сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-91-315

И. Лукач*

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ НА ГРУППЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ИНТЕРВАЛА ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

*Физический институт Словацкой академии наук,
Братислава

1991

ВВЕДЕНИЕ

Трехмерные евклидовские и псевдоевклидовские пространства с постоянной метрикой, а также связанные с ними шестипараметрические группы движений, оставляющие инвариантным квадрат расстояния между двумя точками этих пространств, играют в физике чрезвычайно важную роль. Целый ряд фундаментальных физических задач связан с этими пространствами и соответствующими группами движений. Прежде всего вся нерелятивистская физика материальной точки строится в трехмерном евклидовском пространстве, допускающем шесть степеней свободы (три трансляции и три вращения). При описании физических систем, как правило, мы используем с самого начала ортогональные системы координат, и поэтому постоянная метрика данного пространства имеет диагональный вид. Диагонализация, как это хорошо известно, всегда означает переход в некоторую специальную систему координат. Если мы в исследованиях групповых пространств некоторых непрерывных групп преобразований хотим последовательно использовать известный тензорный аппарат, то сначала мы должны хорошо продумать, на каком этапе вычислений следует обращаться к диагонализации, так как при диагонализации теряется тензорная запись многих (если не всех) величин.

Далее мы будем пользоваться строго тензорной записью всех формул, причем величины с индексом "ноль" будут представлять или инварианты, или константы. В статье мы будем пользоваться обычными контравариантными и ковариантными индексами, и по одинаковым верхним (контравариантным) и нижним (ковариантным) индексам будет выполняться суммирование от единицы до трех.

ГРУППА ИНВАРИАНТНОСТИ ИНТЕРВАЛА

Пусть точка в некотором трехмерном действительном пространстве R^3 определяется контравариантным вектором x^i ($i = 1, 2, 3$). Пусть далее в R^3 существует постоянный дважды ковариантный тензор g_{ik}, определяющий метрику этого пространства. Тогда квадрат расстояния $\rho_0^2(x,y)$ между двумя точками с координатами x^i и y^k определяется формулой

$$\rho_0^2(x,y) = g_{ik}(x^i-y^i)(x^k-y^k). \qquad (1)$$

При этом предполагается, что метрика g_{ik} не является сингулярной, т. е., что имеет место $g_0 = \det|g_{ik}| \neq 0$. Очевидно, что расстояние между двумя точками представляет собой инвариант. Конечно, постоянный метрический тензор g_{ik} при помощи подходящего центроаффинного преобразования может быть всегда диагонализирован. Следует, однако, иметь в виду, что знак определителя метрики при любых центроаффинных преобразованиях остается неизменным, т. е. он является инвариантом. Действительно, рассмотрим в R^3 некоторое неособенное центроаффинное преобразование с аффинором A^i_k:

$$x'^i = A^i_k x^k;\quad x^k = \bar{A}^k_\ell x'^\ell,\quad A^i_k \bar{A}^k_\ell = \delta^i_\ell,\quad A_0 = \det|A^i_k| \neq 0, \qquad (2)$$

где через $\bar{A}^k_\ell$ обозначен аффинор, обратный к аффинору A^i_k. При преобразованиях (2) метрика g_{ik} как дважды ковариантный тензор преобразуется согласно формулам

$$g'_{ik} = \bar{A}^p_i \bar{A}^q_k g_{pq},\quad g_{pq} = A^i_p A^k_q g'_{ik},\quad g_0 = A_0^2 g'_0, \qquad (3)$$

и, следовательно, величина ε_0, равная знаку определителя g_0, сохраняется, так как имеет место

$$\varepsilon_0 = g_0(|g_0|)^{-1} = A_0^2 g'_0(|A_0^2 g'_0|)^{-1} = g'_0(|g'_0|)^{-1} = \varepsilon'_0. \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь преобразования пространства R^3, которые сохраняют квадрат расстояния между двумя точками (1). Как известно, такими преобразованиями являются аффинные преобразования вида

$$x'^i = t^i_k(u)x^k + \xi^i, \qquad (5)$$

где матрицы $t^i_k(u)$ удовлетворяют соотношению, вытекающему непосредственно из формулы (1):

$$g_{ik}t^i_p(u)t^k_q(u) = g_{pq},\quad t_0(u) = \det|t^i_k(u)| = \pm 1. \qquad (6)$$

При этом обратное преобразование имеет вид

$$x^k = \bar{t}^k_\ell(u)(x'^\ell - \xi^\ell),$$

где через $\bar{t}^k_\ell(u)$ обозначена обратная матрица к матрице $t^i_k(u)$, удовлетворяющая соотношению ортогональности $t^i_k(u)\bar{t}^k_\ell(u) = \delta^i_\ell$. Формула (6) на девять элементов матричного многообразия $t^i_k(u)$ налагает 6 связей и, следовательно, многообразие (u) определяется тремя независимыми величинами (параметрами группы) *. Таким образом, аффинная группа в R^3 определяется шестью параметрами, которые символически будем обозначать через (u, ξ). Пусть у нас имеется два последовательных аффинных преобразования с параметрами (u, ξ) и (u', ξ'), которые можно заменить одним аффинным преобразованием с параметрами (u'', ξ''). Как нетрудно убедиться, в результате несложных вычислений получим следующую систему законов композиции параметров данной группы:

$$t^i_\ell(u'') = t^i_k(u')\,t^k_\ell(u), \qquad (7)$$

$$\xi''^i = t^i_k(u')\xi^k + \xi'^i.$$

Шестипараметрическую аффинную группу с законом композиции параметров в виде (7) будем называть группой инвариантности интервала пространства R^3 и обозначать через P_3 [6].

---

* Конкретная параметризация матрицы $t^i_k(u)$ будет приведена ниже.

Из формул (7) видно, что центроаффинные преобразования ($\xi^i \equiv 0$), оставляющие инвариантной трехмерную произвольную (несингулярную) однородную квадратичную форму в трехмерном пространстве

$$q_0(z) = g_{ik} z^i z^k, \quad g_0 = det\,|g_{ik}| \neq 0, \qquad (8)$$

образуют подгруппу группы инвариантности интервала в R^3 с законом композиции параметров, записанным в матричной форме

$$t^i_l(u'') = t^i_k(u')\,t^k_l(u).$$

Конечно, квадрику (8) можно всегда при помощи соответствующего неособенного центроаффинного преобразования диагонализировать. В физике именно так и делается, и поэтому рассматривают, как правило, группы преобразований уже диагонализированных метрик, такие как, например, хорошо известная трехпараметрическая группа вращений трехмерного евклидовского пространства $SO(3)$. В R^3 после диагонализации можно рассматривать в общем разные группы $SO(p,q)$, где p,q обозначают соответственно число плюсов и минусов в сигнатуре квадрики (8). Таким образом, в трехмерном действительном пространстве можно рассматривать следующие типы диагональных квадратичных форм и соответствующих трехпараметрических групп преобразований:

$q_0(z) = (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2$ – группа преобразований сферы $SO(3)$ (группа трехмерных вращений)

$q_0(z) = (z^1)^2 + (z^2)^2 - (z^3)^2$ – группа преобразований однополюсного гиперболоида $SO(2,1)$ **(9)**

$q_0(z) = (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2$ – группа преобразований двухполюсного гиперболоида $SO(1,2)$

$q_0(z) = -(z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2$ – группа преобразований мнимой сферы $SO(0,3)$

Классификация трехмерных квадрик (9) по сигнатурам на самом деле означает классификацию по некоторой системе инвариантов, образованных из коэффициентов квадрики (8). В общем при рассмотрении преобразований квадратичной формы (8) нет необходимости сначала провести ее диагонализацию. Без потери общности можно рассматривать преобразования общей квадрики (8) в себя и соответствующую классификацию по системе инвариантов провести в окончательных формулах. Такой подход имеет по крайней мере два преимущества: во-первых, он позволяет одновременно рассмотреть групповые пространства группы преобразований общей трехмерной квадрики, и, во-вторых, он позволяет использовать тензорный аппарат при изучении групповых пространств.

Трехпараметрическую матричную группу с элементами $t^i_k(u)$ и определителем $t_0(u) = 1$ будем называть группой инвариантности трехмерной произвольной однородной квадрики и обозначать через $SQ_3[3]$.

Очевидно важную роль в структуре группы $P_3[6]$ играет именно ее подгруппа $SQ_3[3]$: $P_3[6] \supset SQ_3[3]$. Первый из законов композиции групповых параметров в (7) записан в неявной форме в виде матричного соотношения. Для получения конкретных результатов, однако, необходимо решить это матричное соотношение относительно набора параметров (u) и к явному виду закона композиции параметров потом применить теорию непрерывных групп преобразований /1,2/. Рассмотрим теперь более подробно группу $SQ_3[3]$ Приведем здесь основные результаты по геометрии группового пространства этой группы, причем будем исходить из результатов краткого сообщения /3/.

ГРУППА ИНВАРИАНТНОСТИ ТРЕХМЕРНОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОДНОРОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Итак, рассмотрим кратко группу $SQ_3[3]$, оставляющую инвариантной квадрику (8) в $\mathcal{R}^3$. Прежде всего необходимо найти явный вид матриц $t^i_k(u)$, удовлетворяющих соотношениям (6), с конкретным определением группового многообразия (u). Конечно, существует несколько способов параметризации матрицы $t^i_k(u)$ в $\mathcal{R}^3$. Заметим, что введение конкретной параметризации матрицы $t^i_k(u)$ означает всегда введение конкретной системы координат в групповом пространстве группы $SQ_3[3]$.

Удобной параметризацией матрицы $t^i_k(u)$ в данном случае является так называемая параметризация Кэли /4,5/, которую в символическом виде можно записать следующим образом

$$T(u) = (G \mp u)(G \pm u)^{-1}, \quad T(u)\,T(-u) = E, \tag{I0}$$

где $T(u)$ соответствует элементам матрицы $t^i_k(u)$, G соответствует элементам матрицы метрики $g_{ik} = g_{ki}$, E соответствует единичной матрице и u соответствует некоторой антисимметрической матрице $u_{ik} = -u_{ki}$ в трехмерном пространстве $\mathcal{R}^3$. Как известно, в трехмерном пространстве любой антисимметрический (дважды ковариантный) тензор (бивектор) можно выразить через псевдовектор. В связи с этим в $\mathcal{R}^3$ всегда можно положить:

$$u_{ik} = e_{ik\ell}\, u^\ell u_0^{-1}, \quad u_0^{-1} u^\ell = \tfrac{1}{2} e^{\ell mn} u_{mn},$$
$$e_{ik\ell} = |g_0|^{1/2} \varepsilon_{ik\ell}, \quad e^{ik\ell} = |g_0|^{-1/2} \varepsilon^{ik\ell}, \tag{II}$$

где через u^ℓ обозначен некоторый контравариантный псевдовектор в $\mathcal{R}^3$, ε_{ijk} и ε^{pqr} являются соответственно полностью антисимметрическими ковариантными и контравариантными тензорами в $\mathcal{R}^3$,

произведения которых выражаются через обобщенные символы Кронекера /6/

$$\varepsilon^{pqr}\varepsilon_{ijk} = \delta^{pqr}_{ijk}, \quad \varepsilon^{pqk}\varepsilon_{ijk} = \delta^{pq}_{ij}, \quad \varepsilon^{pjk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta^p_i, \tag{I2}$$

и u_0 является некоторым инвариантом (т. е. u_0 является определенной функцией единственного инварианта $\rho_0^2(u) = g_{pq}u^p u^q$, который может быть построен в $\mathcal{R}^3$ из псевдовектора u^ℓ и метрического тензора g_{pq}). Записывая формулу (I0) в аккуратной тензорной форме с учетом (II), находим явный вид матрицы $t^i_k(u)$:

$$\begin{gathered} t^i_k(u) = \Delta_0^{-1}(u)\left[(1-\varepsilon_0 u_0^{-2}\rho_0^2(u))\,\delta^i_k + 2\varepsilon_0 u_0^{-2} u_k u^i \mp 2u_0^{-1} g^{ip} e_{kpq} u^q\right], \\ \Delta_0(u) = g_0^{-1} \det|g_{ik} \pm u_{ik}| = 1 + \varepsilon_0 u_0^{-2}\rho_0^2(u), \quad u_k = g_{k\ell}u^\ell, \\ t^i_k(0) = \delta^i_k, \quad \bar{t}^{\,i}_k(u) = t^i_k(-u), \quad t^i_k(u)\,t^k_\ell(-u) = \delta^i_\ell. \end{gathered} \tag{I3}$$

Основные инварианты матрицы (аффинора) $t^i_k(u)$ равны:

$$\begin{aligned} J_1 &= t^i_i(u) = \Delta_0^{-1}(u)\left[4 - \Delta_0(u)\right], \\ J_2 &= t^i_k(u)\,t^k_i(u) = \Delta_0^{-2}(u)\left[16 - 16\Delta_0(u) + 3\Delta_0^2(u)\right], \\ J_3 &= t^i_k(u)\,t^k_\ell(u)\,t^\ell_i(u) = \Delta_0^{-3}(u)\left[64 - 96\Delta_0(u) + 36\Delta_0^2(u) - \Delta_0^3(u)\right]. \end{aligned} \tag{I4}$$

Как нетрудно убедиться, определитель $t_0(u)$ матрицы $t^i_k(u)$ равен единице, так как имеет место:

$$t_0(u) = \det|t^i_k(u)| = \tfrac{1}{6}\left[J_1^3 - 3J_1J_2 + 2J_3\right] \equiv 1.$$

В формуле (I3) для $t^i_k(u)$ матрица $g^{k\ell}$ является обратной матрицей к матрице метрики g_{ik}, которая удовлетворяет условию ортогональности $g_{ik}g^{\ell k} = \delta^\ell_i$. Что касается области изменения параметров u^ℓ, то для $\varepsilon_0 = \mathrm{I}$ имеем $0 \le u_0^{-1}u^\ell < \infty$ и для $\varepsilon_0 = -\mathrm{I}$ область изменения параметров u^ℓ ограничена и определяется сингулярностью в знаменателе матрицы $t^i_k(u)$, т. е. имеет место $0 \le u_0^{-2}\rho_0^2(u) < 1$.

Матричное уравнение (I0) для матрицы $T(u)$ можно формально решить относительно бивектора u, в результате чего получаем формулу

$$u = \pm \left[E + T(u)\right]^{-1} \left[E - T(u)\right] G. \qquad (I5)$$

В случае трехмерного пространства R^3 получаем следующий явный вид псевдовектора u^i как функции аффинора $t_q^r(u)$:

$$u_o^{-1} u^i = \pm \frac{1}{8} \Delta_o(u)\, e^{ipq} g_{pr} \left[t_q^r(u) - t_q^r(-u)\right]. \qquad (I6)$$

Исходя из формулы (I6), можно легко получить явный вид закона композиции параметров для группы $SQ_3[3]$, который имеет в теории непрерывных групп ключевое значение /I/. Учитывая первое из соотношений (7), находим

$$u_o''^{-1} u''^i = \frac{u_o^{-1} u^i + u_o'^{-1} u'^i \pm u_o^{-1} u_o'^{-1} g^{ip} e_{pqr} u^q u'^r}{1 - \varepsilon_o u_o^{-1} u_o'^{-1} g_{pq} u^p u'^q}. \qquad (I7)$$

При выводе закона композиции параметров (I7) для группы $SQ_3[3]$ используется соотношение

$$\Delta_o(u'') = \Delta_o(u)\, \Delta_o(u') \left[1 - \varepsilon_o u_o^{-1} u_o'^{-1} g_{pq} u^p u'^q\right],$$

которое получается как результат взятия следа матричного соотношения (7) с учетом явного вида матриц преобразования $t_\ell^i(u'')$, $t_k^i(u')$ и $t_\ell^k(u)$ *.

Интересно переписать закон композиции параметров (I7), записанный для псевдовекторного представления параметров группы $SQ_3[3]$, для случая бивекторного представления параметров.

---

* Закон композиции параметров (I7) для группы $SQ_3[3]$ в случае евклидовского пространства ($g_{ik} \equiv \delta_{ik}$) переходит в известный закон композиции для группы $SO(3)$ в так называемой векторной параметризации /8/.

При помощи (II) находим:

$$u_{ik}'' = \frac{u_{ik} + u_{ik}' \mp g^{pq}\left(u_{ip} u_{qk}' - u_{ip}' u_{qk}\right)}{1 - \frac{1}{2} g^{ac} g^{bd} u_{ab} u_{cd}'}.$$

Это соотношение, однако, в дальнейшем не будем использовать, так как в настоящее время отсутствует пригодная простая теория бивекторных (в общем поливекторных) пространств, к которым относится и групповое пространство группы $SQ_3[3]$. Рассматривая групповое пространство группы $SQ_3[3]$ как псевдовекторное пространство, можно получить все его геометрические характеристики в привычной форме *.

Соотношение (I7) можно решить относительно псевдовектора u'^i. Для этого заметим, что первое из соотношений в (7) можно записать в виде:

$$t_\ell^i(u') = t_k^i(u'')\, t_\ell^k(-u),$$

и таким образом формальная замена $u'' \to u'$, $u' \to u''$, $u \to -u$ приводит к соотношению

$$u_o'^{-1} u'^i = \frac{u_o''^{-1} u''^i - u_o^{-1} u^i \mp u_o^{-1} u_o''^{-1} g^{ip} e_{pqr} u^q u''^r}{1 + \varepsilon_o u_o^{-1} u_o''^{-1} g_{pq} u^p u''^q}. \qquad (I8)$$

---

* Заметим, однако, что для параметризации группового пространства шестипараметрической группы преобразований произвольной четырехмерной однородной квадрики $SQ_4[6]$ необходимо использовать именно шестимерный бивектор в четырехмерном пространстве R^4. Элементами группового пространства группы $SQ_4[6]$ в такой параметризации являются не точки, которые определяются вектором, а прямые, определяемые бивекторами. Конечно, можно сделать попытку рассматривать групповое пространство группы $SQ_4[6]$ как точечное пространство, выбрав некоторую подходящую модель для бивектора (например /9/), но это ситуацию скорее осложняет, чем упрощает.

Теперь у нас есть в распоряжении все соотношения, которые позволяют определить нужные геометрические характеристики группового пространства группы $SQ_3[3]$ (реперы, обратные реперы, метрику, символы Кристофеля, тензоры Римана и Риччи, кривизну, генераторы группы, структурные константы алгебры, оператор Казимира группы).

Сосчитаем сначала составляющие репера $r^i_k(\pm u)$ и обратного репера $\bar r^k_\ell(\pm u)$ в групповом пространстве группы $SQ_3[3]$ в параметризации (13) (при этом положим для простоты $u_0 = const$). Согласно теории непрерывных групп /2/ явный вид репера $r^i_k(\pm u)$ получаем дифференцированием соотношения (18) по u'' при $u''=u$, т. е.

$$r^i_k(\pm u) = \left.\frac{\partial u'^i}{\partial u''^k}\right|_{u''=u} = \Delta_0^{-1}(u)\left[\delta^i_k \mp u_0^{-1} g^{ip} e_{kpq} u^q\right], \qquad (19)$$

$$r^i_k(0) = \delta^i_k, \; r_0(u) = \det|r^i_k(\pm u)| = \Delta_0^{-2}(u).$$

Аналогично находим явный вид составляющих обратного репера $\bar r^k_\ell(\pm u)$ при помощи дифференцирования соотношения (17) по u' при $u' = 0$:

$$\bar r^k_\ell(\pm u) = \left.\frac{\partial u''^k}{\partial u'^\ell}\right|_{u'=0} = \delta^k_\ell + \varepsilon_0 u_0^{-2} u_\ell u^k \pm u_0^{-1} g^{kp} e_{\ell pq} u^q, \qquad (20)$$

$$\bar r^k_\ell(0) = \delta^k_\ell, \; \bar r_0(u) = \det|\bar r^k_\ell(\pm u)| = \Delta_0^2(u).$$

Как нетрудно убедиться на основе формул (19) и (20), репер $r^i_k(\pm u)$ и обратный репер $\bar r^k_\ell(\pm u)$ взаимно ортогональны, т. е. имеет место

$$r^i_k(\pm u)\,\bar r^k_\ell(\pm u) = \delta^i_\ell.$$

Без особого труда можно найти также явный вид метрики $G_{ab}(u)$ группового пространства группы $SQ_3[3]$, которая получается как скалярное произведение реперов (19):

$$d\sigma^2 = G_{ik}(u)\,du^i du^k,$$

$$G_{ik}(u) = g_{pq} r^p_i(\pm u) r^q_k(\pm u) = \Delta_0^{-2}(u)\left[\Delta_0(u) g_{ik} - \varepsilon_0 u_0^{-2} u_i u_k\right]. \qquad (21)$$

Групповое пространство группы $SQ_3[3]$ таким образом представляет собой риманово пространство. Если взять скалярное произведение обратных реперов (20), то получаем явный вид обратной матрицы к матрице метрики (21):

$$G^{k\ell}(u) = g^{pq}\bar r^k_p(\pm u)\bar r^\ell_q(\pm u) = \Delta_0(u)\left[g^{k\ell} + \varepsilon_0 u_0^{-2} u^k u^\ell\right]. \qquad (22)$$

При этом, естественно, для матриц $G_{ik}(u)$ и $G^{k\ell}(u)$ в форме (21) и (22) выполняется соотношение ортогональности:

$$G_{ik}(u)\,G^{\ell k}(u) = \delta^\ell_i.$$

Чтобы сосчитать определитель $G_0(u)$ метрики (21), образуем сначала при помощи обратной матрицы $g^{k\ell}$ и матрицы $G_{ik}(u)$ некоторый аффинор $G_{ik}(u) g^{k\ell}$ и сосчитаем три его основных инварианта J_1, J_2, J_3 аналогично тому, как это было сделано в случае матрицы преобразований (13) (формулы (14)). После простых вычислений находим явный вид основных инвариантов матрицы метрики $G_{ik}(u)$:

$$\begin{aligned} J_1 &= g^{ik}G_{ik}(u) = \Delta_0^{-2}(u)\left[1 + 2\Delta_0(u)\right], \\ J_2 &= g^{ik}G_{k\ell}(u) g^{\ell m} G_{mi}(u) = \Delta_0^{-4}(u)\left[1 + 2\Delta_0^2(u)\right], \\ J_3 &= g^{ik}G_{k\ell}(u) g^{\ell m} G_{mn}(u) g^{np} G_{pi}(u) = \Delta_0^{-6}(u)\left[1 + 2\Delta_0^3(u)\right]. \end{aligned} \qquad (23)$$

Зная инварианты (23), находим по известной формуле определитель $G_0(u)$ метрики $G_{ik}(u)$:

$$G_0(u) = \det|G_{ik}(u)| = \frac{g_0}{6}\left[J_1^3 - 3J_1J_2 + 2J_3\right] = g_0\Delta_0^{-4}(u). \qquad (24)$$

Как видно из формулы (24), знак определителя метрики группового пространства группы $SQ_3[3]$ совпадает со знаком определителя g_0 первоначально рассматриваемой метрики g_{ik}, и следовательно, этот знак является инвариантом.

Явный вид метрики $G_{ik}(u)$ (21) позволяет без особого труда сосчитать символы Кристофеля первого и второго рода, $\Gamma_{kl,p}(u)$ и $\Gamma^i_{kl}(u)$, тензор Римана $R_{ijkl}(u)$ и тензор Риччи $R_{ik}(u)$, а также скалярную кривизну $R_0(u)$ /10/. Эти величины имеют вид:

– символы Кристофеля:

$$\Gamma_{kl,p}(u)=\frac{1}{2}\left[\partial_k G_{lp}(u)+\partial_l G_{kp}(u)-\partial_p G_{kl}(u)\right]=-\varepsilon_0 u_0^{-2}\Delta_0^{-1}(u)\left[G_{kp}(u)u_l+G_{lp}(u)u_k\right],$$

$$\Gamma^i_{kl}(u)=G^{ip}(u)\Gamma_{kl,p}(u)=-\varepsilon_0 u_0^{-2}\Delta_0^{-1}(u)\left[u_l\delta^i_k+u_k\delta^i_l\right],\quad \partial_k=\frac{\partial}{\partial u^k},$$

– тензор Римана:

$$R^i_{\cdot jkl}(u)=\partial_k\Gamma^i_{jl}(u)-\partial_l\Gamma^i_{jk}(u)+\Gamma^i_{pk}(u)\Gamma^p_{jl}(u)-\Gamma^i_{pl}(u)\Gamma^p_{jk}(u)=$$

$$=\varepsilon_0 u_0^{-2}\left[G_{jl}(u)\delta^i_k-G_{jk}(u)\delta^i_l\right],$$

$$R_{ijkl}(u)=G_{ip}(u)R^p_{\cdot jkl}(u)=\varepsilon_0 u_0^{-2}\left[G_{ik}(u)G_{jl}(u)-G_{il}(u)G_{jk}(u)\right],\tag{25}$$

– тензор Риччи:

$$R_{ik}(u)=R^p_{\cdot ipk}(u)=2\varepsilon_0 u_0^{-2}G_{ik}(u),$$

– кривизна:

$$R_0(u)=G^{pq}(u)R_{pq}(u)=6\varepsilon_0 u_0^{-2},\quad R_0(u)\left|R_0(u)\right|^{-1/2}=\varepsilon_0 .$$

Как непосредственно видно из формул (25), групповое пространство группы $SQ_3[3]$ представляет собой риманово пространство постоянной кривизны, причем знак этой кривизны совпадает с дискретным инвариантом ε_0 первоначально преобразуемой квадратичной формы (8).

Наконец, нетрудно получить явный вид еще двух тензорных характеристик данного риманового пространства, а именно можно найти явный вид тензора Вейля $C_{ijkl}(u)$, характеризующего конформные свойства пространства, и тензора проективной кривизны $W_{ijkl}(u)$, характеризующего проективные свойства данного пространства /11/. После несложных вычислений получаем:

– тензор Вейля:

$$C_{ijkl}(u)=R_{ijkl}(u)+\frac{1}{2}R_0(u)\left[G_{ik}(u)G_{jl}(u)-G_{il}(u)G_{jk}(u)\right]+$$

$$+G_{il}(u)R_{jk}(u)-G_{ik}(u)R_{jl}(u)+G_{jk}(u)R_{il}(u)-G_{jl}(u)R_{ik}(u)\equiv 0,$$

– тензор проективной кривизны:

$$W_{ijkl}(u)=R_{ijkl}(u)+\frac{1}{2}\left[G_{il}(u)R_{jk}(u)-G_{ik}(u)R_{jl}(u)\right]\equiv 0.$$

В связи с тем, что оба вышеупомянутых тензора тождественно равны нулю, можно констатировать, что групповое пространство группы $SQ_3[3]$ является конформно-плоским, а также проективно-плоским. Последнее утверждение является в некотором смысле тривиальным, так как все римановы n-мерные пространства постоянной кривизны являются конформно- и проективно-плоскими, и трехмерные пространства в этом смысле не могут быть исключением.

Наконец заметим, что метрику $G_{ik}(u)$ группового пространства группы $SQ_3[3]$ можно записать в следующем виде:

$$G_{ik}(u)=\left[4\varepsilon_0 u_0^{-2}\Delta_0^2(u)\right]^{-1}\left[2\Delta_0(u)\left(\partial_i\partial_k\Delta_0(u)\right)-\left(\partial_i\Delta_0(u)\right)\left(\partial_k\Delta_0(u)\right)\right].$$

Это означает, что данное групповое пространство относится к так называемым субпроективным пространствам, введенным Каганом /I2/.

В заключение этого раздела выпишем еще явный вид трех генераторов $\sigma_i(\pm u)$ группы $SQ_3[3]$ в параметризации матрицы преобразований $t^i_k(u)$ через псевдовектор u^p. Имея явный вид обратного репера $\bar{r}^p_i(\pm u)$ (20), по определению находим ($k = 1$)

$$\sigma_i(\pm u) = -i\,\bar{r}^p_i(\pm u)\,\partial_p = -i\left[\partial_i + \varepsilon_0 u_0^{-2} u_i (u^p\partial_p) \pm u_0^{-1} e_{ipq} u^p g^{qr}\partial_r\right]. \qquad (26)$$

Структурные константы $c_{ij}{}^{l}$ алгебры группы $SQ_3[3]$ можно получить непосредственным вычислением коммутаторов от генераторов $\sigma_i(\pm u)$, $\sigma_j(\pm u)$ в форме (26). Однако, проще это сделать согласно общей теории непрерывных групп при помощи соответствующего дифференцирования закона композиции параметров (I7):

$$c_{ij}{}^{l} = -i\left(\frac{\partial^2 u''^{l}}{\partial u^i\,\partial u'^j} - \frac{\partial^2 u''^{l}}{\partial u^j\,\partial u'^i}\right)\Bigg|_{u=u'=0} = \mp 2i\,u_0^{-1} e_{ijk}\, g^{kl}.$$

Если теперь ввести вместо генераторов $\sigma_i(\pm u)$ группы $SQ_3[3]$ новые операторы s_i и s'_i согласно формулам

$$s_i = \tfrac{1}{2}\,\sigma_i(+u)\,, \quad s'_i = \tfrac{1}{2}\,\sigma_i(-u)\,,$$

то алгебру группы $SQ_3[3]$ можно записать в более привычном виде:

$$[s_i, s_j] = i u_0^{-1} e_{ijk} g^{kl} s_l\,,\ [s'_i, s'_j] = -i u_0^{-1} e_{ijk} g^{kl} s'_l\,,\ [s_i, s'_j] = 0. \qquad (27)$$

При этом следует заметить, что между генераторами s_i и s'_j существует следующая связь:

$$s_i = t^p_i(+u)\,s'_p\,, \quad s'_i = t^p_i(-u)\,s_p\,,$$

которая вытекает из связи обратных реперов в преобразуемой и преобразованной системах координат

$$\bar{r}^k_i(\mp u) = t^p_i(\pm u)\,\bar{r}^k_p(\pm u).$$

Наконец, будет полезно выписать еще и явный вид единственного инвариантного оператора, построенного из генераторов группы $SQ_3[3]$. Этим оператором является, как известно, оператор Казимира второго порядка C_0:

$$C_0 = g^{pq} s_p s_q = g^{pq} s'_p s'_q = -\tfrac{1}{4}|G_0(u)|^{-1/2}\partial_p\left(|G_0(u)|^{1/2} G^{pq}(u)\,\partial_q\right) =$$
$$= -\tfrac{1}{4}\Delta_0(u)\left\{(g^{pq}\partial_p\partial_q) + \varepsilon_0 u_0^{-2}(u^p\partial_p)\left[(u^q\partial_q)+1\right]\right\} = s_0(s_0+1). \qquad (28)$$

В формуле (28) собственные значения оператора Казимира C_0 формально обозначены через $s_0(s_0+1)$. Здесь не будем уточнять их конкретные значения, которые в конечном итоге зависят от системы инвариантов исходной квадрики (8) и связаны с построением представлений для группы $SQ_3[3]$. Теория представлений группы $SQ_3[3]$ полностью выходит за рамки данной статьи.

На этом можно закончить рассмотрение группы преобразований произвольной однородной трехмерной квадрики $SQ_3[3]$ и анализ ее группового пространства. Продемонстрированный выше метод применим теперь к рассмотрению группы движений квадрата расстояния (интервала) между двумя точками в трехмерных пространствах.

ГРУППОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ГРУППЫ ИНВАРИАНТНОСТИ ИНТЕРВАЛА

Рассмотрим теперь более подробно групповое пространство шестимерной группы инвариантности квадрата расстояния между двумя точками в трехмерном пространстве с произвольной (невырожденной) постоянной метрикой. Эта группа является частным случаем $\frac{1}{2}n(n+1)$-мерных групп инвариантности интервала (квадрата расстояния между двумя точками) в n-мерных действительных пространствах R^n. Приведенный ниже метод для группы $P_3[6]$ в принципе может быть применен к общему случаю группы $P_n[\frac{1}{2}n(n+1)]$.

Итак, как видно из формулы (5) и предыдущего раздела, шестимерное групповое пространство группы $\mathcal{P}_3[6]$, действующей в трехмерном пространстве R^3 и сохраняющей инвариант (I), может быть параметризировано псевдовектором u^i и вектором ξ^i . Закон композиции параметров группы $\mathcal{P}_3[6]$ в форме (7) (с учетом закона композиции параметров группы $SQ_3[3]$ в форме (I5)) позволяет получить все геометрические характеристики данного группового пространства, явный вид генераторов группы $\mathcal{P}_3[6]$, алгебру группы $\mathcal{P}_3[6]$ (будем обозначать ее через $A\mathcal{P}_3[6]$) и инвариантные операторы на группе $\mathcal{P}_3[6]$ (т. е. интегралы движения в групповом пространстве группы $\mathcal{P}_3[6]$).

Сосчитаем сначала обратные реперы группового пространства группы $\mathcal{P}_3[6]$. Обозначим через p_a и k_α шесть генераторов группы $\mathcal{P}_3[6]$. Шестимерную структуру этих генераторов в форме инфинитезимальных операторов лучше всего записать в блочной матричной форме:

$$\begin{pmatrix} p_a \\ k_\alpha \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \overset{1}{\underset{1}{r}}{}^{b}_{a}(u,\xi) & \overset{1}{\underset{2}{r}}{}^{\beta}_{a}(u,\xi) \\ \overset{2}{\underset{1}{r}}{}^{b}_{\alpha}(u,\xi) & \overset{2}{\underset{2}{r}}{}^{\beta}_{\alpha}(u,\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi^b} \\ \dfrac{\partial}{\partial u^\beta} \end{pmatrix}, \qquad (29)$$

где элементами блочной матрицы являются матричные составляющие обратного репера. При этом опять согласно общей теории непрерывных групп /2/ с учетом явного вида закона композиции параметров группы $\mathcal{P}_3[6]$ (7) и явного вида матрицы преобразований группы $SQ_3[3]$ в форме (I3) находим при помощи соответствующего дифференцирования матричные составляющие обратного репера:

$$\overset{1}{\underset{1}{r}}{}^{b}_{a}(u,\xi) = \frac{\partial \xi''^b}{\partial \xi'^a}\bigg|_{\xi'=u'=0} = \delta^b_a ,$$
$$\overset{1}{\underset{2}{r}}{}^{\beta}_{a}(u,\xi) = \frac{\partial u''^\beta}{\partial \xi'^a}\bigg|_{\xi'=u'=0} = 0 , \qquad (30)$$

$$\overset{2}{\underset{1}{r}}{}^{b}_{\alpha}(u,\xi) = \frac{\partial \xi''^b}{\partial u'^\alpha}\bigg|_{\xi'=u'=0} = \xi^p \frac{\partial t^b_p(u')}{\partial u'^\alpha}\bigg|_{u'=0} = \mp 2 u_0^{-1} e_{\alpha pq}\xi^p g^{qb}, \qquad (30)$$
$$\overset{2}{\underset{2}{r}}{}^{\beta}_{\alpha}(u,\xi) = \frac{\partial u''^\beta}{\partial u'^\alpha}\bigg|_{\xi'=u'=0} = \bar{r}^{\beta}_{\alpha}(\pm u) .$$

где $\bar{r}^{\beta}_{\alpha}(\pm u)$ есть обратный репер в групповом пространстве группы $SQ_3[3]$, определенный формулой (I7). Таким образом, генераторы группы $\mathcal{P}_3[6]$ имеют вид:

$$p_a = -i\frac{\partial}{\partial \xi^a}, \quad k^{\pm}_\alpha = \pm 2i u_0^{-1} e_{\alpha pq}\xi^p g^{qr}\frac{\partial}{\partial \xi^r} + \sigma_\alpha(\pm u), \qquad (31)$$

причем оператор $\sigma_\alpha(\pm u)$ определен формулой (26). В структуре генератора $k^{\pm}_\alpha$ явно просматриваются две составляющие, которые имеют характер моментов. Если ввести обозначение l_α для оператора типа орбитального момента

$$l_\alpha = -i u_0^{-1} e_{\alpha pq}\xi^p g^{qr}\frac{\partial}{\partial \xi^r}$$

и вместо генератора $k^{\pm}_\alpha$ ввести операторы $j_\alpha = \frac{1}{2}k^{+}_\alpha$ и $j'_\alpha = \frac{1}{2}k^{-}_\alpha$, то операторы j_α, j'_α можно записать в виде:

$$j_\alpha = l_\alpha + s_\alpha , \qquad j'_\alpha = -l_\alpha + s'_\alpha . \qquad (32)$$

Теперь уже на основе формального вида шести генераторов p_i , j_i группы инвариантности интервала трехмерных пространств $\mathcal{P}_3[6]$ можно дать их интерпретацию. Оператор p_i представляет собой оператор импульса, оператор j_i – оператор полного момента импульса, который состоит из суммы орбитального и внутреннего (спинового) моментов, определенных на переменных группового пространства группы $\mathcal{P}_3[6]$.

Имея явный вид генераторов (28) группы $\mathcal{P}_3[6]$, нетрудно получить алгебру данной группы. Структурные константы $A\mathcal{P}_3[6]$ можно, конечно, получить на основе закона композиции параметров группы $\mathcal{P}_3[6]$ (7) аналогично тому, как это было сделано для $ASQ_3[3]$. В данном случае это проще сделать непосредственным вычислением коммутаторов от генераторов p_i, j_j. Учитывая формулы (29), находим, что алгебра группы $\mathcal{P}_3[6]$ имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&[p_i, p_j] = 0, \\
&[p_i, j_j] = [p_i, l_j] = i u_0^{-1} e_{ijk} g^{kl} p_l, \\
&[j_i, j_j] = [l_i, l_j] + [s_i, s_j] = i u_0^{-1} e_{ijk} g^{kl} j_l.
\end{aligned} \tag{33}
$$

К формулам (31) можно еще добавить коммутаторы, которые не входят в $A\mathcal{P}_3[6]$, но их явный вид как раз и позволяет эту алгебру легко получить:

$$
\begin{aligned}
&[p_i, l_j] = i u_0^{-1} e_{ijk} g^{kl} p_l, \ [p_i, s_j] = [p_i, s'_j] = 0, \\
&[l_i, l_j] = i u_0^{-1} e_{ijk} g^{kl} l_l, \ [l_i, s_j] = [l_i, s'_j] = 0, \\
&[s_i, s_j] = i u_0^{-1} e_{ijk} g^{kl} s_l, \ [s'_i, s'_j] = -i u_0^{-1} e_{ijk} g^{kl} s'_l, \\
&[j'_i, j'_j] = -i u_0^{-1} e_{ijk} g^{kl} j'_l, \ [j_i, j'_j] = -i u_0^{-1} e_{ijk} g^{kl} l_l, \\
&[j'_i, s'_j] = -i u_0^{-1} e_{ijk} g^{kl} s'_l, \ [j_i, s'_j] = 0.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Структура алгебры группы $\mathcal{P}_3[6]$ (33) показывает, что эта алгебра имеет подалгебру, построенную на трех генераторах j_i, действующих в шестимерном пространстве, т. е. имеет место

$$
A\mathcal{P}_3[6] \supset SQ_3[6]. \tag{35}
$$

На этом можно закончить краткое изучение свойств группы $\mathcal{P}_3[6]$ и ее алгебры и перейти к рассмотрению инвариантных операторов на данной группе.

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ НА ГРУППЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ИНТЕРВАЛА

Зная явный вид генераторов группы инвариантности интервала трехмерных пространств, можно легко построить инвариантные операторы, собственные значения которых представляют собой сохраняющиеся величины – квантовые числа (интегралы движения). Шесть генераторов группы $\mathcal{P}_3[6]$ представляют собой два векторных оператора p_i и j_i. Как известно, из двух векторов можно построить три инварианта, поэтому для группы $\mathcal{P}_3[6]$ имеем три оператора Казимира:

$$
\begin{aligned}
&C_1 = g^{ik} p_i p_k = p_0^2, \\
&C_2 = g^{ik} j_i j_k = j_0(j_0+1), \\
&C_3 = g^{ik} p_i j_k \equiv g^{ik} p_i s_k = p_0 \sigma_0.
\end{aligned} \tag{36}
$$

Путем непосредственного вычисления можно убедиться в том, что все генераторы p_i, j_i группы $\mathcal{P}_3[6]$ коммутируют с операторами Казимира (36). Из структуры операторов Казимира (36) видно, что они представляют собой квадрат оператора импульса, квадрат оператора полного момента импульса и оператор спиральности (т. е. скалярное произведение оператора спина и оператора импульса).

Групповое пространство группы $\mathcal{P}_3[6]$ шестимерно, и для полного описания состояний в этом пространстве необходимо иметь шесть диагональных операторов, т. е. кроме трех операторов Казимира (36), необходимо сконструировать еще три взаимно коммутирующих диагональных оператора. Эти операторы можно выбрать по-разному. Одним из таких вариантов операторов являются следующие три оператора:

$$
L_1 = C_0 = g^{ik} s_i s_k \equiv g^{ik} s'_i s'_k, \quad L_2 = n^i j_i, \quad L_3 = n'^i s'_i, \tag{37}
$$

где n^i – некоторый постоянный вектор и n'^i – некоторый постоянный вектор в преобразованной системе координат.

Диагональные операторы (37) взаимно коммутируют и одновременно коммутируют также с тремя операторами Казимира (36). Их вид непосредственно определяет их интерпретацию. Диагональные операторы (37) представляют собой квадрат оператора спина, проекцию оператора полного момента импульса на заданное направление и проекцию оператора спина на выбранное направление в преобразованной системе координат. Однако, следует отметить, что набор диагональных операторов (37), дополняющий до полной системы набор операторов (36), является только одним из возможных. Можно сформулировать самостоятельную задачу об исследовании возможных неэквивалентных наборов диагональных операторов в групповом пространстве группы $\mathcal{P}_3[6]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный выше единый подход к изучению групповых пространств группы инвариантности трехмерного интервала раскрывает ряд преимуществ этого метода. Прежде всего, такой подход позволяет последовательно использовать тензорное исчисление и теорию инвариантов при изучении геометрии групповых пространств. Кроме того, этот метод показывает, насколько важен момент, когда проводится диагонализация разных выражений, операторов и т. п. Диагонализацию следует проводить в окончательных формулах, когда необходимо получить конкретные значения различных величин. В этом смысле в данной работе никакой диагонализации и не проводится – это выходит за рамки целей предлагаемой статьи.

Преимуществом данного подхода можно считать также его возможное непосредственное обобщение и применение к пространствам

любой размерности с соответствующей группой инвариантности интервала (или некоторой другой непрерывной группой, действующей в данном пространстве). В этом смысле особый интерес представляет рассмотрение группы инвариантности интервала в четырехмерных пространствах, которая содержит важную с физической точки зрения группу Пуанкаре, являющуюся группой инвариантности пространственно-временного интервала. Для десятипараметрической группы инвариантности четырехмерного интервала $\mathcal{P}_4[10]$ можно аналогично тому, как это было сделано в трехмерном случае, сконструировать 10 интегралов движения в соответствующей инвариантной форме. Трудность, которую следует преодолеть в данном случае, связана с шестипараметрической группой инвариантности произвольной однородной невырожденной четырехмерной квадрики – $SQ_4[6]$. Групповое пространство группы $SQ_4[6]$ не является точечным. Элементы группового пространства группы $SQ_4[6]$ определяются бивекторами (т. е. антисимметрическими тензорами в $\mathcal{R}^4$), которые, как известно, определяют геометрический объект – прямую. В этом смысле групповое пространство известной группы Лоренца следует также считать бивекторным пространством подобно тому, как и групповые пространства любой из групп $SO(p,q)$, действующих в n – мерных действительных пространствах ($n > 3$) и сохраняющих некоторую квадрику.

Вернемся, однако, еще к трехмерному случаю. Среди интегралов движения в групповом пространстве группы $\mathcal{P}_3[6]$ имеется спиральность и квадрат спина. Это означает, что спин и спиральность связаны исключительно с трехмерными пространствами (а не с четырехмерным пространством – временем), т. е. спин и спиральность следует считать сугубо нерелятивистскими понятиями. Более того, обычно понятия спина и спиральности связываются с трехмерным евклидовским пространством, но как было показано в данной статье, эти понятия существуют также в любом трехмерном псевдоевклидовском пространстве.

Естественно, что целый ряд вопросов остается за пределами данной работы. К некоторым из них в будущем следует вернуться. Если произвести диагонализацию исходной квадратической формы (I), то эта диагонализация будет просматриваться во всех формулах посредством диагонализированного постоянного метрического тензора g_{ik}. В случае евклидовского пространства ($g_{ik} \equiv \delta_{ik}$) непосредственно получаем известные результаты, касающиеся группы SO(3), ее группового пространства, а также группы инвариантности интервала в этом пространстве. Для групп SO(2,I) и SO(I,2) и соответствующих групп инвариантности интервала получаются несколько отличные и менее известные результаты. В целом предложенный метод исследования групповых пространств группы инвариантности интервала в R^3 достаточно эффективен, и в будущем ему следует еще уделить должное внимание.

Автор благодарит дирекцию ОИЯИ за возможность выполнить эту работу в Лаборатории теоретической физики.

ЛИТЕРАТУРА

I. Чеботарев Н. Г..- Теория групп Ли. М.-Л.: ГИТТЛ, 1940.
2. Смирнов В. И. - Курс высшей математики. т. 3, ч. I, М.: Наука, 1967.
3. Lukáč I. - On the geometry of group space of the group of motion of three-dimensional quadratic form. In: Proceedings of the Conference Hadron Structure '87, Physics and Applications, v. 14, Bratislava, Slovak Academy of Sciemces, 1988, p. 357.
4. Turnbull H. W. - The theory of Determinants, Matrices and Invariants. N. Y.: Dover Publications, 1960.
5. Cayley A. - Collected Math. Papers. v. 1, Cambridge: University Press, 1889, p. 332; Crelle, 1846, v. 32, p. 119.
6. Широков П. А. - Тензорное исчисление. Казань: Изд. КГУ, 1961.
7. Гуревич Г. Б. - Основы теории алгебраических инвариантов. М.-Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1948.
8. Федоров Ф. И. - Группа Лоренца. М.: Наука, 1979.
9. Лукач И. - О разложении алгебры группы движений произвольной четырехмерной квадратичной формы. Сообщения ОИЯИ Р2-90-90, Дубна, 1990.
10. Корн Г., Корн Т. - Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
11. Петров А. З. - Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
12. Каган В. Ф. - Субпроективные пространства. М.: ГИФМЛ, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 июля 1991 года.