сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-91-3

А.В.Тарасов, И.У.Христова

ФОРМФАКТОРЫ ПЕРЕХОДА ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ МЕЖДУ СОСТОЯНИЯМИ ДИСКРЕТНОГО И НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

1991

Для ряда задач физики адронных водородоподобных атомов[1,2] необходимы явные выражения величин

$$\mathbb{F}^{\vec{p}}_{nlm}(\vec{q}) = \int \Psi^{*}_{\mp\vec{p}}(\vec{r})\, \Psi_{nlm}(\vec{r})\, e^{i\vec{q}\,\vec{r}}\, d^{3}r, \qquad (1)$$

представляющих формфакторы перехода между состояниями дискретного (nlm) и непрерывного $(\vec{p})$ спектра ($\vec{p}$ – импульс одной из компонент ионизованного атома в его системе покоя).

Волновые функции водородоподобного атома в связанном и ионизованном состояниях

$$\Psi_{nlm}(\vec{r}) = N_{nl}\, Y_{lm}(\vec{r}/r)\, (2\eta r)^{l}\, F(-n+l+1,\ 2l+2;\ 2\eta r)\, e^{-\eta r}$$

$$N_{nl} = \frac{2}{\Gamma(2l+2)} \left\{ \frac{\eta^{3}\,\Gamma(n+l+1)}{n\,\Gamma(n-l)} \right\}^{1/2}$$

$$\eta = \frac{\mu e^{2}}{n} \qquad e^{2} = \frac{1}{137} \qquad (2)$$

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = N^{*}(\xi)\, e^{i\vec{p}\,\vec{r}}\, F\left\{ -i\xi, 1;\ -i(pr+\vec{p}\,\vec{r}) \right\} \qquad (3)$$

$$N(\xi) = \Gamma(1-i\xi)\, \exp(\pi\xi/2)$$

$$\xi = \frac{\mu e^{2}}{p} \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

где $m_{1,2}$ – массы частиц, образующих атом,

представим в виде:

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = N_{nl} Y_{lm}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) e^{-\eta r} \sum_{j=0}^{n_r} \frac{(\alpha)_j}{(\gamma)_j} \frac{(2\eta r)^{j+l}}{\Gamma(j+1)} \qquad (4)$$

$$n_r = n-l-1 \qquad \alpha = -n_r \qquad \gamma = 2l+2$$

$$\psi^{*}_{\vec p}(\vec r) = \frac{N(\xi)}{B(i\xi, 1-i\xi)} \int_0^1 dt\; t^{i\xi-1} (1-t)^{-i\xi}\, e^{i\{ptr-(1-t)\vec p\,\vec r\}}, \tag{5}$$

Тогда для переходного формфактора (1) получим

$$F^{\vec p}_{nlm}(\vec q) = \frac{N_{nl}\, N(\xi)}{\beta(i\xi,\ 1-i\xi)} \int_0^1 dt\; t^{i\xi-1}(1-t)^{-i\xi} \sum_{j=1}^{n_r} \frac{(\alpha)_j\, \Phi^{(j)}_{lm}(\vec p,\vec q)}{(\gamma)_j\, \Gamma(j+1)}, \tag{6}$$

где

$$\Phi^{(j)}_{lm}(\vec p,\vec q) = \int d^3r\; Y_{lm}(\vec r/r)\,(2\eta r)^{j+1}\, e^{i\vec\beta\vec r - i\nu r} =$$

$$= \frac{4\pi}{(2\eta)^3}\,\Gamma(j+2)\,\Gamma(l+1)\,Y_{lm}(\vec\beta/\beta)(i\beta/\eta)^l W^{\frac{j+l+3}{2}}\, C^{l+1}_{j+1}(z) \tag{7}$$

$$\vec\beta = \vec q - \vec p(1-t) \qquad \nu = \eta - ipt \qquad w = \frac{4\eta^2}{\nu^2+\beta^2}$$

$$z = \frac{1}{2} W^{1/2}(1+x); \qquad x = -\frac{ipt}{\eta}$$

$$\nu^2 + \beta^2 = \eta^2 + (\vec q - \vec p)^2 - 2t\{\vec p(\vec p - \vec q) + i\eta p\}$$

C^{l+1}_{j+1} – полиномы Гегенбауэра.

Используя соотношение

$$\Gamma(l+1)\, W^{\frac{j+l+3}{2}}\, C^{l+1}_{j+1}(z) = \sum_{k,s=0}^{\infty} \frac{W^{k+l+2}\,(-1)^{k+j}\, X^{s}\, \Gamma(k+l+2)}{\Gamma(l+k-j)\,\Gamma(1+s)\,\Gamma(2+2k-s-j)}, \tag{8}$$

выполним в (6) суммирование по j:

$$\sum_{j=0}^{n_r} \frac{(\alpha)_j \, \Phi^{(j)}_{lm}(\vec{p}, \vec{q})}{(\gamma)_j \, \Gamma(j+1)} = \frac{4\pi}{(2\eta)^3} Y_{lm}(\vec{\beta}/\beta) \, (i\beta/\eta)^l \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma(2l+2)\,\Gamma(n-l)}{\Gamma(n+l+1)} \sum_{k=0}^{n-l-1} \sum_{s=0}^{l+k} A^{ks}_{nl} \, W^{k+l+2} X^{s} \qquad (9)$$

$$A^{ks}_{nl} = (-1)^k \frac{[(n-l)(2+2l+2k-s)+2l(l+k-n+1)]}{\Gamma(n-l-k)\,\Gamma(1+s)\,\Gamma(2+k-s)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma(l+k+2)\,\Gamma(n+l-k-s+1)}{\Gamma(2l+2k-s+3)} . \qquad (10)$$

Далее, учитывая правила разложения гармонических полиномов (4)

$$\beta^l \, Y_{lm}\left(\frac{\vec{\beta}}{\beta}\right) = \sum_{\substack{l_1, l_2=0 \\ l_1+l_2=l}} (-1)^{l_1} p^{l_1} q^{l_2} \left[\frac{4\pi\,\Gamma(2l+2)}{\Gamma(2l_1+2)\,\Gamma(2l_2+2)}\right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[Y_{l_1}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right) \otimes Y_{l_2}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) \right]_{lm}$$

$$\left[Y_{l_1}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right) \otimes Y_{l_2}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) \right]_{lm} = \sum_{m_1+m_2=m} C^{lm}_{l_1m_1l_2m_2} Y_{l_1m_1}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right) Y_{l_2m_2}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) \qquad (11)$$

($C^{lm}_{l_1m_1l_2m_2}$ – коэффициенты Клебша-Гордана)
и выполняя в (6) интегрирование по dt, придем к следующему выражению для формфакторов (1):

$$F^{\vec p}_{nlm}(\vec q^{>}) = N_{nl}(\zeta)\sum_{l_1=0}^{l}\left(\frac{iq}{\eta}\right)^{l_2}\left[\frac{4\pi\,\Gamma(2l+2)}{\Gamma(2l_1+2)\,\Gamma(2l_2+2)}\right]^{1/2}\cdot \qquad (12)$$

$$\cdot\left[Y_{l_1}\left(\frac{\vec p}{p}\right)\cdot Y_{l_2}\left(\frac{\vec q}{q}\right)\right]_{lm}\cdot S^{l_1 l_2}_{nlm}(\vec p,\vec q)$$

$$S^{l_1 l_2}_{nlm} = \sum_{k=0}^{n-l-1}\sum_{s=0}^{k+l} A^{ks}_{nl}\frac{\Gamma(i\zeta+s)\,\Gamma(l_1-i\zeta+1)}{\Gamma(i\zeta)\,\Gamma(1-i\zeta)\,\Gamma(l_1+s+1)}\left(-\frac{ip}{\eta}\right)^{s+l_1}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{4\eta^2}{\eta^2+(\vec q-\vec p)^2}\right]^{k+l+2}(1-n)^{s+i\zeta}\cdot$$

$$\cdot F(s+i\zeta,\ s-k-l_2-1;\ l_1+s+1;u) \qquad (13)$$

$$N_{nl}(\zeta) = \frac{4\pi}{(2\eta)^3}N_{nl}\,N(\zeta)\frac{\Gamma(2l+2)\,\Gamma(n-l)}{\Gamma(n+l)} = \pi\,N(\zeta)\left[\frac{\Gamma(n-l)}{n\eta^3\,\Gamma(n+l+1)}\right]^{1/2}$$

$$u = \frac{2i\eta p + 2\vec p(\vec p-\vec q)}{(\eta-ip)^2+q^2} \qquad 1-u = \frac{\eta^2+(\vec q-\vec p)^2}{(\eta-ip)^2+q^2}$$

$$l_1 + l_2 = l.$$

Поскольку

$$s - k - l_2 - 1 < 0,$$

гипергеометрические функции в (13) сводятся к полиномам от u.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неменов Л.Л.-ЯФ, 1985, т41, с.980.
2. Mrowczynski St. - Phys.Rev, 1986, v.A33, p.1549.
3. Грандштейн И.С.,Рыжик И.М. - Таблицы интегралов,ФМ, Москва,1963.
4. Варшалович Д.А.,Москалев А.Н.,Херсонский В.К. - Квантовая теория углового момента . Наука,1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 января 1991 года.