91-403

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-91-403

В.К.Мельников

О МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Направлено в Труды 7 Международной конференции
по нелинейным эволюционным уравнениям
и динамическим системам, Италия, июнь 1991 г.

1991

В течение последних двух-трех лет стало ясно, что нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые с помощью метода обратной задачи рассеяния, сохраняют свою интегрируемость, если к ним добавить источник в виде интеграла Фурье по собственным функциям так называемого порождающего оператора. Выяснению причин этого явления были посвящены работы [1,2]. Возникший таким образом класс нелинейных эволюционных уравнений получил название уравнений Лакса с источником. Эти уравнения обладают решениями с богатой и весьма нетривиальной динамикой. Например, в системах, описываемых уравнениями этого типа, возможны захват и удержание солитонов [3,4], рождение и уничтожение солитонов [5,6] и ряд других весьма необычных процессов. Все эти факты были обнаружены с помощью метода определяющих соотношений, который позволил получить эволюционные уравнения для данных рассеяния во всех упомянутых выше случаях. Однако, как было обнаружено совсем недавно, эволюционные уравнения для данных рассеяния в некоторых случаях могут быть существенно нелинейными. Этот факт может явиться основой для новых и совершенно неожиданных явлений, которые будут обнаружены в теории нелинейных эволюционных уравнений, допускающих исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния. В настоящей работе мы рассмотрим случай многокомпонентного нелинейного уравнения Шредингера с источником. При определенных условиях эволюционные уравнения для данных рассеяния в этом случае являются нелинейными, что может явиться причиной хаотического поведения солитонов.

Итак, пусть L и A - линейные дифференциальные операторы вида

$$L = \Lambda\partial + U, \quad A = -i(2\Lambda\partial^2 + U\partial + \partial\cdot U + \Lambda U^2), \tag{1}$$

где

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1), \quad U = \begin{vmatrix} 0 & u \\ u^* & 0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

При этом мы предполагаем, что величина u является вектором-строкой с r_0 компонентами, а звездочкой обозначается эрмитово сопряжение. Таким образом, операторы L и A вида (1),(2) образуют стандартную пару Лакса для многокомпонентного нелинейного уравнения Шредингера, проинтегрированного впервые в работе /7/. Рассмотрим теперь линейную систему уравнений

$$(L - i\eta) f_0 = 0, \quad \eta \in (-\infty, \infty), \quad \frac{\partial f_n}{\partial x} = \tilde{\Psi}_n f_0, \quad n = 1, \dots, 2N, \tag{3}$$

относительно неизвестных величин $f_0, f_1, \dots, f_{2N}$. При этом величины $\Psi_1, \dots, \Psi_{2N}$ будем считать пока неопределенными квадратными матрицами порядка r_0+1, а знаком "~" будем обозначать транспонирование. Пусть, далее, величины $F = F(x, \zeta, \eta)$, $\Psi = \Psi(x, \zeta)$ и $f_0 = f_0(x, \eta)$ являются квадратными матрицами порядка r_0+1 и удовлетворяют соотношению вида

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, \zeta, \eta) = \tilde{\Psi}(x, \zeta) f_0(x, \eta). \tag{4}$$

Наконец, с помощью матриц $f_0, f_1, \dots, f_{2N}$ и F образуем величины $g_0, g_1, \dots, g_{2N}$ и G вида

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + A f_0 + \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n f_n + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, \zeta) F(x, \zeta, \eta) d\zeta,$$

$$g_n = \tilde{\Psi}_n(x) \Lambda f_0(x, \eta) - i(\eta - \eta_n) f_n(x, \eta), \quad n = 1, \dots, 2N, \tag{5}$$

$$G = \tilde{\Psi}(x, \zeta) \Lambda f_0(x, \eta) + i(\zeta - \eta) F(x, \zeta, \eta), \quad \zeta \in (-\infty, \infty),$$

где величины $\Phi_1, \dots, \Phi_{2N}$ и Φ являются пока неопределенными квадратными матрицами порядка r_0+1. Очевидно, что определенные таким образом величины $g_0, g_1, \dots, g_{2N}$ и G также являются квадратными матрицами порядка r_0+1.

Выясним теперь, каким требованиям должны удовлетворять матрицы $U, \Phi_1, \dots, \Phi_{2N}, \Psi_1, \dots, \Psi_{2N}, \Phi$ и Ψ для того, чтобы определенные с помощью равенств (3)-(5) величины $g_0, g_1, \dots, g_{2N}$ и G при любых $x, \eta \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяли соотношениям

$$(L - i\eta) g_0 = \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n g_n + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, \zeta) G(x, \zeta, \eta) d\zeta, \tag{6}$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial x} = 0, \quad n = 1, \dots, 2N, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \zeta \in (-\infty, \infty).$$

С помощью несложных вычислений нетрудно убедиться, что для справедливости соотношений (6) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = \sum_{n=1}^{2N} [\Lambda, \Phi_n \tilde{\Psi}_n] + \int_{-\infty}^{\infty} [\Lambda, \Phi(x, \zeta) \tilde{\Psi}(x, \zeta)] d\zeta, \tag{7}$$

$$(L - i\eta_n) \Phi_n = (\tilde{L} - i\eta_n) \Psi_n = 0, \quad n = 1, \dots, 2N, \tag{8}$$

$$(L - i\zeta) \Phi = (\tilde{L} - i\zeta) \Psi = 0, \quad \zeta \in (-\infty, \infty), \tag{9}$$

где

$$\tilde{L} = -\Lambda \partial + \tilde{U}. \tag{10}$$

Таким образом, соотношения (6) эквивалентны системе уравнений (7)-(9). Для того, чтобы эта система уравнений имела смысл, мы должны позаботиться о том, чтобы левая и правая части уравнения (7) имели одинаковую структуру. С этой целью предположим, что при $n = 1, \dots, N$ выполняется условие $\eta_{N+n} = \bar{\eta}_n$, где черта означает комплексное сопряжение. С учетом этого условия положим при $n = 1, \dots, N$

$$\Psi_n = -\Lambda \bar{\Phi}_{N+n} C_n, \quad \Psi_{N+n} = -\Lambda \bar{\Phi}_n \bar{C}_n, \quad n = 1, \dots, N, \tag{11}$$

где C_n - произвольные, не зависящие от x квадратные матрицы порядка r_0+1. Далее, пусть при любом вещественном ζ имеется связь

$$\Psi = -\Lambda \bar{\Phi} C, \quad \zeta \in (-\infty, \infty), \tag{12}$$

где C - произвольная эрмитова матрица порядка r_0+1 с не зависящими от x элементами. Нетрудно убедиться, что в этой ситуации правая часть уравнения (7) имеет ту же самую структуру, что и левая часть этого уравнения. Замечательной особенностью соотношений (6) является то обстоятельство, что они могут быть использованы для получения эволюционных уравнений для данных рассеяния, необходимых для решения обратной задачи рассеяния. В этой части они играют ту же самую роль, что и различные операторные представления типа Лакса в стандартной схеме применения метода обратной задачи рассеяния для интегрирования различных нелинейных эволюционных уравнений. Именно поэтому они называются определяющими соотношениями. За недостатком места мы лишены не только возможности остановиться более подробно на том, как используются соотношения (6) для получения эволюционных уравнений для данных рассеяния, но не можем привести и самих эволюционных уравнений для данных рассеяния. Однако на некоторых свойствах соотношений (6) мы все-таки сможем остановиться.

Прежде всего, в силу (8)-(10) мы можем выбрать решение уравнений (3),(4) в следующем виде:

$$f_n(x, \eta) = - \frac{i}{\eta - \eta_n} \tilde{\Psi}_n(x) \Lambda f_0(x, \eta), \quad n = 1, \dots, 2N,$$

$$F(x, \zeta, \eta) = \frac{i}{\zeta - \eta} \tilde{\Psi}(x, \zeta) \Lambda f_0(x, \eta), \quad \zeta \in (-\infty, \infty). \tag{13}$$

Согласно (5) такой выбор матриц $f_1, \dots, f_{2N}$ и F приводит к тому, что определяющие соотношения (6) принимают максимально простой вид

$$(L - i\eta) g_0 = 0, \quad g_1 = \dots = g_{2N} = 0, \quad G = 0, \quad \zeta \in (-\infty, \infty). \tag{14}$$

В определенных условиях такой выбор матриц $f_1, \dots, f_{2N}$ приводит к тому, что у некоторых элементов матрицы g_0 в области их аналитичности появляются полюса в точках $\eta = \eta_n$, $n = 1, \dots, 2N$. Именно это обстоятельство приводит к тому, что эволюционные уравнения для данных рассеяния становятся нелинейными. Однако роль этих полюсов матрицы g_0 этим не исчерпывается. Действительно, рассмотрим оператор H вида

$$H = A + \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n \partial^{-1} \cdot \tilde{\Psi}_n + \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \Phi(x, \zeta) \partial^{-1} \cdot \tilde{\Psi}(x, \zeta), \tag{15}$$

где ∂^{-1} - оператор, обратный к оператору $\partial = \partial / \partial x$, т.е. оператор, удовлетворяющий соотношению

$$\partial^{-1} \cdot \partial = \partial \cdot \partial^{-1} = I. \tag{16}$$

Здесь I - единичный оператор. С помощью несложных вычислений на основе (1) и (16) убеждаемся в справедливости равенств

$$H \cdot L = A \cdot L + \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n \tilde{\Psi}_n \Lambda + \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \Phi(x, \zeta) \tilde{\Psi}(x, \zeta) \Lambda +$$

$$+ \sum_{n=1}^{2N} \Phi_n \partial^{-1} \cdot \tilde{W}_n + \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \Phi(x, \zeta) \partial^{-1} \cdot \tilde{W}(x, \zeta) + \Delta,$$

$$L \cdot H = L \cdot A + \sum_{n=1}^{2N} \Lambda \Phi_n \tilde{\Psi}_n + \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \Lambda \Phi(x, \zeta) \tilde{\Psi}(x, \zeta) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{2N} V_n \partial^{-1} \cdot \tilde{\Psi}_n + \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta V(x, \zeta) \partial^{-1} \cdot \tilde{\Psi}(x, \zeta) + \Delta,$$

где

$$V_n = (L - i\eta_n) \Phi_n, \quad W_n = (\tilde{L} - i\eta_n) \Psi_n, \quad n = 1, \dots, 2N,$$

$$V = (L - i\zeta) \Phi, \quad W = (\tilde{L} - i\zeta) \Psi, \quad \zeta \in (-\infty, \infty), \tag{17}$$

$$\Delta = i \sum_{n=1}^{2N} \eta_n \Phi_n \partial^{-1} \cdot \tilde{\Psi}_n + i \int_{-\infty}^{\infty} \zeta d\zeta \Phi(x, \zeta) \partial^{-1} \cdot \tilde{\Psi}(x, \zeta).$$

Из этих равенств следует соотношение

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [H, L] = \frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] - \sum_{n=1}^{2N} [\Lambda, \Phi_n \tilde{\Psi}_n] -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} [\Lambda, \Phi(x, \zeta) \tilde{\Psi}(x, \zeta)] d\zeta + \sum_{n=1}^{2N} (\Phi_n \partial^{-1} \cdot \tilde{W}_n - V_n \partial^{-1} \cdot \tilde{\Psi}_n) + \tag{18}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta [\Phi(x, \zeta) \partial^{-1} \cdot \tilde{W}(x, \zeta) - V(x, \zeta) \partial^{-1} \cdot \tilde{\Psi}(x, \zeta)].$$

Таким образом, согласно (17) и (18) получаем, что в силу уравнений (7)-(9) выполняется равенство

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [H, L] = 0. \tag{19}$$

Однако из равенства (19) уравнения (7)-(9) не вытекают, поскольку в силу (17) и (18) равенство (19) будет по-прежнему удовлетворено, если в системе (7)-(9) уравнения (8) и (9) заменить соответственно на следующие:

$$(L - i\eta_n)\Phi_n = \Phi_n M_n, \quad (\tilde{L} - i\eta_n)\Psi_n = \Psi_n \tilde{M}_n, \quad n = 1, \dots, 2N,$$

$$(L - i\zeta)\Phi = \Phi M, \quad (\tilde{L} - i\zeta)\Psi = \Psi\tilde{M}, \quad \zeta \in (-\infty, \infty), \tag{20}$$

где $M_1, \dots, M_{2N}$ и M – произвольные квадратные матрицы порядка $r_0 + 1$ с не зависящими от x элементами. При этом правая часть уравнения (7) также изменится. Чтобы убедиться в этом, положим

$$\Phi_n = P_n X_n, \quad \Psi_n = Q_n Y_n, \quad n = 1, \dots, 2N,$$

$$\Phi = PX, \quad \Psi = QY, \quad \zeta \in (-\infty, \infty),$$

где матрицы $P_1, \dots, P_{2N}$ и $Q_1, \dots, Q_{2N}$ удовлетворяют соответственно уравнениям (8), а матрицы P и Q удовлетворяют уравнениям (9). Отсюда следует, что при $n = 1, \dots, 2N$ имеем равенства

$$\Lambda P_n \frac{\partial X_n}{\partial x} = P_n X_n M_n, \quad \Lambda Q_n \frac{\partial Y_n}{\partial x} + Q_n Y_n M_n = 0,$$

а при $\zeta \in (-\infty, \infty)$ справедливы равенства

$$\Lambda P \frac{\partial X}{\partial x} = PXM, \quad \Lambda Q \frac{\partial X}{\partial x} + QY\tilde{M} = 0.$$

На основе этих равенств получаем, что при $n = 1, \dots, 2N$ выполняются соотношения

$$P_n [\frac{\partial}{\partial x}(X_n \tilde{Y}_n)] \tilde{Q}_n = [\Lambda, P_n X_n M_n \tilde{Y}_n \tilde{Q}_n],$$

а при $\zeta \in (-\infty, \infty)$ имеем соотношение

$$P [\frac{\partial}{\partial x}(X\tilde{Y})] \tilde{Q} = [\Lambda, PXM\tilde{Y}\tilde{Q}].$$

Из этих соотношений следует, что элементы матриц $X_1\tilde{Y}_1, \dots, X_{2N}\tilde{Y}_{2N}$ и $X\tilde{Y}$, вообще говоря, зависят от x, т.е. переход от уравнений (8),(9) к уравнениям (20) эквивалентен тому, что в правой части уравнения (7) матрицы $\Phi_1\tilde{\Psi}_1, \dots, \Phi_{2N}\tilde{\Psi}_{2N}$ и $\Phi\tilde{\Psi}$ заменяются соответственно на матрицы $\Phi_1 R_1 \tilde{\Psi}_1, \dots, \Phi_{2N} R_{2N} \Psi_{2N}$ и $\Phi R \tilde{\Psi}$, где матрицы $\Phi_1, \dots, \Phi_{2N}, \Psi_1, \dots, \Psi_{2N}$, Φ и Ψ по-прежнему удовлетворяют уравнениям (8),(9), а матрицы $R_1, \dots, R_{2N}$ и R являются некоторыми функциями x. Кроме того, чтобы удовлетворить в этом случае соотношениям (11) и (12), необходимо потребовать, чтобы при $n = 1, \dots, N$ выполнялось условие $M_n C_n + C_n M^*_{N+n} = 0$, а при любом вещественном ζ имело место равенство $MC + CM^* = 0$. Неясно, можно ли систему уравнений (7),(20) проинтегрировать с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора L вида (1),(2).

В стандартной схеме применения метода обратной задачи рассеяния для интегрирования нелинейных эволюционных уравнений операторные соотношения вида (19) играют важную роль, как при получении самих уравнений, так и при изучении свойств решений этих уравнений. Выше мы уже видели, что в нашей ситуации соотношение (19) не в состоянии определить однозначно систему (7)-(9). Не годится соотношение (19) и для доказательства независимости от времени точек дискретного спектра оператора L вида (1),(2) в случае, когда потенциал $u = u(x, t)$ удовлетворяет системе (7)-(9), поскольку в нашей ситуации при известных условиях точки дискретного спектра оператора L зависят от времени. Выясним причину этого явления в случае, когда потенциал $u = u(x, t)$ стремится достаточно быстро к нулю при $x \to \pm\infty$, а точки $\eta = \eta_n$, $n = 1, \dots, 2N$, являются точками дискретного спектра оператора L. Пусть $\eta = \eta_0$ – произвольная точка дискретного спектра оператора L, а ϕ_0 – собственная функция, отвечающая этому собственному значению, т.е.

$$(L - i\eta_0)\phi_0 = 0. \tag{21}$$

На основе соотношения (19) отсюда следует равенство

$$(L - i\eta_0)(\frac{\partial\phi_0}{\partial t} + H\phi_0) = i\frac{d\eta_0}{dt}\phi_0. \tag{22}$$

Согласно (15) величина $\psi_0 = \frac{\partial\phi_0}{\partial t} + H\phi_0$ может быть получена с помощью аналитического продолжения по параметру η соответствующих элементов матрицы g_0 вида (5) и в силу (13) и (14) в этом случае удовлетворяет уравнению (21). Однако в том случае, когда интересующие нас элементы матрицы g_0 в точке $\eta = \eta_0$ имеют полюс, величина ψ_0 вместо уравнения (21) удовлетворяет уравнению вида

$$(L - i\eta_0)\psi_0 = c_0\phi_0,$$

где скалярная величина c_0 не зависит от x. С учетом (22) это значит, что справедливо равенство $i\frac{d\eta_0}{dt} = c_0$, т.е. η_0 действительно может зависеть от времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mel'nikov V.K. - In: Selected Topics in Statistical Mechanics. World Scientific, Singapore, 1990, p.181-191.
2. Mel'nikov V.K. - In: Nonlinear World. World Scientific, Singapore, 1990, v.1, p.229.
3. Mel'nikov V.K. - In: Nonlinear Evolution Equations: Integrability and Spectral Methods. Manchester University Press, Manchester, 1990, p.265.
4. Mel'nikov V.K. - Commun.Math.Phys., 1989, v.120, No.3, p.451.
5. Mel'nikov V.K. - Inverse Problems, 1990, v.6, No.5, p.809.
6. Mel'nikov V.K. - Commun. Math. Phys., 1991, v.137, No.2, p.359.
7. Манаков С.В. - ЖЭТФ, 1973, т.65, вып. 2(8), с.505.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 сентября 1991 года.