объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р2-91-381

Н.А.Черников

ВВЕДЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В ТЕОРИЮ ГРАВИТАЦИИ НЬЮТОНА

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1991

1 декабря 1992 года исполнится 200 лет со дня рождения Николая Ивановича Лобачевского. Этой дате посвящает автор предлагаемую статью.

Н.И.Лобачевский в результате решения многовековой проблемы открыл необыкновенную геометрию. Об этом он сделал доклад в 1826 году в Казанском университете и написал сочинение /1/, опубликованное в 1829 – 30 гг. в "Казанском Вестнике, издаваемом при Императорском Казанском Университете". В этом сочинении впервые в математической литературе изложена геометрическая система, основанная на всех евклидовых постулатах, за исключением пятого, называемого постулатом Евклида о параллельных прямых линиях.

Различие между двумя геометрическими системами – Лобачевского и Евклида – целесообразно поначалу рассмотреть на примере сферы какого-нибудь радиуса ρ. Согласно третьему постулату Евклида "из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг" /2, с. 14/. Это значит, что не только в геометрии Евклида, но и в геометрии Лобачевского радиус ρ может принимать всякие значения от нуля до бесконечности. Лобачевский доказал, что внутренняя геометрия сферы не зависит от пятого постулата Евклида. Поэтому как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского мы можем начертить на сфере "параллели и меридианы" и ввести полярные координаты θ и φ. Для этого обозначим $2\pi r$ длину "экватора". Расстояние, пройденное по меридиану от "северного полюса" до точки (θ, φ), лежащей на сфере, положим равным θr, а расстояние, пройденное по параллели $\theta = const$ от нулевого меридиана до этой же точки, положим равным $\varphi r \sin\theta$. Обыкновенным путем получается метрическая форма $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$ сферы и элемент площади $r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ на сфере. Площадь же всей сферы равна $4\pi r^2$. Различие между двумя системами проявляется в зависимости r от ρ: в геометрии Евклида $r = \rho$, а в геометрии Лобачевского

$$r = k \operatorname{sh}\frac{\rho}{k}, \qquad (1)$$

где k – характерная длина. Она называется постоянной, или константой Лобачевского. При $k \to \infty$ геометрия Лобачевского переходит в геометрию Евклида. Если же $k < \infty$, то в шаре радиуса ρ можно пользоваться геометрией Евклида приближенно при малых значениях ρ/k.

В обеих геометрических системах радиус перпендикулярен к сфере. Поэтому метрическая форма пространства равна

$$ds^2 = d\rho^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (2)$$

Элемент объема равен

$$dV = r^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi. \qquad (3)$$

В экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ метрическая форма равна

$$ds^2 = d\rho^2 + r^2 d\varphi^2, \qquad (4)$$

а элемент площади равен

$$d\Sigma = r\, d\rho\, d\varphi. \qquad (5)$$

Константа k входит во все формулы геометрии Лобачевского в той ее части, в которой она отличается от геометрии Евклида. Например, сумма углов A, B, C всякого треугольника в планиметрии Евклида равна π, а в планиметрии Лобачевского меньше π. Лобачевский доказал, что площадь треугольника равна

$$F = k^2(\pi - A - B - C). \qquad (6)$$

Другой пример. Если из начала прямолинейного луча на некоторую параллельную ему прямую опустить перпендикуляр, то угол Π, образованный лучом и перпендикуляром, в планиметрии Евклида равен $\pi/2$. В планиметрии же Лобачевского он меньше $\pi/2$ и зависит от высоты p, с которой опущен перпендикуляр. Лобачевский назвал $\Pi = \Pi(p/k)$ углом параллельности и доказал, что

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}. \qquad (7)$$

Третий пример. Лобачевский вывел следующие четыре формулы (в которых a, b, c – стороны треугольника, противоположные его углам A, B, C):

А) $\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos C$

Б) $\operatorname{sh}\frac{b}{k}\sin A = \operatorname{sh}\frac{a}{k}\sin B$

В) $\operatorname{ctg} A \sin C + \operatorname{ch}\frac{b}{k}\cos C = \operatorname{cth}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}$

Г) $\cos C + \cos A \cos B = \sin A \sin B \operatorname{ch}\frac{c}{k}$

для произвольного треугольника и шесть формул

а) $\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}$ г) $\operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{th}\frac{c}{k}\cos A$

б) $\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin A$ д) $\cos A = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\sin B$

в) $\operatorname{th}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{tg} A$ е) $\operatorname{ch}\frac{c}{k}\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1$

для прямоугольного треугольника (в котором $C = \pi/2$). На основе этих формул можно решить любую тригонометрическую задачу.

Регламент ограничивает обзор, но нельзя не сказать о поверхностях, ортогональных к связке параллельных прямых. Лобачевский назвал их предельными сферами (орисферами) и доказал, что внутренняя геометрия орисферы совпадает с планиметрией Евклида. Здесь стоит поставить восклицательный знак: отбросив пятый постулат Евклида для плоскости, Лобачевский доказал его для орисферы!

Нельзя не сказать и о том, что "новая Геометрия, основание которой уже здесь положено, ... открывает новое, обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики" /I, с. 209/. Сам Лобачевский достиг на этом поле выдающихся результатов:

"Для широкого круга математиков, физиков и инженеров обычно остается неизвестным, что во многих употребляемых ими справочниках и таблицах определенных интегралов содержатся формулы, полученные Лобачевским методами его "воображаемой геометрии" /3, с. 4I3/.

На этом же поле, добавим, А.Пуанкаре создал в I882 году теорию автоморфных функций. Большие услуги в этих изысканиях ему оказала идея применить конформное отображение плоскости Лобачевского на евклидову полуплоскость /4, с. 306/.

Нельзя, наконец, не сказать, что Лобачевский поставил две совершенно новые проблемы: об астрономической проверке геометрии видимого нами мира и о том, "какого рода перемена произойдет от введения воображаемой Геометрии в Механику" /I, с. 26I/.

Обе эти проблемы актуальны и теперь. В сочинении /5/, опубликованном в I835 - 38 гг. в "Ученых Записках Императорского Казанского Университета", Лобачевский писал:

"... в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии. Чтобы пояснить эту мысль, полагаем, как и многие в этом уверены, что силы притягательные слабеют от распространения своего действия по сфере. В употребительной Геометрии величину сферы принимают $4\pi r^2$ для полупоперечника r, от чего сила должна уменьшаться в содержании к квадрату расстояния. В воображаемой Геометрии нашел я поверхность шара

$$\pi\,(e^{r} - e^{-r})^2 ,$$

и такой Геометрии, может быть, следуют молекулярные силы, которых затем все разнообразие будет зависеть от числа e, всегда весьма большого. Впрочем, пусть это чистое предположение только, для подтверждения которого надобно поискать других убедительных доводов: но в том однако ж нельзя сомневаться, что силы всё производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы" /5, с. I59/.

С указанной в этом отрывке формулой можно согласовать написанное выше о площади сферы радиуса ρ, если отказаться от обозначения (I) и положить $k=1$, $r=\rho$,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} .$$

Для дальнейшего изложения, однако, удобнее сохранить обозначение (I).

Мы придем к теории гравитации Ньютона в пространстве Лобачевского, если усмотрим в цитированном отрывке фундаментальное решение уравнения Пуассона

$$\triangle \Phi = 4\pi\alpha\, \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) \tag{8}$$

в пространстве с метрикой (2). В это уравнение входят следующие объекты: гравитационный потенциал Φ пробного тела, притягиваемого точечной массой m; константа $\alpha=\gamma m$, где γ - постоянная Ньютона; оператор Лапласа в пространстве Лобачевского, равный

$$\triangle = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\rho} r^2 \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right);$$

δ - функция Дирака с аргументами, равными

$$x = r\sin\theta\cos\varphi , \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \tag{9}$$

В соответствии с замечанием Лобачевского полагаем, что "притягательная сила" (ковектор силы) имеет следующие компоненты:

$$F_1 = -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = -\frac{\alpha}{r^2} , \quad F_2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0 , \quad F_3 = -\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0 .$$

Следовательно,

$$\Phi = -\frac{\alpha}{k\,\mathrm{th}\frac{\rho}{k}} . \tag{10}$$

Рассмотрим движение пробного тела. Обозначая время буквой t, из выражений (2) и (I0) составим для пробного тела функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot\rho^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right) - \Phi \tag{11}$$

и уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} &= 0 , \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= 0 , \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= 0 . \end{aligned} \tag{12}$$

Имеем

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho} = \dot\rho \;, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = r^2\dot\theta \;, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi \,,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = r r'(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2) - \Phi' \;,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2 \;, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \,,$$

где

$$\Phi' = \frac{\alpha}{r^2} \;, \qquad r' = ch\,\frac{\rho}{k} \;. \tag{I3}$$

Подставляя это в (I2), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\dot\rho - r r'(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2) + \frac{\alpha}{r^2} = 0 \,, \\ &\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) - r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2 = 0 \,, \\ &\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi) = 0 \;, \end{aligned} \tag{I4}$$

где точкой обозначены производные по времени.

Так как функция Лагранжа (II) не зависит от времени, то сохраняется энергия

$$E = \frac{1}{2}(\dot\rho^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2) + \Phi \,, \tag{I5}$$

а в силу сферической симметрии этой функции сохраняется еще и момент количества движения с компонентами

$$\begin{aligned} M_1 &= y\dot z - z\dot y = -r^2(\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\,\dot\varphi + \sin\varphi\,\dot\theta) \\ M_2 &= z\dot x - x\dot z = -r^2(\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\,\dot\varphi - \cos\varphi\,\dot\theta) \\ M_3 &= x\dot y - y\dot x = r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi \;. \end{aligned} \tag{I6}$$

Впрочем, в этом нетрудно убедиться непосредственно, дифференцируя по времени функции (I5) и (I6).

Сохранение момента количества движения в данном случае означает, что пробная частица движется в плоскости Лобачевского, проходящей через центр притяжения. Без ограничения общности можно считать, что это экваториальная плоскость $\theta = \pi/2$. При таком выборе $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = M$, где

$$M = r^2\dot\varphi \,, \tag{I7}$$

а интеграл энергии принимает вид

$$E = \frac{1}{2}(\dot\rho^2 + r^2\dot\varphi^2) + \Phi \;. \tag{I8}$$

Подставляя (I7) в (I8), получаем дифференциальное уравнение для траектории $\rho = \rho(\varphi)$:

$$E = \frac{M^2}{2r^4}\Big[\Big(\frac{d\rho}{d\varphi}\Big)^2 + r^2\Big] + \Phi \;. \tag{I9}$$

Теперь, учитывая вид функции (I0), обозначим

$$k\,th\,\frac{\rho}{k} = \frac{1}{u} \;. \tag{20}$$

Так как

$$du = -\frac{1}{r^2}\,d\rho \;, \qquad u^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{k^2} \;, \tag{2I}$$

то уравнение (I9) преобразуется к виду

$$E = \frac{M^2}{2}\Big[\Big(\frac{du}{d\varphi}\Big)^2 + u^2 - \frac{1}{k^2}\Big] - \alpha u \;. \tag{22}$$

Решение этого уравнения есть

$$u = \frac{\alpha}{M^2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{M^4} + \frac{2E}{M^2} + \frac{1}{k^2}}\;\cos\varphi \;. \tag{23}$$

Здесь постоянная интегрирования выбрана так, чтобы наибольшему значению u соответствовало значение $\varphi = 0$. Обозначая

$$p = \frac{M^2}{\alpha} \,, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{\alpha^2} + \frac{M^4}{\alpha^2 k^2}} \,, \tag{24}$$

записываем уравнение траектории пробного тела в следующем виде:

$$k\,th\,\frac{\rho}{k} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \;. \tag{25}$$

В соответствии с нашим выбором константы интегрирования уравнения (22) самая близкая к притягивающему центру точка орбиты (25) лежит под углом $\varphi = 0$ на расстоянии, которое обозначим ρ_1, так что

$$k\, th\, \frac{\rho_1}{k} = \frac{P}{1+\varepsilon} . \tag{26}$$

Самая далекая точка орбиты существует не всегда, а только в случае финитного движения. В этом случае должно выполняться условие

$$k > \frac{P}{1-\varepsilon}, \quad \text{т. е.} \quad \varepsilon < 1 - \frac{P}{k} , \tag{27}$$

эквивалентное условию

$$E < -\frac{\alpha}{k} . \tag{28}$$

На этом случае мы и остановимся. Это даст нам решение задачи Кеплера о движении планеты вокруг Солнца в пространстве Лобачевского.

В случае финитного движения самая далекая от притягивающего центра точка орбиты лежит под углом $\varphi = \pi$ на расстоянии, которое обозначим ρ_2, так что

$$k\, th\, \frac{\rho_2}{k} = \frac{P}{1-\varepsilon} . \tag{29}$$

Наибольший размер орбиты обозначим $2a$. Он равен $\rho_1 + \rho_2$. Из (26) и (29) находим

$$k\, th\, \frac{2a}{k} = \frac{2P}{1-\varepsilon^2+P^2/k^2} = -\frac{\alpha}{E} . \tag{30}$$

Найдем теперь период T полного оборота планеты по орбите. Согласно (I7)

$$MT = \int_0^{2\pi} r^2(\varphi)\, d\varphi . \tag{31}$$

Подынтегральную функцию находим из (I) и (25):

$$r^2(\varphi) = \frac{P^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2 - P^2/K^2} = \tag{32}$$

$$= \frac{Pk}{2}\left(\frac{1}{1+\varepsilon\cos\varphi - P/K} - \frac{1}{1+\varepsilon\cos\varphi + P/K}\right).$$

Следующий интеграл берется подстановкой

$$t = tg\,(\varphi/2): \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{m+n\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{m^2-n^2}} , \quad [m>|n|] .$$

Следовательно,

$$MT = \pi P k\left(\frac{1}{\sqrt{(1-P/K)^2-\varepsilon^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1+P/K)^2-\varepsilon^2}}\right). \tag{33}$$

Подставляя сюда (24), находим

$$T = \frac{\pi k}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{-E-\alpha/K}} - \frac{1}{\sqrt{-E+\alpha/K}}\right) , \tag{34}$$

так что период T зависит от энергии E, но не зависит от момента количества движения M.

Подстановка (30) в формулу (34) дает следующее выражение для квадрата периода:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\alpha}\left(k\, sh\,\frac{a}{k}\right)^3 ch\,\frac{a}{k} . \tag{35}$$

Решенная задача актуальна с точки зрения релятивистской теории гравитации /6,7/. Она должна получаться в РТГ, если в качестве фоновой метрики выбрать метрику /8/:

$$\left(ch\,\frac{\rho}{k}\right)^2 c^2 dt^2 - d\rho^2 - \left(k\, sh\,\frac{\rho}{k}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

или, быть может, метрику

$$c^2 dt^2 - d\rho^2 - \left(k\, sh\,\frac{\rho}{k}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

а затем рассмотреть нерелятивистский предел, когда входящая в последние две формулы скорость света c стремится к бесконечности.

Кстати, скорость света играет роль константы Лобачевского, но не в видимом нами мире, а в мире скоростей /9/. В незримом мире скоростей роль расстояния ρ играет быстрота частицы s, а роль величины, входящей в левую часть уравнения (25), играет ее скорость v, так что

$$\frac{v}{c} = th\,\frac{s}{c} .$$

В космических лучах наблюдаются, а на современных ускорителях достигаются (например, в Дубне, еще больше – в Протвино) быстроты, намного превышающие скорость света. Поэтому в физике высоких энергий обойтись без геометрии Лобачевского невозможно.

Не столь благополучно обстоит дело с введением геометрии Лобачевского в видимый нами мир. Сам Лобачевский на основе данных о параллаксах звезд установил, что константа k больше расстояний от Земли до этих звезд. Но он разъяснил также, что этот результат лишь

"... оправдывает точность всех вычислений обыкновенной Геометрии и дозволяет принятые начала этой последней рассматривать как бы строго доказанными.

Между тем нельзя не увлекаться мнением Г. Лапласа, что видимые нами звезды и млечный путь принадлежат к одному только собранию небесных светил, подобному тем, которые усматриваем как слабо мерцающие пятна в созвездиях Ориона, Андромеды, Козерога и проч. Итак, не говоря о том, что в воображении пространство может быть продолжаемо неограниченно, сама Природа указывает нам такие расстояния, в сравнении с которыми исчезают за малостию даже и расстояния нашей земли до неподвижных звезд.

После этого нельзя утверждать более, что предположение, будто мера линий не зависит от углов - предположение, которое многие Геометры хотели принимать за строгую истину, не требующую доказательства, - может быть оказалось бы приметно ложным еще прежде, нежели перейдем за пределы видимого нами мира" /I, с. 209/.

Теперь астрономам доступны для наблюдений гораздо большие расстояния, а будут, несомненно, доступны и еще большие, так что стоит надеяться на успех.

ЛИТЕРАТУРА

I. Лобачевский Н.И. О началах геометрии (I829 - 30). Полн. собр. соч. Т.I. М.-Л.: Гостехиздат, I946. С. I85-26I.
2. Начала Евклида. Книги I - УI. М.-Л.: Гостехиздат, I948.
3. Лаптев Б.Л. Интегралы Лобачевского в таблицах Биеренс де Хаана. В кн.: Лобачевский Н.И. Полн. собр. соч. Т.3. С. 4I3-425. М.-Л.: Гостехиздат, I948.
4. Пуанкаре А. Теория фуксовых групп. В кн.: Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Гостехиздат, I956. С. 303-306.
5. Лобачевский Н.И. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных (I835 - 38). Полн. собр. соч. Т.2. М.-Л.: Гостехиздат, I949. С. I47-454.
6. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. ТМФ. I99I. Т.86. №I. С. 3-I5.
7. Логунов А.А., Мествиришвили М.А., Чугреев Ю.В. ТМФ. I99I. Т.86. №2. С. I63-I76.
8. Черников Н.А. Сообщение ОИЯИ Р2 - 90 - 399, Дубна, I990.
9. Черников Н.А. ЭЧАЯ. I973. Т.4. Вып.3. С. 773-8I0.

Рукопись поступила в издательский отдел
I5 августа I99I года.

Черников Н.А. Р2-91-381
Введение геометрии Лобачевского в теорию гравитации Ньютона

Решена поставленная Лобачевским задача о движении планеты в условиях открытой им геометрии. На основе указанных им выражений для метрики пространства и для силы всемирного тяготения найден гравитационный потенциал планеты и составлен лагранжиан. Показано, что гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона в пространстве Лобачевского. В результате решения лагранжевых уравнений движения найдены траектория планеты и период ее обращения вокруг притягивающего центра. Решенная задача должна получаться в релятивистской теории гравитации в пределе, когда скорость света стремится к бесконечности. Статья посвящается 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1991

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Chernikov N.A. P2-91-381
Introduction of the Lobachevsky Geometry into the Newton Theory of Gravity

The problem of motion of a planet formulated by Lobachevsky is solved in the framework of the geometry he has discovered. The gravitational potential and Lagrangian of a planet are determined on the basis of expressions he has found for the metric of space and gravity force. It is shown that the gravitational potential obeys the Poisson equation in the Lobachevsky space. The trajectory of a planet and the cycle of its rotation around an attractive center are found by solving the Lagrange equations of motion. The problem should follow in the relativistic theory of gravity in the limit of infinite velocity of light. The paper is devoted to the 200-th anniversary of the Lobachevsky birthday.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1991