим образом.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ (1)-(3)

Как уже указывалось ранее [1], при $p_n = \epsilon_n\phi_n$, $q_n = \epsilon_n\psi_n$; $\epsilon_n^2 = 1$, $n = 1,\dots,N$, система (1)-(3) допускает исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора L вида (6), (7). Применение этого метода в данном случае основано на излагаемых ниже соображениях, являющихся дальнейшим развитием результатов упомянутой выше работы [1].

Итак, рассмотрим линейную систему уравнений

$$(L - i\zeta) f_0 = 0, \quad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \tilde{\Psi}_n f_0, \quad n = 1, \dots, 4N, \tag{17}$$

относительно неизвестных величин f_0, f_1, ..., f_{4N}. Здесь, как и всюду в дальнейшем, знак тильда "~" означает транспонирование, т.е., в частности, переход от вектора-столбца к вектору-строке. При этом мы будем считать, что f_0 является квадратной матрицей второго порядка, Ψ_1, ..., Ψ_{4N} являются векторами-столбцами с двумя компонентами каждый и, следовательно, f_1, ..., f_{4N} являются векторами-строками с двумя компонентами каждый. С помощью решения f_0, f_1, ..., f_{4N} системы (17) определим величины g_0, g_1, ..., g_{4N} посредством равенств

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + A f_0 + \sum_{n=1}^{4N} \Phi_n f_n,$$
$$g_n = \tilde{\Psi}_n \Lambda f_0 - i(\zeta - \zeta_n) f_n, \quad n = 1, \dots, 4N, \tag{18}$$

где оператор A имеет вид [2]:

$$A = 4\partial^3 + 3[(U^2 + \Lambda\frac{\partial U}{\partial x})\partial + \partial\cdot(U^2 + \Lambda\frac{\partial U}{\partial x})], \tag{19}$$

а величины Φ_1, ..., Φ_{4N} являются векторами-столбцами с двумя компонентами каждый. Отсюда следует, что величина g_0 является квадратной матрицей второго порядка, а величины g_1, ..., g_{4N} являются векторами-строками с двумя компонентами каждый. Выясним теперь, каким требованиям должны удовлетворять матрица U и векторы-столбцы Φ_1, ..., Φ_{4N}, Ψ_1, ..., Ψ_{4N} для того, чтобы определенные посредством (18) и (19) величины g_0, g_1, ..., g_{4N} удовлетворяли условиям

$$(L - i\zeta) g_0 = \sum_{n=1}^{4N} \Phi_n g_n, \quad \frac{\partial g_n}{\partial x} \equiv 0, \quad n = 1, \dots, 4N. \tag{20}$$

С помощью несложных вычислений легко находим, что для справедливости условий (20) необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = \sum_{n=1}^{4N} [\Lambda, \Phi_n \tilde{\Psi}_n], \tag{21}$$

$$(L - i\zeta_n)\Phi_n = (\tilde{L} - i\zeta_n)\Psi_n = 0, \quad n = 1, \dots, 4N, \tag{22}$$

где

$$\tilde{L} = -\Lambda\partial + U. \tag{23}$$

Предположим теперь, что величины $\zeta_1, \dots, \zeta_{4N}$ выбраны с соблюдением условий

$$\zeta_{N+n} = -\bar{\zeta}_n, \; \zeta_{2N+n} = -\zeta_n, \; \zeta_{3N+n} = \bar{\zeta}_n, \; n = 1, \dots, N. \tag{24}$$

Далее, пусть при $n = 1, \dots, N$ решение уравнений (22) имеет вид

$$\Phi_n = \begin{vmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{vmatrix}, \quad \Psi_n = \begin{vmatrix} q_n \\ p_n \end{vmatrix} \tag{25}$$

и в соответствии с равенствами (24) и (25) положим при $n = 1, \dots, N$

$$\Phi_{N+n} = \bar{\Phi}_n = \begin{vmatrix} \bar{\phi}_n \\ \bar{\psi}_n \end{vmatrix}, \quad \Psi_{N+n} = \bar{\Psi}_n = \begin{vmatrix} \bar{q}_n \\ \bar{p}_n \end{vmatrix}, \tag{26}$$

$$\Phi_{2N+n} = E\Phi_n = \begin{vmatrix} \psi_n \\ -\phi_n \end{vmatrix}, \quad \Psi_{2N+n} = E\Psi_n = \begin{vmatrix} p_n \\ -q_n \end{vmatrix}, \tag{27}$$

$$\Phi_{3N+n} = E\bar{\Phi}_n = \begin{vmatrix} \bar{\psi}_n \\ -\bar{\phi}_n \end{vmatrix}, \quad \Psi_{3N+n} = E\bar{\Psi}_n = \begin{vmatrix} \bar{p}_n \\ -\bar{q}_n \end{vmatrix}, \tag{28}$$

где

$$E = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{29}$$

В силу (6) и (7) убеждаемся, что если векторы-столбцы Φ_n и Ψ_n вида (25) при $n = 1, \dots, N$ удовлетворяют равенствам (22), то их компоненты ϕ_n, ψ_n и p_n, q_n удовлетворяют соответственно системам (2) и (3). Далее, на основе равенств $E\Lambda\tilde{E} = -\Lambda$, $EU\tilde{E} = -U$ получаем, что $EL\tilde{E} = -L$. Отсюда, согласно (23) и (24), следует, что если векторы Φ_n и Ψ_n вида (25) удовлетворяют равенствам (22) при $\zeta = \zeta_n$, то определенные посредством (27) векторы Φ_{2N+n} и Ψ_{2N+n} удовлетворяют равенствам (22) при $\zeta = \zeta_{2N+n} = -\zeta_n$, $n = 1, \dots, N$. Наконец, с учетом вещественности функции $u = u(x,t)$ находим, что в рассматриваемой ситуации векторы Φ_{N+n}, Ψ_{N+n} и Φ_{3N+n}, Ψ_{3N+n} вида (26) и (28) удовлетворяют равенствам (22) соответственно при $\zeta = \zeta_{N+n} = -\bar{\zeta}_n$ и $\zeta = \zeta_{3N+n} = \bar{\zeta}_n$, $n = 1, \dots N$. Таким образом, с помощью равенств (25)-(28) убеждаемся, что

$$\sum_{n=1}^{4N} [\Lambda, \Phi_n \tilde{\Psi}_n] = \begin{vmatrix} 0 & R \\ R & 0 \end{vmatrix}, \tag{30}$$

где

$$R = 2\sum_{n=1}^{N} (\phi_n p_n + \bar{\phi}_n \bar{p}_n - \psi_n q_n - \bar{\psi}_n \bar{q}_n). \tag{31}$$

В то же время, в соответствии с равенствами (6), (7) и (19), получаем, что

$$[A, L] = \frac{\partial}{\partial x}\left(2U^3 + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right),$$

т.е.

$$[A, L] = \begin{vmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$Q = \frac{\partial}{\partial x}\left(2u^3 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

Отсюда следует, что соотношение (21) при указанном выше выборе векторов Φ_n и Ψ_n, $n = 1, \dots, 4N$, эквивалентно уравнению (1), а равенства (22) эквивалентны уравнениям (2) и (3). Это значит, что в рассматриваемой нами ситуации соотношения (20) эквивалентны системе уравнений (1)-(3). Замечательной особенностью соотношений (20) является то обстоятельство, что с их помощью удается определить эволюцию во времени всех данных рассеяния для оператора L вида (6), (7) с потенциалом $u = u(x, t)$, удовлетворяющим системе (1)-(3). Это позволяет нам назвать соотношения (20) определяющими соотношениями.

2. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ S-МАТРИЦЫ В СЛУЧАЕ СИСТЕМЫ (1)-(3)

Возьмем оператор L вида (6), (7) и рассмотрим уравнение

$$(L - i\zeta) f_0 = 0. \tag{32}$$

Пусть f_0^- и f_0^+ - решения уравнения (32), при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ обладающие асимптотиками

$$\begin{aligned} f_0^- &\sim \exp(i\zeta\Lambda x), \text{ если } x \to -\infty, \\ f_0^+ &\sim \exp(i\zeta\Lambda x), \text{ если } x \to \infty. \end{aligned} \tag{33}$$

Тогда при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$справедливо равенство

$$f_0^+(x, \zeta) = f_0^-(x, \zeta)\, S(\zeta), \tag{34}$$

где элементы $S_{\alpha\beta}(\zeta)$ матрицы $S(\zeta)$ не зависят от x, $\alpha, \beta = 1,2$. Как известно, первый столбец матрицы f_0^- и последний столбец матрицы f_0^+ допускают аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$, а последний столбец матрицы f_0^- и первый столбец матрицы f_0^+ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Положим

$$f_0^- = \begin{vmatrix} \phi_1^- & \phi_2^- \\ \psi_1^- & \psi_2^- \end{vmatrix}, \quad f_0^+ = \begin{vmatrix} \phi_1^+ & \phi_2^+ \\ \psi_1^+ & \psi_2^+ \end{vmatrix}. \tag{35}$$

С учетом сказанного выше из сравнения асимптотик (33) следует, что в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta < 0$ выполняются соотношения

$$\phi_2^-(x, \bar\zeta) = -\bar\psi_1^-(x, \zeta), \; \psi_2^-(x, \bar\zeta) = \bar\phi_1^-(x, \zeta), \; \operatorname{Im}\zeta < 0, \tag{36}$$

а в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ имеют место аналогичные соотношения

$$\phi_2^+(x, \bar\zeta) = -\bar\psi_1^+(x, \zeta), \; \psi_2^+(x, \bar\zeta) = \bar\phi_1^+(x, \zeta), \; \operatorname{Im}\zeta > 0. \tag{37}$$

На основе (34) и (35) находим, что при вещественных значениях параметра ζ диагональные элементы матрицы $S(\zeta)$ имеют вид

$$\begin{aligned} S_{11}(\zeta) &= \phi_1^+(x, \zeta)\,\psi_2^-(x, \zeta) - \psi_1^+(x, \zeta)\,\phi_2^-(x, \zeta), \\ S_{22}(\zeta) &= \phi_1^-(x, \zeta)\,\psi_2^+(x, \zeta) - \psi_1^-(x, \zeta)\,\phi_2^+(x, \zeta). \end{aligned} \tag{38}$$

Отсюда следует, что элемент $S_{11}(\zeta)$ допускает аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$, а элемент $S_{22}(\zeta)$ допускает аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < 0$. В соответствии со сказанным ранее с помощью асимптотик (33) находим, что при любом ζ, принадлежащем верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$, решение ϕ_1^+, ψ_1^+ экспоненциально убывает, если $x \to \infty$, а решение ϕ_2^-, ψ_2^- экспоненциально убывает, если $x \to -\infty$. Аналогичным образом получаем, что при любом ζ, принадлежащем нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta < 0$, ϕ_1^-, ψ_1^- экспоненциально убывает, если $x \to -\infty$, а ϕ_2^+, ψ_2^+ экспоненциально убывает, если $x \to \infty$. Отсюда следует, что нулям $\zeta = \zeta_n$ функции $S_{11}(\zeta)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ соответствуют точки дискретного спектра оператора L, поскольку в силу (38) при $\zeta = \zeta_n$ выполняется равенство

$$\phi_1^+(x, \zeta_n) = B_n \phi_2^-(x, \zeta_n), \; \psi_1^+(x, \zeta_n) = B_n \psi_2^-(x, \zeta_n), \tag{39}$$

где величина B_n не зависит от x. Аналогичным образом убеждаемся, что нулям $\hat\zeta = \hat\zeta_n$ функции $S_{22}(\zeta)$ в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta<0$ также соответствуют точки дискретного спектра оператора L, так как при $\zeta = \hat\zeta_n$ согласно (38) имеет место равенство

$$\phi_2^+(x, \hat\zeta_n) = \hat B_n \phi_1^-(x, \hat\zeta_n), \; \psi_2^+(x, \hat\zeta_n) = \hat B_n \psi_1^-(x, \hat\zeta_n), \tag{40}$$

где величина $\hat B_n$ не зависит от x. С учетом равенств (36)-(38) нетрудно убедиться, что в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$ между элементами $S_{11}(\zeta)$ и $S_{22}(\zeta)$ имеется связь

$$S_{22}(\bar\zeta) = \bar S_{11}(\zeta), \; \operatorname{Im}\zeta > 0. \tag{41}$$

Отсюда следует, что каждому нулю $\zeta = \hat\zeta_n$ функции $S_{22}(\zeta)$, лежащему в нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta < 0$, соответствует лежащий в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ нуль $\zeta = \zeta_n$ функции $S_{11}(\zeta)$, такой, что $\hat\zeta_n = \bar\zeta_n$. Более того, между величинами B_n и $\hat B_n$ на основе (39) и (40) выполняется соотношение $\hat B_n = -\bar B_n$.

В соответствии со сказанным выше положим теперь при $n = 1, \ldots, N$

$$\Phi_n = \begin{vmatrix} \phi_n(x) \\ \psi_n(x) \end{vmatrix}, \quad \Psi_n = \begin{vmatrix} q_n(x) \\ p_n(x) \end{vmatrix} = c_n \begin{vmatrix} \psi_1^+(x, \zeta_n) \\ \phi_1^+(x, \zeta_n) \end{vmatrix}, \tag{42}$$

где величины c_n не зависят от x, а решение $\phi_n(x)$, $\psi_n(x)$ уравнений (2) удовлетворяет условию

$$\phi_n(x)\,\psi_1^+(x,\zeta_n) - \psi_n(x)\,\phi_1^+(x,\zeta_n) \equiv 1,\ n=1,\dots,N. \tag{43}$$

С помощью (33) и (39) нетрудно убедиться, что определенное таким образом решение $\phi_n(x)$, $\psi_n(x)$ уравнений (2) обладает асимптотиками

$$\begin{gathered}\phi_n(x)\exp(i\zeta_n x)\to 0,\ \psi_n(x)\exp(i\zeta_n x)\to -1,\ \text{ если } x\to\infty,\\ B_n\phi_n(x)\exp(-i\zeta_n x)\to 1,\ \psi_n(x)\exp(-i\zeta_n x)\to 0,\ \text{ если } x\to-\infty.\end{gathered} \tag{44}$$

Далее, с учетом равенств (26)-(29) положим при $n = 1,\dots, N$

$$\Phi_{N+n} = \bar\Phi_n = \begin{vmatrix}\bar\phi_n(x)\\ \bar\psi_n(x)\end{vmatrix},\quad \Psi_{N+n} = \bar\Psi_n = \bar c_n\begin{vmatrix}\bar\psi_1^+(x,\zeta_n)\\ \bar\phi_1^+(x,\zeta_n)\end{vmatrix},$$

$$\Phi_{2N+n} = E\Phi_n = \begin{vmatrix}\psi_n(x)\\ -\phi_n(x)\end{vmatrix},\quad \Psi_{2N+n} = E\Psi_n = c_n\begin{vmatrix}\phi_1^+(x,\zeta_n)\\ -\psi_1^+(x,\zeta_n)\end{vmatrix}, \tag{45}$$

$$\Phi_{3N+n} = E\bar\Phi_n = \begin{vmatrix}\bar\psi_n(x)\\ -\bar\phi_n(x)\end{vmatrix},\quad \Psi_{3N+n} = E\bar\Psi_n = \bar c_n\begin{vmatrix}\bar\phi_1^+(x,\zeta_n)\\ -\bar\psi_n^+(x,\zeta_n)\end{vmatrix}.$$

Согласно (42) и (45) определенная посредством (30) и (31) величина R в данном случае имеет вид

$$R = 2\sum_{n=1}^{N}\{[\phi_n(x)\,\phi_1^+(x,\zeta_n) - \psi_n(x)\,\psi_1^+(x,\zeta_n)]\,c_n + [\bar\phi_n(x)\,\bar\phi_1^+(x,\zeta_n) - \bar\psi_n(x)\,\bar\psi_1^+(x,\zeta_n)]\,\bar c_n\}.$$

В силу (33), (39) и (44) отсюда следует, что $R(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$.

Положим теперь при $n = 1, \dots, 4N$

$$f_n^- = \int_{-\infty}^{x}\tilde\Psi_n(z)\,f_0^-(z,\zeta)\,dz,\quad f_n^+ = -\int_{x}^{\infty}\tilde\Psi_n(z)\,f_0^+(z,\zeta)\,dz. \tag{46}$$

Далее, положим

$$\begin{gathered}g_0^- = \frac{\partial f_0^-}{\partial t} + A f_0^- + \sum_{n=1}^{4N}\Phi_n f_n^-,\\ g_n^- = \tilde\Psi_n\Lambda f_0^- - i(\zeta-\zeta_n)\,f_n^-,\ n=1,\dots,4N,\\ g_0^+ = \frac{\partial f_0^+}{\partial t} + A f_0^+ + \sum_{n=1}^{4N}\Phi_n f_n^+,\\ g_n^+ = \tilde\Psi_n\Lambda f_0^+ - i(\zeta-\zeta_n)\,f_n^+,\ n=1,\dots,4N.\end{gathered} \tag{47}$$

При этом мы, конечно, подразумеваем, что величины $\zeta_1,\dots,\zeta_{4N}$ удовлетворяют условиям (24). Из равенств (46) следует, что f_n^- и f_n^+ при $n = 1, \dots, 4N$ являются векторами-строками соответственно с двумя компонентами $f_{n,1}^-$, $f_{n,2}^-$ и $f_{n,1}^+$, $f_{n,2}^+$ каждый. Очевидно, что компоненты $f_{n,1}^-$ и $f_{n,2}^+$ допускают аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta<0$, а компоненты $f_{n,1}^+$ и $f_{n,2}^-$ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta>0$. Далее, нетрудно убедиться, что первый столбец матрицы g_0^- и последний столбец матрицы g_0^+ допускают аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta<0$, а последний столбец матрицы g_0^- и первый столбец матрицы g_0^+ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta>0$. Наконец, в соответствии с равенствами (47) величины g_n^- и g_n^+ при $n = 1, \dots, 4N$ являются векторами-строками соответственно с двумя компонентами $g_{n,1}^-$, $g_{n,2}^-$ и $g_{n,1}^+$, $g_{n,2}^+$ каждый. При этом компоненты $g_{n,1}^-$ и $g_{n,2}^+$ допускают аналитическое продолжение по ζ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta<0$, а компоненты $g_{n,1}^+$ и $g_{n,2}^-$ допускают аналитическое продолжение по ζ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta>0$. На основе равенств (33), (39), (42) и (45) при $n = 1, \dots, 4N$ справедливы асимптотики

$$\|\Psi_n(x)\|\to\infty,\ \text{ если } x\to\pm\infty.$$

Отсюда, согласно (46) и (47), следует, что при любом $\zeta\in(-\infty,\infty)$ и $n = 1, \dots, 4N$ имеют место асимптотики

$$\|f_n^-(x,\zeta)\| + \|g_n^-(x,\zeta)\|\to 0,\ \text{ если } x\to-\infty,$$

$$\|f_n^+(x,\zeta)\| + \|g_n^+(x,\zeta)\|\to 0,\ \text{ если } x\to\infty.$$

Таким образом, с учетом тождеств $\dfrac{\partial g_n^-}{\partial x} = \dfrac{\partial g_n^+}{\partial x} \equiv 0$, $n = 1,\dots,4N$, получаем, что при $x,\zeta\in(-\infty,\infty)$ выполняются тождества

$$g_n^-(x,\zeta) = g_n^+(x,\zeta) \equiv 0,\ n=1,\dots,4N.$$

Это значит, что в соответствии с соотношениями (20) матрицы g_0^- и g_0^+ при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют уравнениям

$$(L - i\zeta)\, g_0^- = (L - i\zeta)\, g_0^+ = 0.$$

В силу (4), (19), (42) и (44)-(47) отсюда следуют равенства

$$g_0^-(x,\zeta) = f_0^-(x,\zeta)\,(-4i\zeta^3\Lambda + C^-),$$

$$g_0^+(x,\zeta) = f_0^+(x,\zeta)\,(-4i\zeta^3\Lambda + C^+), \tag{48}$$

где

$$C^- = \mathrm{diag}\Big\{-i\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{c_n}{\zeta-\zeta_n} + \frac{\bar c_n}{\zeta+\bar\zeta_n}\Big),\ i\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{c_n}{\zeta+\zeta_n} + \frac{\bar c_n}{\zeta-\bar\zeta_n}\Big)\Big\},$$
$$C^+ = \mathrm{diag}\Big\{i\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{c_n}{\zeta+\zeta_n} + \frac{\bar c_n}{\zeta-\bar\zeta_n}\Big),\ -i\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{c_n}{\zeta-\zeta_n} + \frac{\bar c_n}{\zeta+\bar\zeta_n}\Big)\Big\}. \tag{49}$$

Рассмотрим теперь матрицу G_0 вида

$$G_0 = g_0^+(x,\zeta) - g_0^-(x,\zeta)\,S(\zeta). \tag{50}$$

С учетом (34) и (48) находим, что

$$G_0 = f_0^-(x,\zeta)\,\{4i\zeta^3[\Lambda, S(\zeta)] - C^- S(\zeta) + S(\zeta)\,C^+\}. \tag{51}$$

С другой стороны, согласно (34) и (47) имеет место представление

$$g_0^+(x,\zeta) = g_0^-(x,\zeta)\,S(\zeta) + f_0^-(x,\zeta)\,\frac{\partial S(\zeta)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{4N}\Phi_n(x)\,[\,f_n^+(x,\zeta) - f_n^-(x,\zeta)\,S(\zeta)\,]. \tag{52}$$

С помощью формул (34) и (46) нетрудно убедиться, что при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ и $n = 1, \ldots, 4N$ выполняется равенство

$$f_n^+(x,\zeta) - f_n^-(x,\zeta)\,S(\zeta) = -\int_{-\infty}^{\infty}\tilde\Psi_n(z)\,f_0^+(z,\zeta)\,dz.$$

В силу (42) и (45) правая часть этого равенства равна нулю при любом $\zeta \in (-\infty, \infty)$ и $n = 1, \ldots, 4N$. С учетом этого факта формула (52) принимает вид

$$g_0^+(x,\zeta) = g_0^-(x,\zeta)\,S(\zeta) + f_0^-(x,\zeta)\,\frac{\partial S(\zeta)}{\partial t}.$$

Отсюда следует, что определенная посредством (50) величина G_0 допускает представление

$$G_0 = f_0^-(x,\zeta)\,\frac{\partial S(\zeta)}{\partial t}.$$

Сравнивая это выражение с выражением (51), немедленно получаем эволюционное уравнение для S-матрицы

$$\frac{\partial S(\zeta)}{\partial t} = 4i\zeta^3[\Lambda, S(\zeta)] - C^- S(\zeta) + S(\zeta)\,C^+, \tag{53}$$

т.е., согласно (49), имеем при $\zeta \in (-\infty, \infty)$

$$\frac{\partial S_{11}(\zeta)}{\partial t} - 2i\zeta\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{c_n}{\zeta^2-\zeta_n^2} + \frac{\bar c_n}{\zeta^2-\bar\zeta_n^2}\Big)S_{11}(\zeta) = 0,$$
$$\frac{\partial S_{12}(\zeta)}{\partial t} - 8i\zeta^3 S_{12}(\zeta) = \frac{\partial S_{21}(\zeta)}{\partial t} + 8i\zeta^3 S_{21}(\zeta) = 0, \tag{54}$$
$$\frac{\partial S_{22}(\zeta)}{\partial t} + 2i\zeta\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{c_n}{\zeta^2-\zeta_n^2} + \frac{\bar c_n}{\zeta^2-\bar\zeta_n^2}\Big)S_{22}(\zeta) = 0.$$

Предположим теперь, что точка $\zeta = \zeta_n$ дискретного спектра оператора L имеет кратность r_n, т.е. при $n = 1, \ldots, N$ выполнены условия

$$S_{11}(\zeta_n) = \ldots = \frac{\partial^{r_n-1} S_{11}(\zeta)}{\partial\zeta^{r_n-1}}\Big|_{\zeta=\zeta_n} = 0,$$
$$\frac{\partial^{r_n} S_{11}(\zeta)}{\partial\zeta^{r_n}}\Big|_{\zeta=\zeta_n} \neq 0,\quad n = 1, \ldots, N, \tag{55}$$

и ни одна из точек ζ_n не лежит на мнимой оси, т.е. $\zeta_n + \bar\zeta_n \neq 0$, $n = 1, \ldots, N$. Тогда из уравнений (54) следует, что функции $S_{11}(\zeta)$ и $S_{22}(\zeta)$ допускают представление

$$S_{11}(\zeta)=S_1(\zeta)\prod_{n=1}^{N}\left[\frac{(\zeta-\zeta_n)(\zeta+\bar\zeta_n)}{(\zeta+\zeta_n)(\zeta-\bar\zeta_n)}\right]^{r_n},$$

$$S_{22}(\zeta)=S_2(\zeta)\prod_{n=1}^{N}\left[\frac{(\zeta+\zeta_n)(\zeta-\bar\zeta_n)}{(\zeta-\zeta_n)(\zeta+\bar\zeta_n)}\right]^{r_n}, \tag{56}$$

где величины $S_1(\zeta)$ и $S_2(\zeta)$ не зависят от времени t, а точки $\zeta=\zeta_n$ дискретного спектра оператора L эволюционируют во времени согласно уравнению

$$r_n\frac{d\zeta_n}{dt}+ic_n=0,\ n=1,\dots,N. \tag{57}$$

При этом величины $S_1(\zeta)$ и $S_2(\zeta)$ в силу (41) в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta>0$ удовлетворяют условию

$$S_2(\bar\zeta)=\bar S_1(\zeta),\ \mathrm{Im}\,\zeta>0.$$

Из равенства (56) следует, что если в какой-то момент времени $t=t'$ точка $\zeta=\zeta_{n_0}$ попадет на мнимую ось, то в этот момент времени нуль $\zeta=\zeta_{n_0}$ функции $S_{11}(\zeta)$ будет иметь порядок, равный $2r_{n_0}$. Однако в случае общего положения в соответствии с уравнением (57) точка $\zeta=\zeta_{n_0}$ при $t>t'$ покинет мнимую ось и, следовательно, при $t>t'$ точка $\zeta=\zeta_{n_0}$ снова будет нулем функции $S_{11}(\zeta)$ кратности r_{n_0}. Таким образом, мы видим, что если в процессе эволюции точка $\zeta=\zeta_{n_0}$ в какой-то момент времени попадает на мнимую ось, то в этот момент времени функция $S_{11}(\zeta)$ не удовлетворяет условию (55). Это значит, что если функция $S_{11}(\zeta)$ удовлетворяет условию (55) и среди точек $\zeta_1,\dots,\zeta_N$ имеется хотя бы одна точка $\zeta=\zeta_{n_0}$, такая, что $\zeta_{n_0}+\bar\zeta_{n_0}=0$, то в этом случае в равенствах (56) обязательно нужно выбросить сомножитель $\left(\frac{\zeta+\bar\zeta_{n_0}}{\zeta-\bar\zeta_{n_0}}\right)^{r_{n_0}}$ в выражении для функции $S_{11}(\zeta)$ и сомножитель $\left(\frac{\zeta-\bar\zeta_{n_0}}{\zeta+\bar\zeta_{n_0}}\right)^{r_{n_0}}$ в выражении для функции $S_{22}(\zeta)$. Кроме того, эволюционное уравнение для собственного значения $\zeta=\zeta_{n_0}$ в этом случае, согласно (54), обязано иметь вид

$$r_{n_0}\frac{d\zeta_{n_0}}{dt}+i(c_{n_0}+\bar c_{n_0})=0. \tag{58}$$

Объединяя уравнение (57) с уравнением (58), мы видим, что оба эти уравнения являются частными случаями уравнения

$$r_n\frac{d\zeta_n}{dt}+i(c_n+\gamma_n\bar c_n)=0,\ n=1,\dots,N, \tag{59}$$

где величина γ_n определена с помощью равенства (9). В силу (5), (10), (42) и (43) уравнения (8) и (59) эквивалентны друг другу.

3. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НОРМИРОВОЧНЫХ КОНСТАНТ В СЛУЧАЕ СИСТЕМЫ (1) - (3)

Пусть σ_r^- и σ_r^+ - векторы-столбцы, образованные, соответственно, элементами r-го столбца матриц f_0^- и f_0^+ вида (35), $r=1,2$. Пусть, далее, τ_r^- и τ_r^+ - векторы-столбцы, образованные, соответственно, элементами r-го столбца матриц g_0^- и g_0^+ вида (47), $r=1,2$. Пусть, наконец, $\zeta=\zeta_m$ - нули функции $S_{11}(\zeta)$, лежащие в правом верхнем квадранте $\mathrm{Re}\,\zeta\geq 0$, $\mathrm{Im}\,\zeta>0$ комплексной плоскости ζ, $m=1,\dots,N$. В соответствии с равенствами (39) и (40) положим при $m=1,\dots,N$

$$G_m=\tau_1^+(x,\zeta_m)-B_m\tau_2^-(x,\zeta_m),$$

$$\hat G_m=\tau_2^+(x,\bar\zeta_m)-\hat B_m\tau_1^-(x,\bar\zeta_m). \tag{60}$$

Согласно равенствам (48) и (49) имеем

$$\tau_1^+(x,\zeta_m)=\left\{-4i\zeta_m^3+i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_n}{\zeta_m+\zeta_n}+\frac{\bar c_n}{\zeta_m-\bar\zeta_n}\right)\right\}\sigma_1^+(x,\zeta_m),$$

$$\tau_2^-(x,\zeta_m)=\left\{4i\zeta_m^3+i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_n}{\zeta_m+\zeta_n}+\frac{\bar c_n}{\zeta_m-\bar\zeta_n}\right)\right\}\sigma_2^-(x,\zeta_m),$$

$$\tau_2^+(x,\bar\zeta_m)=\left\{4i\bar\zeta_m^3-i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_n}{\bar\zeta_m-\zeta_n}+\frac{\bar c_n}{\bar\zeta_m+\bar\zeta_n}\right)\right\}\sigma_2^+(x,\bar\zeta_m),$$

$$\tau_1^-(x,\bar\zeta_m)=\left\{-4i\bar\zeta_m^3-i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_n}{\bar\zeta_m-\zeta_n}+\frac{\bar c_n}{\bar\zeta_m+\bar\zeta_n}\right)\right\}\sigma_1^-(x,\bar\zeta_m).$$

С учетом формул (39) и (40) отсюда следует, что определенные посредством (60) величины G_m и $\hat{G}_m$ могут быть записаны в следующем виде:

$$G_m = -8i\zeta_m^3 B_m \sigma_2^-(x, \zeta_m), \quad \hat{G}_m = 8i\bar{\zeta}_m^3 \hat{B}_m \sigma_1^-(x, \bar{\zeta}_m). \tag{61}$$

С другой стороны, в силу (39), (40) и (59) справедливы равенства

$$\frac{\partial \sigma_1^+(x, \zeta_m)}{\partial t} = B_m \frac{\partial \sigma_2^-(x, \zeta_m)}{\partial t} + \frac{\partial B_m}{\partial t}\sigma_2^-(x, \zeta_m) + \frac{i}{r_m}(c_m + \gamma_m \bar{c}_m)\chi_m(x),$$

$$\frac{\partial \sigma_2^+(x, \bar{\zeta}_m)}{\partial t} = \hat{B}_m \frac{\partial \sigma_1^-(x, \bar{\zeta}_m)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t}\sigma_1^-(x, \bar{\zeta}_m) - \frac{i}{r_m}(\bar{c}_m + \gamma_m c_m)\hat{\chi}_m(x),$$

где

$$\chi_m(x) = \frac{\partial}{\partial \zeta}[\sigma_1^+(x,\zeta) - B_m \sigma_2^-(x,\zeta)]\big|_{\zeta=\zeta_m},$$
$$\hat{\chi}_m(x) = \frac{\partial}{\partial \zeta}[\sigma_2^+(x,\zeta) - \hat{B}_m \sigma_1^-(x,\zeta)]\big|_{\zeta=\bar{\zeta}_m}. \tag{62}$$

С помощью этих равенств на основе (39), (40), (46) и (47) находим, что имеют место соотношения

$$r_1^+(x,\zeta_m) = B_m r_2^-(x,\zeta_m) + \frac{\partial B_m}{\partial t}\sigma_2^-(x,\zeta_m) + \frac{i}{r_m}(c_m + \gamma_m \bar{c}_m)\chi_m(x) - B_m \sum_{n=1}^{4N} \Phi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_n(z)\sigma_2^-(z,\zeta_m)\,dz,$$
$$r_2^+(x,\bar{\zeta}_m) = \hat{B}_m r_1^-(x,\bar{\zeta}_m) + \frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t}\sigma_1^-(x,\bar{\zeta}_m) - \frac{i}{r_m}(\bar{c}_m + \gamma_m c_m)\hat{\chi}_m(x) - \hat{B}_m \sum_{n=1}^{4N} \Phi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_n(z)\sigma_1^-(z,\bar{\zeta}_m)\,dz. \tag{63}$$

Согласно (42) и (45) при любых $m = 1,\dots,N$ и $n = 1,\dots,4N$ выполняются соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_n(z)\sigma_2^-(z,\zeta_m)\,dz = 0, \quad \text{если} \quad (n-m)(n-m-N) \neq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_n(z)\sigma_1^-(z,\bar{\zeta}_m)\,dz = 0, \quad \text{если} \quad (n-m-2N)(n-m-3N) \neq 0.$$

Кроме того, в соответствии с (38), (42) и (45) при любом $m = 1,\dots,N$ справедливы равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_m(z)\sigma_2^-(z,\zeta_m)\,dz = i c_m S_{11}'(\zeta_m),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_{N+m}(z)\sigma_2^-(z,\zeta_m)\,dz = i\gamma_m \bar{c}_m S_{11}'(\zeta_m),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_{2N+m}(z)\sigma_1^-(z,\bar{\zeta}_m)\,dz = -i\gamma_m c_m S_{22}'(\bar{\zeta}_m),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_{3N+m}(z)\sigma_1^-(z,\bar{\zeta}_m)\,dz = -i\bar{c}_m S_{22}'(\bar{\zeta}_m),$$

где величина γ_m определена ранее посредством (9). С учетом этих равенств соотношения (63) принимают вид

$$r_1^+(x,\zeta_m) = B_m r_2^-(x,\zeta_m) + \frac{\partial B_m}{\partial t}\sigma_2^-(x,\zeta_m) + \frac{i}{r_m}(c_m + \gamma_m \bar{c}_m)[\chi_m(x) - B_m S_{11}'(\zeta_m)\Phi_m(x)],$$

$$r_2^+(x,\bar{\zeta}_m) = \hat{B}_m r_1^-(x,\bar{\zeta}_m) + \frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t}\sigma_1^-(x,\bar{\zeta}_m) - \frac{i}{r_m}(\bar{c}_m + \gamma_m c_m)[\hat{\chi}_m(x) - \hat{B}_m S_{22}'(\bar{\zeta}_m)\bar{\Phi}_{2N+m}(x)].$$

Определенные посредством (62) величины $\chi_m(x)$ и $\hat{\chi}_m(x)$ в силу (42), (43) и (45) допускают представление

$$\chi_m(x) = a_m \Phi_m(x) + r_m b_m \sigma_1^+(x,\zeta_m),$$
$$\hat{\chi}_m(x) = \hat{a}_m \bar{\Phi}_{2N+m}(x) + r_m \hat{b}_m \sigma_2^+(x,\bar{\zeta}_m), \tag{64}$$

где величины a_m, b_m и $\hat{a}_m$, $\hat{b}_m$ не зависят от x. С помощью (38), (44) и (62) легко находим, что

$$a_m = B_m S_{11}'(\zeta_m), \quad \hat{a}_m = \hat{B}_m S_{22}'(\bar{\zeta}_m),$$

а величины b_m и $\hat{b}_m$ удовлетворяют условию $\hat{b}_m = \bar{b}_m$, $m = 1,\dots,N$. Отсюда следует, что определенные посредством (60) величины G_m и $\hat{G}_m$ могут быть представлены в виде

$$G_m = [\frac{\partial B_m}{\partial t} + i(c_m + \gamma_m \bar{c}_m) b_m B_m] \sigma_2^-(x, \zeta_m),$$

$$\hat{G}_m = [\frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t} - i(\bar{c}_m + \gamma_m c_m) \hat{b}_m \hat{B}_m] \sigma_1^-(x, \bar{\zeta}_m).$$

Сравнивая эти равенства с формулой (61), получаем, что эволюционные уравнения для нормировочных констант B_m и $\hat{B}_m$ имеют вид

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} + [8i\zeta_m^3 + i(c_m + \gamma_m \bar{c}_m) b_m] B_m = 0,$$
$$\frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t} - [8i\bar{\zeta}_m^3 + i(\bar{c}_m + \gamma_m c_m) \hat{b}_m] \hat{B}_m = 0. \qquad (65)$$

На основе равенства $\hat{b}_m = \bar{b}_m$ система уравнений (65) обладает инвариантным многообразием $\hat{B}_m = -\bar{B}_m$. Более того, из равенств (62) и (64) следует, что в случае $\zeta_m + \bar{\zeta}_m \equiv 0$ величина b_m должна быть чисто мнимой, и, таким образом, величины B_m и $\hat{B}_m$ в процессе эволюции остаются вещественными. Здесь необходимо отметить, что если в процессе эволюции какое-нибудь собственное значение, например ζ_{n_0}, в какой-то момент времени $t = t'$ пересечет мнимую ось, то для этого момента времени справедливость уравнений (65) при $m = n_0$ нами, строго говоря, не доказана. Однако их нетрудно получить по непрерывности из уравнений (65) при $m = n_0$ и $t \neq t'$, что с необходимостью приводит к равенству $\gamma_{n_0} = 0$ при $t = t'$.

Таким образом, система уравнений (53), (59) и (65) описывает эволюцию во времени всех данных рассеяния для оператора L вида (6), (7) с потенциалом $u = u(x,t)$, удовлетворяющим системе (1)-(3). Это значит, что в случае системы (1)-(3) мы можем для решения задачи Коши воспользоваться прямым и обратным методом рассеяния для оператора L вида (6),(7).

4. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ (11)-(13)

Определяющие соотношения для системы (11)-(13) получаются аналогично тому, как это было сделано ранее для системы (1)-(3). Однако имеются и некоторые отличия. Суть их состоит в следующем.

Рассмотрим линейную систему уравнений

$$(X - i\zeta\Lambda) f_0 = 0, \quad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \tilde{\Psi}_n f_0, \quad n = 1, \dots, 4N, \qquad (66)$$

относительно неизвестных величин $f_0, f_1, \dots, f_{4N}$. С помощью решения $f_0, f_1, \dots, f_{4N}$ системы (66) определим величины $g_0, g_1, \dots, g_{4N}$ посредством равенств

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{i}{\zeta} F f_0 + \sum_{n=1}^{4N} \Phi_n f_n,$$
$$g_n = \tilde{\Psi}_n \Lambda f_0 - i(\zeta - \zeta_n) f_n, \quad n = 1, \dots, 4N, \qquad (67)$$

где матрица F имеет вид[3]:

$$F = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}. \qquad (68)$$

Выясним теперь, каким требованиям должны удовлетворять матрица V вида (16) и входящие в равенства (66), (67) векторы-столбцы $\Phi_1, \dots, \Phi_{4N}, \Psi_1, \dots, \Psi_{4N}$ для того, чтобы определенные посредством (66)-(68) величины $g_0, g_1, \dots, g_{4N}$ удовлетворяли требованиям

$$(X - i\zeta\Lambda) g_0 = \Lambda \sum_{n=1}^{4N} \Phi_n g_n, \quad \frac{\partial g_n}{\partial x} \equiv 0, \quad n = 1, \dots, 4N. \qquad (69)$$

С учетом равенства $[X, F] = \frac{\partial F}{\partial x} + [V, F] = 0$ нетрудно убедиться, что для справедливости соотношений (69) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\frac{\partial X}{\partial t} + [\Lambda, F] = \Lambda \sum_{n=1}^{4N} [\Lambda, \Phi_n \tilde{\Psi}_n], \qquad (70)$$

$$(X - i\zeta_n \Lambda)\Phi_n = (\tilde{X} - i\zeta_n \Lambda)\Psi_n = 0, \quad n = 1, \dots, 4N, \qquad (71)$$

где

$$\tilde{X} = -\partial + V. \qquad (72)$$

Предположим теперь, что величины ζ_n выбраны с соблюдением требований (24). В этом случае удовлетворяющие условиям (71) векторы-столбцы Φ_n и Ψ_n при $n = 1, \dots, 4N$ могут быть определены с помощью формул (25)-(29) с той только разницей, что на этот раз в соответствии с равенствами (15), (16) и (72) величины ϕ_n, ψ_n и p_n, q_n удовлетворяют, соответственно, уравнениям (12) и (13), $n = 1, \ldots, N$. В силу равенств (30) и (31) отсюда следует, что соотношение (70) эквивалентно уравнению (11). Таким образом, соотношения (69) действительно эквивалентны системе уравнений (11)-(13).

Сравнивая равенства (66)-(69) с равенствами (17)-(20), мы видим, что основное их отличие состоит в том, что оператор A вида (19) заменен на определенную с помощью (68) матрицу $-\frac{i}{\zeta}F$. В силу сделанных ранее предположений, что при $x \to \pm\infty$ решение $\theta = \theta(x,t)$ уравнения (11) стремится к некоторым кратным 2π величинам, убеждаемся в справедливости асимптотики $F \sim (1/4)\Lambda$, если $x \to \pm\infty$. Это значит, что в соответствии с (33) выполняются асимптотики

$$Ff_0^- \sim \frac{1}{4}\Lambda\exp(i\zeta\Lambda x), \text{ если } x \to -\infty,$$

$$Ff_0^+ \sim \frac{1}{4}\Lambda\exp(i\zeta\Lambda x), \text{ если } x \to \infty.$$

С другой стороны, согласно (19) и (33) имеют место асимптотики

$$Af_0^- \sim -4i\zeta^3\Lambda\exp(i\zeta\Lambda x), \text{ если } x \to -\infty,$$

$$Af_0^+ \sim -4i\zeta^3\Lambda\exp(i\zeta\Lambda x), \text{ если } x \to \infty.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом нами сейчас случае аналогичные (48) формулы имеют вид

$$g_0^-(x,\zeta) = f_0^-(x,\zeta)(-\frac{i}{4\zeta}\Lambda + C^-),$$
$$\tag{73}$$
$$g_0^+(x,\zeta) = f_0^+(x,\zeta)(-\frac{i}{4\zeta}\Lambda + C^+),$$

где матрицы C^- и C^+ определены с помощью равенств (49). Это значит, что эволюционное уравнение для S-матрицы в случае системы (11)-(13) получается из уравнения (53) в результате замены в первом слагаемом в правой части этого равенства сомножителя $4\zeta^3$ на $\frac{1}{4\zeta}$. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{\partial S(\zeta)}{\partial t} = \frac{i}{4\zeta}[\Lambda, S(\zeta)] - C^- S(\zeta) + S(\zeta)C^+. \tag{74}$$

Отсюда следует, что диагональные элементы S-матрицы в рассматриваемом нами сейчас случае эволюционируют согласно уравнениям (54), а эволюционные уравнения для внедиагональных элементов S-матрицы имеют вид

$$\frac{\partial S_{12}(\zeta)}{\partial t} - \frac{i}{2\zeta}S_{12}(\zeta) = \frac{\partial S_{21}(\zeta)}{\partial t} + \frac{i}{2\zeta}S_{21}(\zeta) = 0.$$

Таким образом, получаем, что в случае системы (11)-(13) сохраняет силу уравнение (59) с теми уточнениями, которые уже приводились ранее при рассмотрении случая системы (1)-(3). Наконец, повторив почти дословно рассуждения предыдущего раздела, легко убеждаемся, что в силу (73) эволюционные уравнения для нормировочных констант B_m и $\hat{B}_m$ имеют вид

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} + [\frac{i}{2\zeta_m} + i(c_m + \gamma_m\bar{c}_m)b_m]B_m = 0,$$
$$\tag{75}$$
$$\frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t} - [\frac{i}{2\bar{\zeta}_m} + i(\bar{c}_m + \gamma_m c_m)\hat{b}_m]\hat{B}_m = 0.$$

Система уравнений (59), (74) и (75) описывает эволюцию во времени всех данных рассеяния для оператора $X - i\zeta\Lambda$ вида (15), (16) с потенциалом $\theta = \theta(x, t)$, удовлетворяющим системе (11)-(13). Это значит, что в случае системы (11)-(13) мы можем для решения задачи Коши воспользоваться прямым и обратным методом рассеяния для оператора $X - i\zeta\Lambda$ вида (15), (16).

В заключение необходимо отметить, что в то время, как в системе (1)-(3) независимые переменные x и t имеют смысл, соответственно, пространственной и временной координат, в системе (11)-(13) переменные x,t являются так называемыми "конусными" (или характеристическими) координатами. Для того, чтобы с помощью определяющих соотношений получить уравнение sine-Gordon с самосогласованным источником в "физических" переменных x,t, придется существенно изменить вид определяющих соотношений. Эти изменения оказываются более радикальными по сравнению с теми изменениями, которым подвергаются операторы $X - i\zeta\Lambda$ и $T = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{\zeta}F$ при переходе от "конусных" переменных к "физическим" переменным. Детальному рассмотрению этого вопроса будет посвящена отдельная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-88-728, Дубна, 1988.
2. Ablowitz M.J. et al. - Phys.Rev.Lett., 1973, v.31, No.2, p.125.
3. Ablowitz M.J. et al. - Phys.Rev.Lett., 1973, v.30, No.25, p.1262.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 октября 1991 года.