сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-91-460

Р.М.Ямалеев

# УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ТЕТРАНИОНОВ

1991

## ВВЕДЕНИЕ

Релятивистское соотношение между энергией, импульсом и массой частицы, если рассматривать это соотношение как квадратичное уравнение относительно величины энергии, определяет два значения энергии: $\mathcal{E} = +c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}$ , $\mathcal{E} = -c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}$ . Это обстоятельство оказалось весьма важным для квантовой теории и привело к открытию античастицы. Впервые понятие античастицы возникло в теории Дирака[1,2] . Как следствие квадратичности релятивистского соотношения, в решение уравнения Дирака наряду с состояниями с положительной энергией входят состояния с отрицательной энергией. Чтобы интерпретировать эти состояния, Дирак предположил, что все уровни вакуума с отрицательной энергией заполнены электронами, а все уровни с положительной энергией свободны. Согласно этой гипотезе, электрон с отрицательной энергией может поглотить излучение и перейти в состояние с положительной энергией. В результате мы будем наблюдать электрон с зарядом $-|e|$ и энергией $+|\mathcal{E}|$ и отсутствие электрона с зарядом $-|e|$ и энергией $-|\mathcal{E}|$. Если сравнить последнее с состоянием вакуума, то мы обнаруживаем частицу с зарядом $+|e|$ и энергией $+|\mathcal{E}|$. Эта частица называется позитроном. Такова основа объяснения процесса рождения пар в теории Дирака.

Формально уравнение Дирака содержит возможность описания как частиц с отрицательным электрическим зарядом, так и их античастиц с противоположным зарядом. Переход от волновой функции частицы к волновой функции античастицы осуществляется с помощью операции комплексного сопряжения и унитарного преобразования.

В настоящей работе мы предлагаем обобщение этой схемы на случай, когда энергия выражается через импульс и массу частицы полиномом четвертой степени. Вид этого полинома определяется однозначно, если комплексные числа, так широко применяемые в квантовой механике, заменить на мультикомплексные числа четвертого порядка. Таким способом мы получаем новый формализм и уравнение, обобщающее уравнение Дирака и описывающее четыре частицы, соотносящиеся друг с другом как античастицы. Полином четвертой степени определяет четыре значения энергии: положительное, отрицательное и мнимое с положительным и отрицательным знаками. В рамках классической механики состояния с мнимой и отрицательной энергией не имеют смысла. Однако в квантовой механике в рамках предлагаемого формализма мы получаем описание 4 частиц с зарядом $+\kappa$, $-\kappa$, $i\kappa$, $-i\kappa$ и с положительной энергией. Эту группу частиц мы будем называть тетранионами. В данном случае состояние вакуума есть состояние, в котором все уровни с отрицательной и мнимой энергией заполнены тетранионами. При этом четверка тетранионов образуется в результате поглощения определенного количества энергии и эта же четверка аннигилирует, испуская ту же порцию энергии в виде излучения. Важно понимать, что, приняв теорию Дирака, мы совершили переход от одночастичной к двухчастичной теории, описывающей частицы обоих знаков заряда. Обобщая этот подход, мы получаем многочастичную теорию, описывающую систему частиц, соотносящихся друг с другом как античастицы. Степень величины энергии в уравнении, выражающем связь энергии с импульсом и массой частицы, соответствует числу частиц в данной группе. Нерелятивистское выражение определяет одночастичную теорию. Релятивистское соотношение приводит к описанию пары: частицы-античастицы. Третий порядок описывает систему из трех античастиц с зарядами $\kappa$, $\theta\kappa$, $\theta^2\kappa$, где $\theta^3 = 1$ (трионы)[3,4].

Обобщая эту схему на произвольную степень, мы получим формализм квантовой механики на мультикомплексных числах, описывающих группу частиц с зарядами $\theta^i\kappa$, $i = 1, 2, \ldots,$ , где $\theta$ - примитивный корень уравнения $\theta^n = 1$. В настоящей работе мы фиксируем свое внимание на случае $n = 4$, интересно, что в этом случае мы имеем предельный переход к релятивистской теории, аналогично тому, как релятивистская теория переходит в нерелятивистскую, при $\frac{v}{c} \to 0$.

## 1. МУЛЬТИКОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Достаточно подробно теория $\mathfrak{MC}_n$ (мультикомплексных) чисел порядка $n$ и тригонометрии, связанной с ними, а также библиография работ, посвященных этим числам, изложена в [5]. Перечислим вкратце определение и основные свойства алгебры $\mathfrak{MC}_4$-чисел.

Базисный элемент $\mathfrak{MC}_4$ удовлетворяет условию

$$e^4 = -1. \qquad (1\text{-}1)$$

$\mathfrak{MC}_4$-число определяется как сумма 4 независимых величин:

$$\overset{1}{q} = a_1 + a_2 e + a_3 e^2 + a_4 e^3, \qquad (1\text{-}2)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in R.$$



Частное решение $e = \exp(\frac{i\pi}{4})$ уравнения (1-1) сводит $\overset{1}{q}$ к обычному комплексному числу и не может служить базисом $\mathfrak{MC}_4$. Общее решение (1-1) имеет матричное представление:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1\text{-}3)$$

Любая другая матрица, полученная путем преобразования $E' = UEU^{-1}$, $\det U = 1$, очевидно, тоже удовлетворяет (1-1). Одна из таких матриц есть диагональная матрица собственных значений $E_{ek} = \exp(ik\pi/4)\,\delta_{ek}$, $\mathfrak{MC}_4$-числа имеют 4 сопряжения:

$$\overset{k}{q} = a_1 + a_2 e^{2k-1} + a_3 e^{2(2k-1)} + a_4 e^{3(2k-1)}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \qquad (1\text{-}4)$$

Убедимся, что произведение взаимосопряженных чисел есть вещественное число. Заметим, что базисная единица $e^2$ изоморфна мнимой единице $i$. Обозначив $z_1 = a_1 + ia_3$, $z_2 = a_2 + ia_4$, где $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$, перепишем (1-4):

$$\overset{1}{q} = z_1 + e z_2, \quad \overset{2}{q} = z_1^* + i e z_2^*,$$

$$\overset{3}{q} = z_1 - e z_2, \quad \overset{4}{q} = z_2^* - i e z_2^*. \qquad (1\text{-}5)$$

Отсюда легко увидеть, что

$$\overset{1}{q}\overset{3}{q} = z_1^2 - i z_2^2 = x + iy,$$

$$\overset{2}{q}\overset{4}{q} = z_1^{*2} + i z_2^{*2} = x - iy. \qquad (1\text{-}6)$$

Таким образом,

$$|q|^4 = x^2 + y^2 \qquad (1\text{-}7)$$

есть положительно определенное вещественное число. Величина $|q|$ выполняет роль модуля $\mathfrak{MC}_4$-числа. Единичное $\mathfrak{MC}_4$-число имеет модуль, равный единице. Любое единичное $\mathfrak{MC}_4$-число может быть представлено в экспоненциальной форме:

$$\overset{k}{\eta} = \exp(e^{2k-1}\phi_1 + e^{2(2k-1)}\phi_2 + e^{3(2k-1)}\phi_3), \qquad (1\text{-}8)$$

причем $\overset{1}{\eta}\overset{2}{\eta}\overset{3}{\eta}\overset{4}{\eta} = 1$.

Принимая обозначение $e^2 = i$, перепишем взаимосопряженные экспоненты следующим образом:

$$\overset{1}{\eta} = \exp(i\phi_2 + e(\phi_1 + i\phi_3))$$

$$\overset{2}{\eta} = \exp(-i\phi_2 + ie(\phi_1 - i\phi_3))$$

$$\overset{3}{\eta} = \exp(i\phi_2 - e(\phi_1 + i\phi_3)) \tag{1-9}$$

$$\overset{4}{\eta} = \exp(-i\phi_2 - ie(\phi_1 - i\phi_3)).$$

Рассмотрим преобразование

$$\overset{1}{q}' = \overset{1}{\eta}\overset{1}{q}. \tag{1-10}$$

Пользуясь правилом умножения $\mathfrak{M}\mathcal{C}_4$-чисел, находим

$$a'_k = a'_k(a_1, a_2, a_3, a_4). \tag{1-11}$$

Заметим, что вид этих функций не меняется при изменении сопряжения в соотношении (1-10). Отсюда следует

$$|q'|^4 = |q|^4. \tag{1-12}$$

Следовательно, преобразование (1-11) сохраняет 4-форму $|q(a)|$ неизменной. Это аналог преобразования поворота на плоскости.

Поскольку $\overset{1}{\eta}\overset{3}{\eta} = \exp(i2\phi_2)$, $\overset{2}{\eta}\overset{4}{\eta} = \exp(-i2\phi_2)$, величины $x$, $y$, определенные в (1-6), ведут себя как координаты двумерного вектора при повороте на угол $2\phi_2$.

На основе (1-6) получим явный вид метрического тензора 4-го ранга, ненулевые компоненты которого равны:

$$g_{kkkk} = 1, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

$$g_{1133} = g_{2244} = g_{1124} = -g_{2213} = g_{4413} = -g_{3324} = 1/3. \tag{1-13}$$

## 2. ПЕРЕХОД ОТ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ПЛОСКОСТИ НА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ К УРАВНЕНИЮ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА $\mathfrak{M}\mathcal{C}_4$-ЧИСЛАХ

Уравнение Дирака на двумерной евклидовой плоскости имеет довольно простую форму ($c = 1$):



$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}(e^-) - m & p_x(e^-) + ip_y(e^-) \\ p_x(e^-) - ip_y(e^-) & \mathcal{E}(e^-) + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{2-1}$$

где в присутствии электромагнитного поля $(\phi, \vec{A})$ операторы импульса и энергии имеют вид

$$p_x(e^-) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + e^- A_x, \quad p_y(e^-) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + e^- A_y,$$

$$\mathcal{E}(e^-) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e^-\phi, \tag{2-2}$$

$e^-$ - заряд электрона. В этих операторах мнимая единица присутствует в явном виде. Комплексное сопряжение дает

$$p_x^*(e^-) = -p_x(e^+), \quad p_y^*(e^-) = -p_y(e^+)$$

$$\mathcal{E}^*(e^-) = -\mathcal{E}(e^+), \tag{2-3}$$

$e^+ = -e^-$ - заряд позитрона.

После комплексного сопряжения и унитарного преобразования с помощью оператора

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-4}$$

уравнение (2-1) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}(e^+) - m & p_x(e^+) + ip_y(e^+) \\ p_x(e^+) - ip_y(e^+) & \mathcal{E}(e^+) + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ \phi_1^* \end{pmatrix} = 0. \tag{2-5}$$

Это уравнение отличается от (2-1) только тем, что операторы $\mathcal{E}$, $p_x$, $p_y$ содержат величину заряда с противоположным знаком. Таким образом, уравнение Дирака описывает равным образом как движение электрона, так и движение античастицы - позитрона. Именно это свойство уравнения Дирака мы попытаемся обобщить, переходя от комплексных чисел к $\mathfrak{M}\mathcal{C}_4$-числам.

Уравнение (2-1) есть результат матричной линеаризации основного соотношения релятивистской механики:

$$(\mathcal{E}_r - m_r)(\mathcal{E}_r + m_r) = (p_x + ip_y)(p_x - ip_y). \tag{2-6}$$

Это соотношение имеет очевидное обобщение в рамках $\mathfrak{M}\mathcal{C}_4$-чисел.

Положим

$$\overset{1}{\pi} = \pi_1 + e\pi_2 + e^2\pi_3 + e^3\pi_4. \tag{2-7}$$

По аналогии с (2-6) мы постулируем соотношение:

$$\mathcal{E}^4 - m^4 = \overset{1}{\pi}\overset{2}{\pi}\overset{3}{\pi}\overset{4}{\pi}. \tag{2-8}$$

Может быть установлено соответствие между (2-8) и (2-6) с помощью некоторого предельного перехода. Введем в (2-8) безразмерный параметр $\ell$ следующим образом:

$$(\mathcal{E}^2/\ell^2 - m^2\ell^2)(\mathcal{E}^2/\ell^2 + m^2\ell^2) = \overset{1}{\pi}\overset{2}{\pi}\overset{3}{\pi}\overset{4}{\pi}. \tag{2-9}$$

Здесь $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\ell)$ есть некоторая функция от $\ell$, асимптотическое поведение которой при $\ell \to \infty$ мы задаем по формуле

$$\mathcal{E}^2 \xrightarrow{\ell \to \infty} \mathcal{E}_r^2 - m_r^2 + m^2\ell^4. \tag{2-10}$$

При $\ell \to \infty$ левая часть (2-9) принимает вид

$$\lim_{\ell\to\infty} (\mathcal{E}_r^2 - m_r^2)\left(\frac{\mathcal{E}_r^2 - m_r^2}{\ell^2} + 2m^2\ell^2\right)\frac{1}{\ell^2} = 2m^2(\mathcal{E}_r^2 - m_r^2).$$

Используя формулы (1-6), (1-7), получим

$$2(\mathcal{E}_r^2 - m_r^2)m^2 = (\overset{1}{\pi}\overset{3}{\pi})(\overset{2}{\pi}\overset{4}{\pi}). \tag{2-11}$$

Полагая

$$p_x = (\pi_1^2 - \pi_3^2 + 2\pi_2\pi_4)/(\sqrt{2}m),$$

$$p_y = (\pi_4^2 - \pi_2^2 + 2\pi_1\pi_3)/(\sqrt{2}m),$$

получим соотношение (2-6).

Матричная факторизация соотношения (2-8) приводит нас к уравнению (далее мы полагаем $\ell = 1$):



$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} - m & \overset{4}{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E} - im & \overset{3}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E} + m & \overset{2}{\pi} \\ \overset{1}{\pi} & 0 & 0 & \mathcal{E} + im \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{1}{\Phi}_1 \\ \overset{1}{\Phi}_2 \\ \overset{1}{\Phi}_3 \\ \overset{1}{\Phi}_4 \end{pmatrix} = 0. \tag{2-12}$$

Здесь $\overset{m}{\pi}$, $\overset{m}{\Phi}_n$, ($m, n = 1,2,3,4$) являются $\mathfrak{M}\mathcal{C}_4$-числами. Компоненты $\overset{1}{\pi} = \overset{1}{\pi}_1 + i\overset{1}{\pi}_2 + e(\overset{1}{\pi}_3 + i\overset{1}{\pi}_4)$ мы определяем как дифференциальный оператор

$$\overset{1}{\pi}_k = e\frac{\partial}{\partial x^k} + \kappa A_k = \overset{1}{\pi}_k(\kappa), \tag{2-13}$$

где $\kappa$ - вещественная константа, имеющая смысл заряда, $A_k$ - потенциал внешнего поля, аналог векторного потенциала электромагнитного поля.

Таким образом, $\overset{1}{\pi}_k \in \mathfrak{M}\mathcal{C}_4$. Он имеет следующие сопряжения:

$$\begin{aligned} \overset{2}{\pi}_k &= i\left(e\frac{\partial}{\partial x^k} + (-i\kappa)A_k\right) = i\overset{1}{\pi}_k(-i\kappa) \\ \overset{3}{\pi}_k &= -\left(e\frac{\partial}{\partial x^k} + (-\kappa)A_k\right) = -\overset{1}{\pi}_k(-\kappa) \\ \overset{4}{\pi}_k &= -i\left(e\frac{\partial}{\partial x^k} + i\kappa A_k\right) = -i\overset{1}{\pi}_k(i\kappa). \end{aligned} \tag{2-14}$$

Для оператора $\mathcal{E}$ имеем аналогичные выражения:

$$\overset{1}{\mathcal{E}} = e\frac{\partial}{\partial t} + \kappa\phi = \mathcal{E}(\kappa),$$

где $\phi$ - аналог скалярного электромагнитного поля. Сопряжения $\overset{1}{\mathcal{E}}$ имеют вид

$$\overset{2}{\mathcal{E}} = i\mathcal{E}(-i\kappa), \quad \overset{3}{\mathcal{E}} = -\mathcal{E}(-\kappa), \tag{2-15}$$

$$\overset{4}{\mathcal{E}} = -i\mathcal{E}(i\kappa).$$

Итак, все входящие в (2-12) величины есть $\mathfrak{M}\mathcal{C}_4$-числа, записанные в определенном сопряжении. Изменим сопряжение этих чисел на единицу в следующей последовательности: $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 4$, $4 \to 1$. В результате уравнение (2-12) примет вид

$$\begin{pmatrix} i\mathcal{E}-m & i\overset{1}{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & i\mathcal{E}-im & i\overset{4}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & i\mathcal{E}+m & i\overset{3}{\pi} \\ i\overset{2}{\pi} & 0 & 0 & i\mathcal{E}+im \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{2}{\Phi}_1 \\ \overset{2}{\Phi}_2 \\ \overset{2}{\Phi}_3 \\ \overset{2}{\Phi}_4 \end{pmatrix} = 0. \qquad (2\text{-}16)$$

Согласно (2-14), (2-15) здесь операторы $\mathcal{E}$ и $\pi$ уже зависят от заряда $\kappa^1 = -i\kappa$. После умножения уравнения (2-16) на $(-i)$ и применения унитарного преобразования с матрицей

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}17)$$

мы снова возвращаемся к исходной форме уравнения (2-12), где $\kappa$ заменен на $\kappa^1 = -i\kappa$:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}-m & \overset{4}{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}-im & \overset{3}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}+m & \overset{3}{\pi} \\ \overset{1}{\pi} & 0 & 0 & \mathcal{E}+im \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{2}{\Phi}_2 \\ \overset{2}{\Phi}_3 \\ \overset{2}{\Phi}_4 \\ \overset{2}{\Phi}_1 \end{pmatrix} = 0. \qquad (2\text{-}18)$$

Дальнейшее повторение операции $\mathfrak{M}\mathcal{C}_4$-сопряжения и унитарного преобразования с матрицей (2-17) оставляет форму уравнений (2-12) неизменной, если переобозначать заряды: $\kappa^2 = -\kappa$, $\kappa^3 = i\kappa$.

Пусть $\overset{k}{\Phi}$ состоит из $\mathfrak{M}\mathcal{C}_4$-чисел в k-м сопряжении. Тогда решение, соответствующее заряду $\kappa^k$, может быть найдено по формуле

$$\Psi(\kappa^k) = U^k \overset{k+1}{\Phi}, \quad k = 1, 2, 3. \qquad (2\text{-}19)$$

В заключение этого раздела приведем решения уравнения (2-12) в системе покоя тетраниона:



$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\{-\frac{imt}{h} e\}$$

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\{\frac{mt}{h} e\}$$

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\{\frac{imt}{h} e\}$$

$$\Psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\{-\frac{mt}{h} e\}.$$

## 3. ТРАНСФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ (2-12)

Правая часть (2-8) есть модуль в четвертой степени числа $\pi \in \mathfrak{M}\mathcal{C}_4$, поэтому она инвариантна относительно преобразования

$$(\overset{k}{\pi})' = \overset{k}{\eta}\,\overset{k}{\pi}, \qquad (3\text{-}1)$$

где $|\eta| = 1$. Согласно п.1 это трехпараметрическое преобразование, аналогичное преобразованию поворота на плоскости $(x, y)$. Чтобы установить связь с поворотом, воспользуемся соотношениями (2-11). При этом

$$p_x + ip_y = \overset{1}{\pi}\,\overset{3}{\pi}/(\sqrt{2}m), \quad p_x - ip_y = \overset{2}{\pi}\,\overset{4}{\pi}/(\sqrt{2}m).$$

Преобразование (3-1) дает

$$p_x' + ip_y' = (\overset{1}{\eta}\,\overset{3}{\eta})(p_x + ip_y), \qquad (3\text{-}2)$$

$$\overset{1}{\eta}\,\overset{3}{\eta} = \exp(i2\phi_2).$$

Таким образом, преобразование (3-2) есть обычный поворот в плоскости $(x, y)$ на угол $(2\phi_2)$.

Рассмотрим, каким образом реализуется преобразование (3-1) в уравнении (2-12). Запишем это уравнение в следующем виде:

$$(A_0 + A(\pi))(\overset{1}{\Phi}) = 0, \qquad (3\text{-}3)$$

где $A_0$ - диагональная матрица с элементами $(\mathcal{E} - m,\ \mathcal{E} - im,\ \mathcal{E} + m,\ \mathcal{E} + im)$, $(A(\pi))_{ik} = \overset{k}{\pi}\,\delta_{i+1,k}$, $(\Phi)$-столбец $\{\overset{1}{\Phi}_k\}$, $i, k = 1,2,3,4$. Мы ищем трехпараметрическую матрицу преобразования $\mathfrak{R}$, которая коммутирует с диагональной матрицей $A_0$, переводит $A(\pi)$ в $A(\eta\pi)$ и $\det\mathfrak{R} = 1$. Этим условиям удовлетворяет диагональная матрица следующего вида:

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 \end{pmatrix}, \qquad (3\text{-}4)$$

где

$$\rho_1 = \exp(-i\psi_0 - e\psi_1(1+i))$$

$$\rho_2 = \exp(i\psi_0 - ie\psi_2(1+i))$$

$$\rho_3 = \exp(-i\psi_0 + e\,\psi_1(1+i)) \qquad (3\text{-}5)$$

$$\rho_4 = \exp(i\psi_0 + ie\,\psi_2(1+i))$$

$$\det\mathfrak{R} = \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = 1.$$

В результате преобразования

$$A(\pi') = \mathfrak{R}A(\pi)\,\mathfrak{R}^{-1} \qquad (3\text{-}6)$$

получим

$$(\overset{1}{\pi})' = (\rho_4\rho_1^{-1})\,\overset{1}{\pi}, \quad (\overset{2}{\pi})' = (\rho_3\rho_4^{-1})\,\overset{2}{\pi}$$

$$(\overset{3}{\pi})' = (\rho_2\rho_3^{-1})\,\overset{3}{\pi}, \quad (\overset{4}{\pi})' = (\rho_1\rho_2^{-1})\,\overset{4}{\pi}.$$



Если подставить сюда выражения для $\rho_k$ $(k = 1,2,3,4)$ из (3-5), получим

$$(\overset{k}{\pi})' = (\overset{k}{\eta})(\overset{k}{\pi}), \qquad (3\text{-}7)$$

где $\overset{k}{\eta}$ имеет вид (1-9), причем

$$\phi_2 = 2\psi_0, \quad \phi_1 = \psi_1 - \psi_2, \quad \phi_3 = \psi_1 + \psi_2. \qquad (3\text{-}8)$$

Таким образом, мы доказали, что преобразованию (3-1) соответствует преобразование уравнения (3-3) следующего вида:

$$\mathfrak{R}(A_0 + A(\pi))\,\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{R}\,\overset{1}{\Phi} = 0.$$

Здесь столбец $\overset{1}{\Phi}$ является аналогом спинора в уравнении Дирака (2-1). Матричные элементы матрицы уравнения (2-1) имеют соответствующее спинорное представление

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} - m & p_x + ip_y \\ p_x - ip_y & \mathcal{E} + m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \xi_1\bar{\xi}_2 & \xi_1\bar{\xi}_2 \\ \bar{\xi}_1\xi_2 & \xi_2\bar{\xi}_2 \end{pmatrix}. \qquad (3\text{-}9)$$

Преобразование поворота в плоскости $(x, y)$ выражается формулами

$$\xi_1' = \rho_1\xi_1, \qquad \rho_1 = \exp(i\phi_1)$$

$$\xi_2' = \rho_2\xi_2, \qquad \rho_2 = \exp(-i\phi_2) \qquad (3\text{-}10)$$

$$p_x' + ip_y' = \exp(i\phi_1 + i\phi_2)(p_x + ip_y).$$

Спинорное представление матрицы $(A_0 + A(\pi))$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \xi^1_1\xi^2_1\xi^3_1\xi^4_1 & \xi^1_1\xi^1_2\xi^3_2\xi^4_2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^1_2\xi^2_2\xi^3_2\xi^4_2 & \xi^2_2\xi^2_3\xi^1_3\xi^4_3 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^1_3\xi^2_3\xi^3_3\xi^4_3 & \xi^3_3\xi^3_4\xi^1_4\xi^2_4 \\ \xi^4_4\xi^4_1\xi^3_1\xi^2_1 & 0 & 0 & \xi^1_4\xi^2_4\xi^3_4\xi^4_4 \end{pmatrix}. \qquad (3\text{-}11)$$

Здесь величины

$$\xi_n^1 = r_n \exp(-i\alpha - e\beta(1+i)),$$

$$\xi_n^2 = r_n \exp(i\alpha - ie\gamma(1+i)),$$

$$\xi_n^3 = r_n \exp(-i\alpha + e\beta(1+i)), \qquad (3\text{-}12)$$

$$\xi_n^4 = r_n \exp(i\alpha + ie\gamma(1+i)),$$

$(n = 1,2,3,4)$

играют роль спиноров. В отличие от (3-9), где координатам вектора сопоставлены билинейные выражения от компонент спинора, в (3-11) элементы матрицы $A_0 + A(\pi)$ заменены на мономы 4-й степени от величин типа спинор, определенных в (3-12). Похожие объекты были введены различными способами впервые в работах /3,6/. В одном случае они были названы гиперспинорами, в другом - метаспинорами. Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением только четвертого порядка, будем называть величины (3-12) тетраспинорами. Преобразование тетраспиноров

$$(\xi_n^k)' = \rho_k \xi_n^k,$$

где величины $\rho_k$, $k = 1,2,3,4$, определены в (3-5), оставляет неизменной диагональную матрицу $A_0$, в то время как матрица $A(\pi)$ преобразуется по правилу

$$A(\pi') = A(\eta\pi).$$

Знание метрического тензора 4-го порядка (1-13) позволяет получить явный вид метрического тензора, действующего в спинорном пространстве. Ненулевые компоненты этого тензора равны:

$$\epsilon^{1114} = \epsilon^{4443} = \epsilon^{2221} = \epsilon^{3332} =$$

$$\epsilon^{3314} = \epsilon^{1244} = \epsilon^{2234} = \epsilon^{1213} = 1.$$

При перестановке неодинаковых индексов символ $\epsilon^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}$ меняет знак.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы предположили обобщение уравнения Дирака в двумерной плоскости путем замены комплексных чисел на мультиплексные числа 4-го порядка. Полученное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению 4-го порядка, обобщает свойства уравнения Дирака и описывает четыре античастицы с зарядами κ, iκ, -κ, -iκ. Эту группу частиц мы называем тетранионами. Уравнение 4-го порядка имеет 4 решения с положительной, отрицательной и мнимыми энергиями (в состоянии покоя - массами). Обобщая гипотезу Дирака о вакууме, мы полагаем, что состояния с отрицательной и мнимыми массами полностью заполнены тетранионами. Таким образом, здесь мы имеем новый подход к описанию частиц с мнимыми массами - тахионами /7/. Предложенный подход имеет очевидное обобщение на случай произвольных степеней. Для этого достаточно заменить мультикомплексное число 4-го порядка на мультикомплексное число произвольного порядка. Однако следует помнить, что свойства мультикомплексных чисел существенно зависят от порядка. Например, если степень уравнения равна простому числу, мы получим теорию, в целом повторяющую теорию трионов /4/, если степень есть $2^n$, то такая теория будет очень похожей на теорию фермионов ($n = 1$) и тетранионов ($n = 2$). В остальных случаях мы будем иметь некоторую смесь теории фермионов и трионов.

В следующей работе мы рассмотрим обобщение уравнения Дирака в пространстве трех измерений, а также статистику для трионов и тетранионов.

Автор признателен проф.Давиду Финкельштейну (Технологический институт, Атланта, США) за проявленный интерес к исследованиям в этой области и ценные замечания, а также благодарен коллегам из Франции (г.Страсбург, Институт ядерных исследований) проф.Н.Флеури и доктору М.Рауш де Траубенберг за многочисленные стимулирующие дискуссии по изложенным в данной работе вопросам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дирак П.А.М. - Принципы квантовой механики. М.: Наука,1979.
2. Dirac P.A.M. - Proc.Roy.Soc (London), 1930, A126, p.360.
3. Finkelstein D. - Phys. Rev. Lett., 1986, 56(15), p.1532.
   Finkelstein D., Finkelstein S.R., Holm Ch. - Int. J. Theor. Phys., 1986, 25, p.441.
4. Ямалеев Р.М. - Сообщения ОИЯИ, P5-87-766, Дубна, 1987; P2-88-147б Дубна, 1988.

5. Fleury N., Raush de Traubenberg M., Yamaleev R.M. - Commutative Extended Complex Numbers and Connected Trigonometry, Preprint CRN - PHTH/91 - 07.
6. Fleury N., Raush de Traubenberg M. - Beyond Spinors - in Leite Lopes Festschrift, 1988, p.79, Singapore: World Scientific.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 октября 1991 года.