объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-91-416

В.К.Мельников

О МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Направлено в Труды II Конференции по методу ренормгруппы, Дубна, 3 - 6 сентября 1991 г.

1991

В настоящее время метод определяющих соотношений является весьма эффективным средством для исследования нелинейных эволюционных уравнений с источником. Впервые этот метод был использован мною в 1988 г. для интегрирования уравнения Кортевега - де Вриса с самосогласованным источником в докладе на конференции в Комо[1]. Дальнейшее развитие идей, содержащихся в этом докладе, позволило проинтегрировать уравнение Кортевега - де Вриса при произвольном выборе источника в виде интеграла Фурье по собственным функциям так называемого порождающего оператора[2-4]. Объяснение универсального характера этого метода было дано в моих докладах на конференциях в Колимбари (Крит) и в Киеве в 1989 г.[5]. Позже этот метод был использован для детального исследования многих других нелинейных эволюционных уравнений с источником: нелинейного уравнения Шредингера с источником[6], модифицированного уравнения Кортевега - де Вриса с источником, уравнения sin - Gordon с источником[7] и ряда других[8]. При этом были обнаружены многие дотоле неизвестные явления в динамике солитонных решений этих уравнений: захват и удержание солитонов[1,9], рождение и уничтожение солитонов[3,6,7] и ряд других. Все эти результаты уже докладывались мною на конференциях в Дубне, Монпелье и Брюсселе в прошлом году.

В настоящем докладе возможности этого метода будут продемонстрированы на примере многокомпонентного нелинейного уравнения Шредингера с источником. Решения этого уравнения обладают рядом примечательных свойств, еще не встречавшихся ранее в уравнениях этого типа, например, движение солитонов в данной системе может иметь хаотический характер. Причина этого удивительного явления состоит в следующем. Интересующая нас система допускает исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния для некоторого линейного оператора L. Однако система эволюционных уравнений для данных рассеяния в интересующем нас случае является существенно нелинейной. В практике применения метода обратной задачи рассеяния для исследования нелинейных эволюционных уравнений мы впервые сталкиваемся с подобным явлением.

Итак, рассмотрим систему уравнений вида

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + 2uu^*u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2i \sum_{n=1}^{N} [\hat{\phi}_n^- A_n (\hat{\psi}_n^+)^* +$$

$$+\hat{\phi}_n^{+} A_n^{*}(\hat{\psi}_n^{-})^{*} \,] + 2i \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,t,\zeta)\, C(t,\zeta)\, \psi^{*}(x,t,\zeta)\, d\zeta, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_n^{-}}{\partial x} + u\hat{\psi}_n^{-} - i\eta_n \hat{\phi}_n^{-} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_n^{-}}{\partial x} - u^{*}\hat{\phi}_n^{-} + i\eta_n \hat{\psi}_n^{-} = 0, \quad n = 1, \dots, N, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_n^{+}}{\partial x} + u\hat{\psi}_n^{+} - i\bar{\eta}_n \hat{\phi}_n^{+} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_n^{+}}{\partial x} - u^{*}\hat{\phi}_n^{+} + i\bar{\eta}_n \hat{\psi}_n^{+} = 0, \quad n = 1, \dots, N, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + u\psi - i\zeta\phi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} - u^{*}\phi + i\zeta\psi = 0, \quad \zeta \in (-\infty, \infty), \qquad (4)$$

где черта означает комплексное сопряжение, а звездочка означает эрмитово сопряжение. Здесь u – вектор-строка с r_0 компонентами и, следовательно, левая часть равенства (1) является обычным многокомпонентным нелинейным уравнением Шредингера, впервые проинтегрированным с помощью метода обратной задачи рассеяния в работе [10]. Правая часть этого равенства является источником, образованным решениями линейных систем (2)-(4). Мы предположим здесь, что $\hat{\phi}_n^{-}$ и $\hat{\phi}_n^{+}$ являются векторами-строками с двумя компонентами каждый, т.е. справедливы равенства

$$\hat{\phi}_n^{-} = (p_n^{-}, \phi_n^{-}), \quad \hat{\phi}_n^{+} = (p_n^{+}, \phi_n^{+}), \quad n = 1, \dots, N, \qquad (5)$$

где p_n^{-}, ϕ_n^{-} и p_n^{+}, ϕ_n^{+} являются скалярами, а $\hat{\psi}_n^{-}$ и $\hat{\psi}_n^{+}$ – прямоугольными матрицами с r_0 строками и двумя столбцами каждая, т.е. имеют место представления

$$\hat{\psi}_n^{-} = \left| q_n^{-} \;\; \psi_n^{-} \right|, \quad \hat{\psi}_n^{+} = \left| q_n^{+} \;\; \psi_n^{+} \right|, \quad n = 1, \dots, N, \qquad (6)$$

где q_n^{-}, ψ_n^{-} и q_n^{+}, ψ_n^{+} – векторы-столбцы с r_0 компонентами каждый. Кроме того, мы предполагаем, что величины A_n являются квадратными матрицами второго порядка, имеющими вид

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & a_n \\ \beta_n & \gamma_n \end{vmatrix}, \quad n = 1, \dots, N. \qquad (7)$$

Наконец, мы предположим, что ϕ – вектор-строка с $r_0 + 1$ компонентами, ψ является прямоугольной матрицей с r_0 строками и $r_0 + 1$ столбцами, а C – эрмитовой матрицей порядка $r_0 + 1$.

Всюду в дальнейшем нас будет интересовать решение

$$\begin{aligned} & u = u(x,t), \\ & \phi_n^{-} = \phi_n^{-}(x,t), \ \psi_n^{-} = \psi_n^{-}(x,t), \ p_n^{-} = p_n^{-}(x,t), \ q_n^{-} = q_n^{-}(x,t), \\ & \phi_n^{+} = \phi_n^{+}(x,t), \ \psi_n^{+} = \psi_n^{+}(x,t), \ p_n^{+} = p_n^{+}(x,t), \ q_n^{+} = q_n^{+}(x,t), \\ & \phi = \phi(x,t,\zeta), \quad \psi = \psi(x,t,\zeta) \end{aligned} \qquad (8)$$

системы (1)-(4), при любом $t \geq 0$ удовлетворяющее следующим условиям:

$$\sum_{s=0}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial^{s} u(x,t)}{\partial x^{s}} \right\| dx < \infty, \qquad (9)$$

$$\begin{aligned} & |\phi_n^{-}(x,t)| + \|\psi_n^{-}(x,t)\| \to 0, \quad \text{если} \ x \to \pm\infty, \\ & |\phi_n^{+}(x,t)| + \|\psi_n^{+}(x,t)\| \to 0, \quad \text{если} \ x \to \pm\infty, \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} & |p_n^{-}(x,t)| + \|q_n^{-}(x,t)\| \to \infty, \quad \text{если} \ x \to \pm\infty, \\ & |p_n^{+}(x,t)| + \|q_n^{+}(x,t)\| \to \infty, \quad \text{если} \ x \to \pm\infty, \end{aligned} \qquad (11)$$

а решение ϕ, ψ системы (4) при $x \to -\infty$ обладает асимптотикой вида

$$\phi(x,t,\zeta) \sim a \exp(i\zeta x), \quad \psi(x,t,\zeta) \sim b \exp(-i\zeta x), \qquad (12)$$

где вектор-строка $a = a(t,\zeta)$ с $r_0 + 1$ компонентами и прямоугольная матрица $b = b(t,\zeta)$ с r_0 строками и $r_0 + 1$ столбцами заданы заранее. Согласно условию (10) точка $\eta = \eta_n$ является точкой дискретного спектра линейного оператора L вида

$$L = \Lambda\partial + U, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad (13)$$

где

$$\Lambda = \operatorname{diag}(1, -1, \dots, -1), \quad U = \begin{vmatrix} 0 & u \\ u^{*} & 0 \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, не оговаривая это особо, что все точки $\eta = \eta_n$ дискретного спектра оператора L являются простыми, $n = 1, \dots, N$.

Для нахождения интересующего нас решения (8) системы (1)-(4) мы можем воспользоваться методом обратной задачи рассеяния для указанного выше оператора L. С помощью метода определяющих соотношений мы можем получить систему эволюционных уравнений для данных рассеяния оператора L вида (13),(14) с потенциалом $u = u(x, t)$, удовлетворяющим системе (1)-(4). Метод определяющих соотношений играет здесь ту же самую роль, что и различные операторные представления типа Лакса в обычной схеме применения метода обратной задачи рассеяния для исследования нелинейных эволюционных уравнений. Названные выше результаты получаются следующим образом.

Рассмотрим уравнение

$$(L - i\eta)\, f_0 = 0 .$$

При любом вещественном η это уравнение имеет два фундаментальных решения f_0^- и f_0^+, обладающих асимптотиками вида

$$f_0^-(x, \eta) \sim \exp(i\eta\Lambda x), \qquad \text{если} \quad x \to -\infty ,$$

$$f_0^+(x, \eta) \sim \exp(i\eta\Lambda x), \qquad \text{если} \quad x \to \infty .$$

При любых вещественных x и η между решениями f_0^- и f_0^+ имеется связь

$$f_0^+(x, \eta) = f_0^-(x, \eta)\, S(\eta),$$

где матрица $S = S(\eta)$ не зависит от x. Положим

$$f_0^- = \begin{vmatrix} \phi_1^- & \phi_2^- \\ \psi_1^- & \psi_2^- \end{vmatrix}, \qquad f_0^+ = \begin{vmatrix} \phi_1^+ & \phi_2^+ \\ \psi_1^+ & \psi_2^+ \end{vmatrix}, \qquad S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix},$$

где величины ϕ_1^-, ϕ_1^+ и S_{11} – скаляры, ϕ_2^-, ϕ_2^+ и S_{12} – векторы-строки с r_0 компонентами каждый, ψ_1^-, ψ_1^+ и S_{21} – векторы-столбцы с r_0 компонентами каждый и, наконец, ψ_2^-, ψ_2^+ и S_{22} – квадратные матрицы порядка r_0. Как известно, величины ϕ_1^-, ψ_1^-, ϕ_2^+, ψ_2^+ и S_{22} допускают аналитическое продолжение по параметру η в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\eta < 0$; напротив, величины ϕ_1^+, ψ_1^+, ϕ_2^-, ψ_2^- и S_{11} допускают аналитическое продолжение по параметру η в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$. Нулям $\eta = \eta_n$ функции $S_{11}(\eta)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$ соответствуют точки дискретного спектра оператора L, поскольку при $\eta = \eta_n$ имеют место равенства

$$\phi_1^+(x, \eta_n) = \phi_2^-(x, \eta_n) B_n, \quad \psi_1^+(x, \eta_n) = \psi_2^-(x, \eta_n) B_n, \tag{15}$$

где вектор-столбец B_n не зависит от x. Точкам $\eta = \bar\eta_n$ также соответствуют точки дискретного спектра оператора L, так как при $\eta = \bar\eta_n$ выполняются соотношения

$$\phi_1^-(x, \bar\eta_n) = \phi_2^+(x, \bar\eta_n)\hat B_n, \quad \psi_1^-(x, \bar\eta_n) = \psi_2^+(x, \bar\eta_n)\hat B_n, \tag{16}$$

где вектор-столбец $\hat B_n$ также не зависит от x. Полученные таким образом векторы-столбцы B_n и $\hat B_n$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} S_{22}^*(\bar\eta_n) B_n = S_{22}(\bar\eta_n)\hat B_n = 0, \quad n = 1, \dots, N, \\ B_n^* S_{22}'(\bar\eta_n)\hat B_n = -\bar S_{11}'(\eta_n), \quad n = 1, \dots, N. \end{gathered} \tag{17}$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, штрих означает производную по параметру η.

Теперь мы должны конкретизировать выбор решений p_n^-, q_n^- и ϕ_n^-, ψ_n^- системы (2) и решений p_n^+, q_n^+ и ϕ_n^+, ψ_n^+ системы (3). С этой целью мы введем величины v_n, w_n и $\hat v_n$, $\hat w_n$ с помощью равенств

$$v_n = \frac{\partial}{\partial\eta}[\phi_1^+(x, \eta) - \phi_2^-(x, \eta) B_n]|_{\eta=\eta_n},$$

$$w_n = \frac{\partial}{\partial\eta}[\psi_1^+(x, \eta) - \psi_2^-(x, \eta) B_n]|_{\eta=\eta_n},$$

$$\hat v_n = \frac{\partial}{\partial\eta}[\phi_1^-(x, \eta) - \phi_2^+(x, \eta)\hat B_n]|_{\eta=\bar\eta_n},$$

$$\hat w_n = \frac{\partial}{\partial\eta}[\psi_1^-(x, \eta) - \psi_2^+(x, \eta)\hat B_n]|_{\eta=\bar\eta_n}.$$

Далее, положим

$$\begin{aligned} p_n^- &= \frac{1}{S_{11}'(\eta_n)}[v_n(x) - \phi_2^-(x, \eta_n)\Gamma_n], \\ q_n^- &= \frac{1}{S_{11}'(\eta_n)}[w_n(x) - \psi_2^-(x, \eta_n)\Gamma_n], \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} p_n^+ &= \frac{1}{\bar S_{11}'(\eta_n)}[\hat v_n(x) - \phi_2^+(x, \bar\eta_n)\hat\Gamma_n], \\ q_n^+ &= \frac{1}{\bar S_{11}'(\eta_n)}[\hat w_n(x) - \psi_2^+(x, \bar\eta_n)\hat\Gamma_n], \end{aligned} \tag{19}$$

где векторы-столбцы Γ_n и $\hat{\Gamma}_n$ имеют по r_0 компонент и не зависят от x. Наконец, следуя (15) и (16), выберем решения ϕ_n^-, ψ_n^- и ϕ_n^+, ψ_n^+ соответственно систем (2) и (3) в виде

$$\begin{aligned} \phi_n^- &= \phi_1^+(x, \eta_n) = \phi_2^-(x, \eta_n)\, B_n, \\ \psi_n^- &= \psi_1^+(x, \eta_n) = \psi_2^-(x, \eta_n)\, B_n, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \phi_n^+ &= \phi_1^-(x, \bar{\eta}_n) = \phi_2^+(x, \bar{\eta}_n)\, \hat{B}_n, \\ \psi_n^+ &= \psi_1^-(x, \bar{\eta}_n) = \psi_2^+(x, \bar{\eta}_n)\, \hat{B}_n. \end{aligned} \tag{21}$$

Определенные посредством (18) и (20) решения p_n^-, q_n^- и ϕ_n^-, ψ_n^- системы (2) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} \{ |p_n^-(x)\exp(-i\eta_n x) - 1| + \| q_n^-(x)\exp(-i\eta_n x)\| \} = 0, \\ &\lim_{x\to\infty} \{ |p_n^-(x)\exp(i\eta_n x)| + \| q_n^-(x)\exp(i\eta_n x) - \theta_n \| \} = 0, \\ &\lim_{x\to-\infty} \{ |\phi_n^-(x)\exp(i\eta_n x)| + \| \psi_n^-(x)\exp(i\eta_n x) - B_n\| \} = 0, \\ &\lim_{x\to\infty} \{ |\phi_n^-(x)\exp(-i\eta_n x) - 1| + \| \psi_n^-(x)\exp(-i\eta_n x)\| \} = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\theta_n = -\frac{1}{S'_{11}(\eta_n)} \{ [S'_{22}(\bar{\eta}_n)]^* B_n + S_{22}^*(\bar{\eta}_n)\Gamma_n \}. \tag{23}$$

Таким образом, решение p_n^-, q_n^- системы (2) действительно экспоненциально возрастает при $x\to\pm\infty$, а решение ϕ_n^-, ψ_n^- системы (2) действительно экспоненциально убывает при $x\to\pm\infty$. Кроме того, определенные с помощью (19) и (21) решения p_n^+, q_n^+ и ϕ_n^+, ψ_n^+ системы (3) удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \{ |p_n^+(x)\exp(-i\bar{\eta}_n x) - 1| + \| q_n^+(x)\exp(-i\bar{\eta}_n x)\| \} = 0, \\ &\lim_{x\to-\infty} \{ |p_n^+(x)\exp(i\bar{\eta}_n x)| + \| q_n^+(x)\exp(i\bar{\eta}_n x) - \hat{\theta}_n \| \} = 0, \\ &\lim_{x\to\infty} \{ |\phi_n^+(x)\exp(i\bar{\eta}_n x)| + \| \psi_n^+(x)\exp(i\bar{\eta}_n x) - \hat{B}_n\| \} = 0, \\ &\lim_{x\to-\infty} \{ |\phi_n^+(x)\exp(-i\bar{\eta}_n x) - 1| + \| \psi_n^+(x)\exp(-i\bar{\eta}_n x)\| \} = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\hat{\theta}_n = -\frac{1}{\bar{S}'_{11}(\eta_n)} \{ S'_{22}(\bar{\eta}_n)\hat{B}_n + S_{22}(\bar{\eta}_n)\hat{\Gamma}_n \}. \tag{25}$$

Это значит, что решение p_n^+, q_n^+ системы (3) действительно экспоненциально возрастает при $x\to\pm\infty$, а решение ϕ_n^+, ψ_n^+ системы (3) действительно экспоненциально убывает при $x\to\pm\infty$. Следовательно, приведенный выше выбор решений p_n^-, q_n^- и ϕ_n^-, ψ_n^- системы (2) и решений p_n^+, q_n^+ и ϕ_n^+, ψ_n^+ системы (3) не противоречит условиям (10) и (11). Заметим, что определенные посредством (23) и (25) векторы-столбцы θ_n и $\hat{\theta}_n$ в силу (17) удовлетворяют соотношениям

$$B_n^*\hat{\theta}_n = \theta_n^*\hat{B}_n = 1, \quad n = 1, \dots, N. \tag{26}$$

Последний этап подготовки к написанию эволюционных уравнений для данных рассеяния оператора L в нашем случае состоит в следующем. Прежде всего, посредством равенств

$$\begin{aligned} \omega^- &= i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\alpha_n}{\eta-\eta_n} + \frac{\bar{\alpha}_n}{\eta-\bar{\eta}_n}\right), \\ \omega^+ &= i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\beta_n}{\eta-\eta_n} + \frac{\bar{\beta}_n}{\eta-\bar{\eta}_n}\right), \\ \Omega^- &= i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\alpha_n}{\eta-\eta_n}\theta_n\hat{B}_n^* + \frac{\bar{\alpha}_n}{\eta-\bar{\eta}_n}\hat{B}_n\theta_n^*\right), \\ \Omega^+ &= i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\beta_n}{\eta-\eta_n}B_n\hat{\theta}_n^* + \frac{\bar{\beta}_n}{\eta-\bar{\eta}_n}\hat{\theta}_n B_n^*\right) \end{aligned} \tag{27}$$

определим скаляры ω^-, ω^+ и квадратные матрицы Ω^-, Ω^+. Далее, с помощью величин a и b, входящих в выражения (12) для асимптотик при $x\to-\infty$ решения ϕ, ψ системы (4), определим квадратные матрицы α, β, C^- и C^+ порядка r_0+1 посредством равенств

$$\alpha = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}, \quad \beta = S^{-1}\alpha, \quad C^- = \alpha C \alpha^*, \quad C^+ = \beta C \beta^*, \tag{28}$$

где C – эрмитова матрица порядка r_0+1, содержащаяся в правой части уравнения (1). Положим теперь

$$C^- = \begin{vmatrix} C_{11}^- & C_{12}^- \\ C_{21}^- & C_{22}^- \end{vmatrix}, \quad C^+ = \begin{vmatrix} C_{11}^+ & C_{12}^+ \\ C_{21}^+ & C_{22}^+ \end{vmatrix}, \tag{29}$$

где C^-_{11} и C^+_{11} - скаляры, C^-_{12} и C^+_{12} - векторы-строки с r_0 компонентами каждый, C^-_{21} и C^+_{21} - векторы-столбцы с r_0 компонентами каждый и, наконец, C^-_{22} и C^+_{22} - квадратные матрицы порядка r_0. Наконец, при любом вещественном η определим скаляры J^-_1, J^+_1 и квадратные матрицы J^-_2, J^+_2 с помощью равенств

$$
\begin{aligned}
J^-_1 &= -\pi C^-_{11}(\eta) - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C^-_{11}(\zeta)}{\zeta-\eta}\,d\zeta,\\
J^+_1 &= \pi C^+_{11}(\eta) - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C^+_{11}(\zeta)}{\zeta-\eta}\,d\zeta,\\
J^-_2 &= \pi C^-_{22}(\eta) - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C^-_{22}(\zeta)}{\zeta-\eta}\,d\zeta,\\
J^+_2 &= -\pi C^+_{22}(\eta) - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C^+_{22}(\zeta)}{\zeta-\eta}\,d\zeta,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

где интегралы понимаются в смысле Коши. Для существования этих интегралов необходимо потребовать, чтобы определенные посредством (28) и (29) величины C^-_{11}, C^+_{11} и C^-_{22}, C^+_{22} удовлетворяли условию Гельдера и достаточно быстро стремились к нулю при $\zeta\to\pm\infty$. Эти требования накладывают определенные, впрочем весьма слабые, ограничения на фигурирующие здесь величины a, b и C. Вместе с требованием, чтобы входящий в правую часть уравнения (1) интеграл определял функцию, абсолютно интегрируемую по x на всей вещественной оси, этим исчерпываются все требования, налагаемые на эрмитову матрицу C и коэффициенты a, b асимптотик (12). Здесь нелишне отметить, что согласно (7), (22) и (24) конечная сумма, содержащаяся в правой части уравнения (1), также определяет функцию x, стремящуюся достаточно быстро к нулю при $x\to\pm\infty$. Таким образом, структура правой части уравнения (1) не противоречит требованию (9), налагаемому на решение $u = u(x, t)$.

С учетом приведенных выше обозначений эволюционные уравнения для элементов S-матрицы имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S_{11}}{\partial t} &= S_{11}(J^+_1+\omega^+) - (J^-_1+\omega^- + 2\pi C^-_{11})S_{11},\\
\frac{\partial S_{12}}{\partial t} + 4i\eta^2 S_{12} &= S_{12}(J^+_2+\Omega^-) - (J^-_1+\omega^-)S_{12} + 2\pi C^-_{12}S_{22},\\
\frac{\partial S_{21}}{\partial t} - 4i\eta^2 S_{21} &= S_{21}(J^+_1+\omega^+) - (J^-_2+\Omega^+)S_{21} - 2\pi C^-_{21}S_{11},\\
\frac{\partial S_{22}}{\partial t} &= S_{22}(J^+_2+\Omega^-) - (J^-_2+\Omega^+ - 2\pi C^-_{22})S_{22}.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Здесь мы должны сделать следующие замечания. Прежде всего согласно вытекающему из (28) равенству $C^+ = S^*C^-S$ определенные с помощью (30) величины J^+_1 и J^+_2 зависят от элементов S-матрицы. Следовательно, система уравнений (31) является нелинейной относительно элементов S-матрицы. Второе, система уравнений (31) содержит матрицы Ω^- и Ω^+ вида (27). Значит, эта система уравнений зацеплена с системой уравнений для нормировочных констант B_n и $\hat{B}_n$.

Рассмотрим теперь вытекающие из (31) эволюционные уравнения для коэффициентов отражения R_1 и R_2 вида

$$R_1 = S_{12}S^{-1}_{22}, \quad R_2 = S_{21}S^{-1}_{11}. \tag{32}$$

Нетрудно убедиться, что интересующие нас уравнения имеют вид

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R_1}{\partial t} + 4i\eta^2 R_1 &= R_1(J^-_2+\Omega^+ - 2\pi C^-_{22}) -\\
&\quad - (J^-_1+\omega^-)R_1 + 2\pi C^-_{12},\\
\frac{\partial R_2}{\partial t} - 4i\eta^2 R_2 &= R_2(J^-_1+\omega^- + 2\pi C^-_{11}) -\\
&\quad - (J^-_2+\Omega^+)R_2 - 2\pi C^-_{21}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Эти два уравнения не содержат величин J^+_1 и J^+_2. Далее, они линейны относительно коэффициентов отражения R_1 и R_2. Они также не содержат матрицу Ω^-. Однако они содержат матрицу Ω^+ и, следовательно, они зацеплены с эволюционными уравнениями для нормировочных констант B_n и $\hat{B}_n$. Более того, в силу (25) и (27) они зацеплены с первым и последним уравнениями системы (31). Нетрудно видеть, что все эти связи исчезают в случае $\Omega^+ = 0$, т.е. при выполнении условия $\beta_1 = \ldots = \beta_N = 0$. На основе (5)-(7) легко убеждаемся, что при $\beta_n = 0$ правая часть уравнения (1) не содержит решение p^+_n, q^+_n системы (3), $n = 1,\ldots,N$.

Необходимо также заметить, что уравнения (33) являются неоднородными относительно коэффициентов отражения R_1 и R_2. Они становятся однородными только в случае $C^-_{12} = (C^-_{21})^* = 0$.

Система эволюционных уравнений для нормировочных констант B_m и $\hat{B}_m$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial B_m}{\partial t} + i\{[\beta_m b_m + \gamma_m S'_{11}(\eta_m)]B_m - \alpha_m \Gamma_m\} = 4i\eta_m^2 B_m + \\
&+ B_m[J_1^+(\eta_m) + \omega_m^+] - [J_2^-(\eta_m) + \Omega_m^+]B_m, \\
&\frac{\partial \hat{B}_m}{\partial t} + i\{\hat{B}_m[\bar{\alpha}_m \hat{b}_m + \bar{\gamma}_m \bar{S}'_{11}(\eta_m)] - \bar{\beta}_m \hat{\Gamma}_m\} = 4i\bar{\eta}_m^2 \hat{B}_m + \\
&+ \hat{B}_m[J_1^-(\bar{\eta}_m) + \omega_m^-] - [J_2^+(\bar{\eta}_m) + \Omega_m^-]\hat{B}_m,
\end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned}
&\omega_m^- = i\sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{\bar{\eta}_m - \eta_m} + i\sum_{n\neq m} \frac{\bar{\alpha}_n}{\bar{\eta}_m - \bar{\eta}_n}, \\
&\omega_m^+ = i\sum_{n\neq m} \frac{\beta_n}{\eta_m - \eta_n} + i\sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{\beta}_n}{\eta_m - \bar{\eta}_n}, \\
&\Omega_m^- = i\sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{\bar{\eta}_m - \eta_n}\theta_n \hat{B}_n^* + i\sum_{n\neq m} \frac{\bar{\alpha}_n}{\bar{\eta}_m - \bar{\eta}_n}\hat{B}_n \theta_n^*, \\
&\Omega_m^+ = i\sum_{n\neq m} \frac{\beta_n}{\eta_m - \eta_n} B_n \hat{\theta}_n^* + i\sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{\beta}_n}{\eta_m - \bar{\eta}_n}\hat{\theta}_n B_n^*, \\
&J_1^+(\eta_m) = -i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_{11}^+(\zeta)}{\zeta - \eta_m} d\zeta, \quad J_2^-(\eta_m) = -i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_{22}^-(\zeta)}{\zeta - \eta_m} d\zeta, \\
&J_1^-(\bar{\eta}_m) = -i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_{11}^-(\zeta)}{\zeta - \bar{\eta}_m} d\zeta, \quad J_2^+(\bar{\eta}_m) = -i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_{22}^+(\zeta)}{\zeta - \bar{\eta}_m} d\zeta.
\end{aligned} \tag{35}$$

Кроме того, справедливы равенства

$$b_m = \frac{1}{S'_{11}(\eta_m)}\{\bar{a}_m + \hat{\Gamma}_m^*[S'_{22}(\bar{\eta}_m)]^* B_m\},$$

$$\hat{b}_m = \frac{1}{\bar{S}'_{11}(\eta_m)}\{a_m + \Gamma_m^* S'_{22}(\bar{\eta}_m)\hat{B}_m\}, \tag{36}$$

где

$$a_m = \bar{S}''_{11}(\eta_m) + B_m^* S''_{22}(\bar{\eta}_m)\hat{B}_m. \tag{37}$$

В соответствии с равенствами (23) и (25) из равенств (35) следует, что в общем случае система (34) является системой 2N нелинейных, зацепленных между собой уравнений относительно r_0 – компонентных векторов B_m и $\hat{B}_m$, $m = 1,\ldots,N$. Более того, согласно (23), (25) и (35)-(37) система (34) зацеплена с первым и последним уравнениями системы (31).

Рассмотрим теперь первое уравнение системы (31). Полагая

$$S_{11}(\eta) = S_0(\eta)\prod_{n=1}^{N} \frac{\eta - \eta_n}{\eta - \bar{\eta}_n}, \tag{38}$$

в результате несложных вычислений убеждаемся в справедливости равенств

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial S_0}{\partial t} = (J_1^+ - J_1^- - 2\pi C_{11}^-)S_0, \\
&\frac{d\eta_n}{dt} = i(\alpha_n - \beta_n), \quad n = 1,\ldots,N.
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Согласно (30) функции J_1^+ и $J_1^- + 2\pi C_{11}^-$ допускают аналитическое продолжение по параметру η в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$. При этом в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\eta > 0$ справедливо равенство

$$J_1^+(\eta) - J_1^-(\eta) - 2\pi C_{11}^-(\eta) = i\int_{-\infty}^{\infty}[C_{11}^-(\zeta) - C_{11}^+(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta - \eta}. \tag{40}$$

Далее, на основе (28), (29) и (32) имеет место связь

$$C_{11}^+ = (1 - R_1 R_2)^{-1}(C_{11}^- + C_{12}^- R_2 + R_2^* C_{21}^- + R_2^* C_{22}^- R_2) \tag{41}$$

между величиной C_{11}^+ и элементами матрицы C^-. Таким образом, если нам известна эволюция во времени коэффициентов отражения R_1 и R_2, тогда с помощью равенств (38)-(41) мы можем определить эволюцию во времени функции S_{11}. Таким образом, случай

$\beta_1 = \ldots = \beta_N = 0$ является вполне интегрируемым. В этом случае эволюционные уравнения для коэффициентов отражения R_1 и R_2 в силу (27) и (33) имеют вид

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} + 4i\eta^2 R_1 = R_1(J_2^- - 2\pi C_{22}^-) - (J_1^- + \omega^-)R_1 + 2\pi C_{12}^-,$$
$$\frac{\partial R_2}{\partial t} - 4i\eta^2 R_2 = R_2(J_1^- + \omega^- + 2\pi C_{11}^-) - J_2^- R_2 - 2\pi C_{21}^-, \tag{42}$$

а эволюционные уравнения для нормировочных констант B_m согласно (34) и (35) принимают вид

$$\frac{\partial B_m}{\partial t} + i[\gamma_m S'_{11}(\eta_m)B_m - \alpha_m \Gamma_m] = 4i\eta_m^2 B_m + B_m[J_1^+(\eta_m) + \omega_m^+] - J_2^-(\eta_m)B_m. \tag{43}$$

Теперь мы знаем достаточно для того, чтобы решить обратную задачу рассеяния для оператора L вида (13), (14) при любом $t > 0$ и, следовательно, в случае $\beta_1 = \ldots = \beta_N = 0$ мы можем решить задачу Коши для системы (1)-(4). Действительно, возьмем матрицу F вида

$$F = \begin{vmatrix} 0 & F_1 \\ F_2 & 0 \end{vmatrix}, \tag{44}$$

где

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_1(\eta)\exp(i\eta\omega)\,d\eta - i\sum_{n=1}^{N} \frac{B_n^*}{\bar{S}'_{11}(\eta\ )}\exp(i\bar{\eta}_n\omega),$$
$$F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_2(\eta)\exp(-i\eta\omega)\,d\eta - i\sum_{n=1}^{N} \frac{B_n}{S'_{11}(\eta_n)}\exp(-i\eta_n\omega). \tag{45}$$

Заметим, что в силу (13), (14) и (32) между величинами R_1 и R_2 при любом вещественном η имеется связь $R_2 = -R_1^*$. Отсюда следует справедливость соотношения $F_2 = -F_1^*$ при любом вещественном ω. Рассмотрим интегральное уравнение типа Гельфанда - Левитана

$$K(x,y,t) + F(x+y,t) + \int_{-\infty}^{x} K(x,z,t)\,F(z+y,t)\,dz = 0. \tag{46}$$

Пусть $K = K(x, y, t)$ - решение этого интегрального уравнения. Тогда справедливо равенство

$$[\Lambda, K(x,x,t)] = -U(x,t) = -\begin{vmatrix} 0 & u(x,t) \\ u^*(x,t) & 0 \end{vmatrix}, \tag{47}$$

где $u(x,t)$ - интересующее нас решение системы (1)-(4). Подчеркнем еще раз, что в случае $\beta_1 = \ldots = \beta_N = 0$ равенства (38)-(47) полностью определяют решение системы (1)-(4), причем все встречающиеся здесь уравнения являются линейными.

В заключение необходимо сделать несколько замечаний. Прежде всего, при $r_0 = 1$ в силу (26) и (27) имеем равенства $\Omega^- = \omega^-$, $\Omega^+ = \omega^+$. Отсюда следует, что в случае $r_0 = 1$ система (1)-(4) является вполне интегрируемой при любом выборе параметров $\beta_1, \ldots, \beta_N$. Далее, уместно заметить, что первыми работами, посвященными рассмотрению нелинейных эволюционных уравнений с источником, следует считать работы /11, 12/, появившиеся более десяти лет тому назад. Наконец, практическая ценность уравнений рассматриваемого здесь типа уже продемонстрирована в работах /13-15/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mel'nikov V.K. - In: Nonlinear Evolution Equations: Integrability and Spectral Methods. Manchester University Press, Manchester, 1990, p.265.
2. Mel'nikov V.K. - Inverse Problems, 1990, v.6, No.2, p.233.
3. Mel'nikov V.K. - Inverse Problems, 1990, v.6, No.5, p.809.
4. Mel'nikov V.K. - In: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990, p.77.
5. Mel'nikov V.K. - In: Nonlinear World, v.1, World Scientific, Singapore, 1990, p.229.
6. Mel'nikov V.K. - Commun.Math.Phys., 1991, v.137, No.2, p. 359.
7. Мельников В.К. - Препринт ОИЯИ Р2-91-403, Дубна, 1991.
8. Mel'nikov V.K. - J.Math.Phys., 1990, v.31, No.5, p.1106.
9. Mel'nikov V.K. - Commun.Math.Phys., 1989, v.120, No.3, p.451.

10. Манаков С.В. - ЖЭТФ, 1973, т.65, вып.2(8), с.505.
11. Kaup D.J., Newell A.S. - Adv.Math., 1979, v.31, No.1, p.67.
12. Newell A.S. - In: Solitons. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1980, p.177.
13. Leon J., Latifi A. - J.Phys.A: Math.Gen., 1990, v.23, No.8, p.1385.
14. Latifi A., Leon J. - Preprint PM/90-02, Montpellier,1990.
15. Latifi A., Leon J. - Preprint PM/90-08, Montpellier,1990.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 сентября 1991 года.