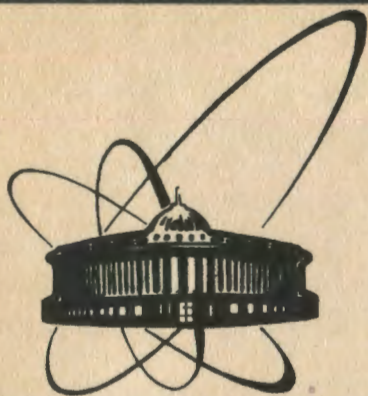


91-10



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P2-91-10

А.В.Тарасов, И.У.Христова

ЭЙКОНАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ДИМЕЗОАТОМОВ
С АТОМАМИ ВЕЩЕСТВА

1991

§ 1. В В Е Д Е Н И Е

В работе^{1/} показано, что на современных ускорителях возможна постановка экспериментов по наблюдению релятивистских димезоатомов (водородоподобных атомов, образованных противоположно заряженными мезонами) и измерению их времени жизни τ_0 в основном состоянии. Величины τ_0 определяются в основном интенсивностью аннигиляции заряженных мезонов в нейтральные и заключают в себе важную информацию о характеристиках низкоэнергетического мезон-мезонного рассеяния. Для анализа данных подобных экспериментов необходима детальная информация о характеристиках взаимодействий димезоатомов с атомами вещества мишени, которая может быть получена лишь путем расчетов в рамках определенных приближений.

Ввиду больших (в сравнении с характерным радиусом сильных взаимодействий) размеров димезоатомов определяющим механизмом их взаимодействия с атомами вещества оказывается электромагнитный. Расчеты сечений возбуждений и ионизации DMA из 1S-состояния в электростатическом поле атомов мишени проводились в работах^{2-4/} в предположении доминирования о механизме однофотонного обмена (первое борновское приближение). Оценки оптимальных характеристик мишеней для экспериментов по измерению времени жизни DMA, проведенные в работе^{1/} на основании результатов^{2-4/}, показали, в частности, необходимость использования мишеней тяжелых элементов ($Z > 70, Z\alpha > 0.5$). Но при взаимодействии димезоатомов с атомами тяжелых элементов заметную роль могут играть многофотонные обмены, не учитываемые борновским приближением. Вопрос о том, насколько их учет искажает результаты борновского приближения, требует специального анализа.

С этой целью нами были проведены расчеты характеристик взаимодействия релятивистских димезоатомов ($\pi^+\pi^-$) с атомами Ta ($Z=73$) в эйкональном приближении, позволяющем учесть наряду с однофотонным также вклады всех многофотонных обменов между взаимодействующими атомами.

§ 2. О С Н О В Н Ы Е С О О Т Н О Ш Е Н И Я

При анализе столкновений димезоатомов с атомами тяжелых

элементов ($Z \gg 1$) можно с хорошей точностью ($\sim 1/Z$) пренебречь эффектами возбуждения и ионизации атомов мишени и считать, что последние всегда остаются в основном состоянии. В этом приближении задача сводится к рассмотрению процессов взаимодействия димезоатомов с электростатическим потенциалом $\Phi(R, Z)$, создаваемым изолированным атомом мишени Z в основном состоянии на расстоянии R от его центра. Форма этого потенциала достаточно хорошо воспроизводится, например, моделью Томаса-Ферми. При проведении численных расчетов мы использовали аналитическую аппроксимацию томас-фермиевского потенциала, полученную в работе Мольер ¹⁵:

$$\Phi(R, Z) = \frac{Ze}{R} \sum_{i=1}^3 C_i \exp(-\lambda_i R)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= 0,35 & C_2 &= 0,55 & C_3 &= 0,1 \\ \lambda_1 &= 0,3 \lambda_0 Z^{1/3} & \lambda_2 &= 4\lambda_1 & \lambda_3 &= 5\lambda_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\lambda_0 = (0,885 \alpha_0)^{-1} \quad \alpha_0 = 0,529 A^0.$$

Взаимодействие димезоатомов с потенциалом $\Phi(R, Z)$ носит в основном неупругий характер. В подавляющем большинстве случаев ($\sim 95\%$) в результате такого взаимодействия димезоатом изменяет своё внутреннее состояние (см. § 7). Тем самым основными характеристиками этого взаимодействия являются сечения переходов между различными состояниями димезоатома. Рассматривая эти переходы, условимся для простоты совокупности квантовых чисел $\{n_i, l_i, m_i\}$ начального и $\{n_f, l_f, m_f\}$ конечного состояний димезоатома обозначать просто буквами i и f соответственно.

Мы не будем интересоваться деталями углового распределения провзаимодействовавших димезоатомов, имеющего ярко выраженный пик вперед, а рассмотрим лишь полные сечения σ_{if} переходов $i \rightarrow f$. В эйкональных моделях подобные величины представляются выражениями

$$\sigma_{if} = \int |\Gamma_{if}(\vec{b})|^2 d^2b, \quad (2)$$

где Γ_{if} -- профиль-функция перехода $i \rightarrow f$,

\vec{b} -- прицельный параметр центра тяжести димезоатома относительно силового центра.

Величины $\Gamma_{\nu f}$ являются матричными элементами

$$\Gamma_{\nu f}(\vec{b}) = \int \psi_f^*(\vec{r}) \Gamma(\vec{b}, \vec{s}) \psi_i(\vec{r}) d^3r \quad (3)$$

оператора взаимодействия $\Gamma(\vec{b}, \vec{s})$.

В (3) $\psi_{i(f)}$ -- волновые функции димезоатома в начальном и конечном состояниях, \vec{r} -- векторное расстояние между мезонами в димезоатоме, \vec{s} -- его проекция на плоскость прицельного параметра (плоскость, ортогональную направлению движения DMA).

Оператор взаимодействия $\Gamma(\vec{b}, \vec{s})$ зависит лишь от формы потенциала $\Phi(R, Z)$ и соотношения между массами мезонов в DMA:

$$\Gamma(\vec{b}, \vec{s}) = 1 - \exp(i\chi_+(\rho_+) + i\chi_-(\rho_-))$$

$$\chi_{\mp}(\rho) = \mp e \int \Phi(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}, Z) d\zeta \quad (4)$$

$$\rho_{\pm} = \left| \vec{b} + \frac{\mu}{m_{\pm}} \vec{s} \right| \quad \rho_{-} = \left| \vec{b} - \frac{\mu}{m_{-}} \vec{s} \right|,$$

где m_{\pm} -- массы соответственно положительно и отрицательно заряженных мезонов в DMA,

μ -- их приведенная масса.

Величины $\chi_{\pm}(\rho)$ представляют фазовые сдвиги, приобретаемые волновыми функциями релятивистских заряженных частиц с зарядами $\pm e$ соответственно при их движении по прямолинейным траекториям в поле $\Phi(R, Z)$ на прицельном расстоянии ρ от его центра. Используя параметризацию (1) для электростатического потенциала атома мишени, получим следующие явные выражения для этих величин:

$$\chi_{\mp}(\rho) = \mp 2 Z \alpha \sum_{i=1}^3 C_i K_0(\lambda_i \rho) \quad (5)$$

$$\alpha = e^2 = 1/137,$$

где $K_0(x)$ -- функции Макдональда нулевого порядка.

§ 3. П Р А В И Л А О Т Б О Р А

Поскольку оператор взаимодействия не зависит от z , компоненты

радиус- вектора \vec{r} , параллельной направлению движения DMA. удобно разделить интегрирование по d^3r в (3) на продольную dz и поперечную d^2s составляющие ($d^3r = d^2s dz$) и ввести в рассмотрение величину

$$\rho_{if}(\vec{s}) = \int \psi_f^*(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}) dz, \quad (6)$$

которую мы назовем переходной профиль-плотностью. Соотношение (3) при этом приобретает вид

$$\Gamma_{if}(\vec{b}) = \int \Gamma(\vec{b}, \vec{s}) \rho_{if}(\vec{s}) d^2s. \quad (7)$$

Выберем в качестве оси квантования ось z и представим каждую из входящих в (6) волновых функций DMA в виде произведения угловой и радиальной частей:

$$\psi(\vec{r}) \sim e^{im\phi} P_1^m(\cos\theta) R_{n1}(r)$$

$$r = |\vec{r}|, \quad Z = r \cos\theta, \quad S = |\vec{S}| = r \sin\theta \quad (8)$$

$$S_x = S \cos\phi, \quad S_y = S \sin\phi.$$

Здесь n, l, m -- радиальное, орбитальное и магнитное квантовые числа соответствующего состояния DMA (начального i и конечного f). Учитывая свойство

$$P_1^m(-\cos\theta) = (-1)^{l-m} P_1^m(\cos\theta) \quad (9)$$

присоединенных полиномов Лежандра, замечаем, что волновые функции вида (8) обладают определенной четностью

$$P_z = (-1)^{l-m} \quad (10)$$

относительно операции $z \rightarrow -z$ зеркального отражения в плоскости X, Y . Отсюда следует, что величины ρ_{if} (6), а вместе с ними и профиль-функции Γ_{if} (7) обращаются в нуль для переходов $i \rightarrow f$ между состояниями с противоположными P_z четностями (10). Учитывая это правило отбора и тот факт, что димезоатомы образуются исключительно в nS - состояниях ($l=0, m=0, P_z=1$)^{1/2}. приходим к выводу, что состояния, в которые может перейти DMA в результате многократных столкновений с атомами мишени, всегда обладают положительной P_z - четностью. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать переходы только между такими состояниями.

§ 4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ПРАВИЛА ОТБОРА

Из (8) следуют соотношения факторизации для величин (6), которые удобно записать в виде:

$$\rho_{if}(s) = -\frac{1}{2\pi} e^{-i\Delta m \varphi} \tilde{\rho}_{if}(s) \quad (11)$$

$$\Delta m = m_f - m_i.$$

Для величин $\tilde{\rho}_{if}(s)$, отвечающих переходам между дискретными состояниями ДМА, можно получить аналитические выражения. Вводя фурье-преобразование $\Gamma(\vec{b}, \vec{s}, k)$ оператора взаимодействия $\Gamma(\vec{b}, \vec{s})$ по углу φ между векторами

$$\vec{b} \text{ и } \vec{s} \quad (\cos \varphi = \vec{b} * \vec{s} / b * s),$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\vec{b}, \vec{s}, k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} \Gamma(\vec{b}, \vec{s}) d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos k\varphi \Gamma(\vec{b}, \vec{s}) d\varphi, \end{aligned} \quad (12)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

нетрудно получить для полных сечений переходов $i \rightarrow f$ представление в виде

$$\sigma_{if} = 2\pi \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Gamma(\vec{b}, \vec{s}, \Delta m) \rho_{if}(s) s ds |b|^2 db. \quad (13)$$

Рассмотрим следующие комбинации величин σ :

$$\sigma_{iz}^{tot}(k) = \sum_i \sigma_{if} \delta_{k, \Delta m}, \quad (14)$$

$$\sigma_{iz}^{tot}(-k) = \sigma_{iz}^{tot}(k), \quad (14')$$

представляющие сумму сечений переходов димезоатома из состояния i во все состояния f , для которых $m_f = m_i + k$. Учитывая полноту системы радиальных волновых функций ДМА

$$\sum_n R_{nl}(r) R_{nl}^*(r') = -\frac{1}{2} \delta(r - r') \quad (15)$$

и полноту системы "полярных" волновых функций

$$\frac{1}{2} \sum_{l=|m|}^{\infty} (2l+1) \frac{(-1-|m|)!}{(1+|m|)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') = \delta(\cos \theta - \cos \theta'), \quad (16)$$

для величин (14) получим следующее представление:

$$\sigma_{iz}^{\text{tot}}(k) = 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} |\Gamma(\vec{b}, \vec{s}, k)|^2 \rho_{ii}(s) s \, da \, b \, db. \quad (17)$$

В (15) символ Σ подразумевает наряду с суммированием по дискретному спектру состояний димезоатома также интегрирование по непрерывному спектру. Наконец, для полных сечений взаимодействия димезоатома в состоянии i с атомами мишени z имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{iz}^{\text{tot}} &= \sum_f \sigma_{if} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma_{iz}^{\text{tot}}(k) = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\Gamma(\vec{b}, \vec{s})|^2 \rho_{ii}(s) s \, ds. \end{aligned} \quad (18)$$

При получении правой части этого соотношения использовались условия полноты

$$\sum_f \psi_f^*(r) \psi_f(r) = \delta(r - r') \quad (19)$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \sum_k e^{ik(\phi - \phi')} = \delta(\phi - \phi'). \quad (20)$$

Наконец, учитывая соотношение унитарности

$$|\Gamma(\vec{b}, \vec{s})|^2 = 2 \operatorname{Re} \Gamma(\vec{b}, \vec{s}) \quad (21)$$

для оператора взаимодействия, непосредственно следующее из его определения (4), для полных сечений (18) получим окончательно:

$$\sigma_{iz}^{\text{tot}} = 4\pi \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \Gamma(\vec{b}, \vec{s}, 0) \rho_{ii}(\vec{s}) s \, ds \, b \, db. \quad (22)$$

Введение в рассмотрение "спектральных гармоник" (14) полного сечения (18) полезно тем, что их анализ позволяет установить приближенные "правила отбора" по Δm -изменению магнитного квантового числа в переходах $i \rightarrow f$. В отличие от строгих (в пределах применимости эйконального приближения) правил отбора по P_z -- четности, обсуждавшихся в предыдущем разделе, приближенные

правила отбора не запрещают полностью переходы между определенными группами состояний димезоатома, но существенно снижают их интенсивности. Так, анализ результатов численных расчетов (см. табл.) показывает, что доминирующий (~80%) вклад в разложение

$$\sigma_{iz}^{tot} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma_{iz}^{tot}(k)$$

вносят слагаемые с $k = \pm 1$. Остальные примерно 20% практически полностью насыщаются слагаемыми с $k = 0, \pm 2$, так что суммарный вклад всех остальных "гармоник" оказывается на уровне 1% ~ 3%.

Этот результат позволяет при анализе величин σ_{if} сразу исключить из рассмотрения переходы с $|\Delta m| > 3$.

§ 5. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ.

ВТОРОЕ БОРНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Разложим оператор взаимодействия (4) в ряд по степеням фазы $\chi(b, \nu)$

$$\Gamma(\vec{b}, \vec{\nu}) = - \sum_{n=1}^{\infty} (-i \chi(\vec{b}, \vec{\nu}))^n / n! , \quad (23)$$

что эквивалентно разложению в ряд теории возмущений по степеням параметра z_α . Каждый член этого разложения представляет вклад в (4) механизма обмена определенным числом фотонов. Борновскому (однофотонному) приближению отвечает первый член разложения. Может создаться впечатление, что основную поправку к борновскому приближению можно получить, учтя только следующий (двухфотонный) член разложения (23) (так называемое второе борновское приближение). Поскольку механизмы однофотонного и двухфотонного обменов не интерферируют (первый вносит вклад только в мнимую часть оператора $\Gamma(b, \nu)$, а второй - только в его вещественную часть), то в общем случае $m_+ = m_-$ (случай $m_+ = m_-$ будет рассмотрен особо) это привело бы к увеличению всех парциальных сечений σ_{if} , а следовательно, и полного сечения σ_{iz}^{tot} . Но из соотношений (4), (22) следует, что значения полных сечений σ_{iz}^{tot} получаемые в эйкональном (многофотонном) приближении, всегда меньше соответствующих величин борновского приближения. Это означает, что довольно существенными оказываются эффекты деструктивной интерференции амплитуд однофотонного и трехфотонного обменов, так что при анализе поправок к борновскому приближению ограничиваться только вторым

борновским приближением нельзя. Несомненным достоинством эйконального приближения является возможность учесть в замкнутом виде эффекты всех многофотонных обменов, не анализируя сходимости последовательных борновских приближений к ряду теории возмущений (23). При этом безусловно важен вопрос о точности самого эйконального приближения. Из общих соображений следует, что его точность определяется главным образом отношением среднего квадрата скорости атомных электронов к квадрату скорости димезоатома и в случае релятивистских ДМА составляют величину порядка $(Z^{1/3}\alpha)^2 < 0,1 \sim 0,2\%$. Напомним, что характерная точность борновского приближения порядка $(Z\alpha)^2$.

§ 6. СПЕЦИФИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ДИМЕЗОАТОМОВ

Димезоатомы, образованные мезонами одинаковой массы ($m_+ = m_-$), условимся называть симметричными (SDMA). Проводимые ниже результаты расчетов сечений ($\pi^+\pi^-$) - атомов с атомами Та относятся как раз к этому случаю. Для SDMA фаза $\chi(b, s)$ является нечетной функцией величины $\cos\varphi = \vec{b} \cdot \vec{s} / (b \cdot s)$, а следовательно, вещественная и мнимая части оператора $\Gamma(b, s)$ являются соответственно четной и нечетной функциями $\cos\varphi$. Отсюда и из (4), (12) следует, что переходы $i \rightarrow f$ с четными значениями $\Delta m = m_f - m_i$ в случае SDMA обусловлены обменами четным числом фотонов, а переходы с нечетным Δm - обменами нечетным числом фотонов. В частности, борновским приближением разрешены переходы с нечетным Δm . Поэтому полное сечение взаимодействия возрастает в сравнении с борновским, как и в случае несимметричных ($m_+ \neq m_-$) димезоатомов. При последовательном включении в рассмотрение следующих членов разложения (23) возникают интерференции между механизмами обмена нечетными числом фотонов в сечениях переходов с нечетным Δm и между механизмами обмена четным числом фотонов в сечениях переходов с четным Δm . В результате происходит заметное уменьшение всех сечений, а вместе с ними и полного сечения взаимодействия σ_{if}^{tot} . Таблицы I, II иллюстрируют эти замечания.

§ 7. ПОЛНЫЕ, ПОЛНЫЕ УПРУГИЕ И НЕУПРУГИЕ СЕЧЕНИЯ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ $\pi^+\pi^-$ - АТОМОВ С АТОМАМИ Та

Для иллюстрации соотношений между результатами различных

приближений-борновского (однофотонный обмен), второго борновского (однофотонный плюс двухфотонный обмен) и эйконального (многофотонные обмены) в этих приближениях были рассчитаны различные характеристики взаимодействия ($\pi^+ \pi^+$) - атомов с атомами Таб. 2(1973). Наиболее детально исследованы такие характеристики, как полные сечения $\sigma_{\text{tot}}^{\text{tot}}$, а также их основные составляющие $\sigma_{\text{el}}^{\text{tot}}$ к $\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}$, $\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}$ - полные упругие $\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}$, $\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}$ и полные неупругие $\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}$, $\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}$ сечения. Три значения для каждой из этих величин, соответствующие исследованию трех упомянутых выше приближений, приведены в таблице 10. Первые (сверху) значения отвечают борновскому приближению, вторые - второму борновскому, третьи - эйкональному. Значения всех сечений выражены в единицах 10^{-20} см². Нами использовалась следующая индексация состояний димезоатома. Первая цифра, как обычно, представляет значение главного квантового числа, следующая за ней буква является общепринятым символом орбитального квантового числа, вторая цифра (в скобках) - значение магнитного квантового числа, так что, например, набору квантовых чисел n, l, m отвечает символ $nl(m)$. Как видно из представленных результатов, роль многофотонных обменов в процессах взаимодействия димезоатомов с атомами тяжелых элементов довольно существенна.

ТАБЛИЦА 10

	$\sigma_{\text{tot}}^{\text{tot}}$	$\sigma_{\text{el}}^{\text{tot}}$ $m=0$	$\sigma_{\text{el}}^{\text{tot}}$ $m \neq 1$	$\sigma_{\text{el}}^{\text{el}}$ $m \neq 2$	$\sum_{l=2}^{\infty} \sigma_{\text{el}}^{\text{el}}(l, m)$
1S(0)	3.191	0.250	1.167	0.094	3.117
5S(0)	128.7	36.11	122.1	19.18	316.6
2P(1)	24.93	2.494	10.08	0.283	27.86
6P(1)	363.0	39.83	135.1	29.258	360.5
3D(0)	46.60	5.065	18.33	2.083	46.89
5D(0)	124.2	25.24	84.00	12.19	217.6
3D(2)	78.04	8.684	30.46	3.617	76.84
5D(2)	357.1	39.35	132.8	19.91	334.8

ТАБЛИЦА II

	σ_{tot}	σ_{el}	σ_{inel}
1S(0)	3.428	0.000	3.382
	4.149	0.199	3.950
	3.191	0.138	3.053
2S(0)	31.10	0.000	30.27
	40.23	3.009	37.23
	27.95	1.948	26.01
3S(0)	103.2	0.000	98.97
	137.1	11.50	125.6
	90.87	7.361	83.51
4S(0)	224.0	0.000	210.4
	300.9	25.70	275.2
	194.0	16.10	177.9
2P(1)	27.46	0.000	26.96
	35.47	2.609	32.86
	24.93	1.747	23.18
3P(1)	106.5	0.000	103.6
	141.8	12.19	129.6
	95.21	8.196	87.01
4P(1)	239.0	0.000	230.2
	323.6	27.82	295.7
	212.0	18.88	193.1

5P(1)	407.6	0.000	387.4
	542.0	42.92	499.1
	363.0	30.44	332.6
3D(0)	51.81	0.000	50.62
	68.59	4.160	64.43
	46.60	2.853	43.75
4D(0)	136.7	0.000	132.2
	162.8	11.32	151.5
	121.7	7.852	113.9
5D(0)	251.9	0.000	240.8
	340.2	19.81	320.4
	224.2	14.12	210.1
3D(2)	86.89	0.000	84.78
	114.5	9.901	104.6
	78.04	6.728	71.31
4D(2)	224.2	0.000	216.2
	303.8	26.47	277.3
	198.3	17.87	180.4
5D(2)	401.0	0.000	381.4
	534.0	43.08	490.9
	357.1	30.41	326.7

4F(1)	126.2	0.000	122.5
	169.5	13.28	156.2
	112.5	9.027	103.5
5F(1)	259.8	0.000	249.0
	349.4	25.26	324.2
	230.8	17.67	213.1
4F(3)	187.4	0.000	181.3
	254.0	23.36	230.7
	166.3	15.66	150.6
5F(3)	370.8	0.000	353.6
	495.9	40.84	455.1
	329.7	28.60	301.1

ЛИТЕРАТУРА

1. Неменов Л.Л. - ЯФ, 1985, т.41, с.980.
2. Дульян Л.С. и др. - ЯФ, 1977, т.25, с.814.
3. Prasad M.K. - Acta Phys. Polon., 1979, v. B10, p.635.
4. Дульян Л.С., Коцинян А.М., - ЯФ, 1983, т.37, с.137.
5. Yung Su Tsai - Rev. Mod. Phys. 1974, v. 46, p. 815.

Рукопись поступила в издательский отдел
II января 1991 года.