СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 9082

Д.Ю.Бардин, Д.И.Блохинцев

О СОБСТВЕННОЙ МАССЕ ЛЕПТОНОВ

1975

P2 - 9082

Д.Ю.Бардин, Д.И.Блохинцев

О СОБСТВЕННОЙ МАССЕ ЛЕПТОНОВ

Факт распада мюона на электрон и пару нейтрино указывает на то, что различие в массах мюона и электрона должно быть обусловлено либо различием их собственных нейтринных энергий, либо должно происходить за счет некоторого другого поля, например, поля промежуточного бозона, распадающегося на лептонную пару.

В этой связи представляется интересным исследовать возможность расщепления масс мюона и электрона, основываясь только на четырехфермионном точечном взаимодействии.

Четырехфермионное взаимодействие обладает высокой степенью симметрии и само по себе не может привести к какому-либо расщеплению масс. Поэтому мы предположим, что затравочные массы m_1^0 и m_2^0 заряженных спиноров ψ_1 и ψ_2 /соответствующих полям электрона и мюона/ равны: $m_1^0 = m_2^0 = m_0$, а затравочные массы μ_1^0 и μ_2^0 нейтральных спиноров /соответствующих нейтрино/ различны. При $\mu_1^0 = \mu_2^0$ расщепления масс у спиноров ψ_1 и ψ_2, конечно, не возникает. Мы нарушим симметрию четырехфермионного взаимодействия, предполагая, например, что $\mu_1^0 = 0$, $\mu_2^0 = \mu_0 > 0$.

Чтобы найти массы "одетых" частиц, необходимо вычислить массовые операторы частиц $\hat{\mathfrak{M}}$ или их собственно энергетическую часть Σ, где

$$\hat{\mathfrak{M}} = i\Sigma. \qquad /1/$$

Энергия взаимодействия частиц $\mathfrak{W}$ записывается в обычном виде

$$\hat{\mathfrak{W}} = \frac{G}{\sqrt{2}} J_a \bar{J}_a . \qquad /2/$$

Здесь J_α - компоненты слабого лептонного тока

$$J_\alpha = \bar{\psi}_1(x)\,\Gamma_\alpha \nu_1(x) + \bar{\psi}_2(x)\,\Gamma_\alpha \nu_2(x)\,, \qquad /3/$$

где

$$\Gamma_\alpha = \gamma_\alpha(1+\gamma_5)\,, \quad \bar{\Gamma}_\alpha = \gamma_\alpha(1+\gamma_5)\,\eta_\alpha\,, \qquad /4/$$

$$\eta_4 = +1, \ \eta_k = -1 \ \ (k = 1,2,3)\,;\ \gamma_\alpha = \gamma_\alpha^{+},\ \gamma_5 = \gamma_5^{+}.$$

Вследствие $(V-A)$-структуры взаимодействия /2/-/4/, собственно энергетическая часть Σ, в первом порядке по константе G, исчезает. Поэтому мы вычислим Σ во втором приближении по G.

Типичная комбинация сверток, содержащихся в Σ в порядке G^2, может быть проиллюстрирована на примере поля ψ_1:

$$(\bar{\psi}_1(x)\Gamma_\alpha \nu_1(x))(\bar{\nu}_1(x)\Gamma_\alpha \psi_1(x))(\bar{\psi}_1(y)\Gamma_\beta \nu_1(y))(\bar{\nu}_1(y)\Gamma_\beta \psi_1(y)) +$$

$$+ (\bar{\psi}_1(x)\Gamma_\alpha \nu_1(x))(\bar{\nu}_2(x)\Gamma_\alpha \psi_2(x))(\bar{\psi}_2(y)\Gamma_\beta \nu_2(y))(\bar{\nu}_1(y)\Gamma_\beta \psi_1(y)) \qquad /5/$$

В импульсном представлении, исходя из выражения /5/, получим

$$\Sigma = \frac{(-i)^2}{2!}\,\frac{G^2}{2}\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4 q_1\, d^4 p_1\, \Phi(p;p_1,q_1) \qquad /6/$$

Здесь

$$\Phi(p;p_1,q_1) = \Gamma_\alpha S(q,\mu_1)\,\Gamma_\beta \cdot Sp\{\Gamma_\alpha S(p_1,m_1)\,\Gamma_\beta S(q_1,\mu_1)\} +$$

$$+ \Gamma_\alpha S(q,\mu_2)\,\Gamma_\beta \cdot Sp\{\Gamma_\alpha S(p_1,m_2)\,\Gamma_\beta S(q_1,\mu_2)\}, \qquad /7/$$

$$q = p + q_1 - p_1 \qquad /8/$$

и

$$S(p,m) = \frac{m - i\hat{p}}{i(p^2 + m^2)} \qquad /9/$$

- пропагатор частицы с массой m. Нетрудно показать, что функция $\Phi(p;p_1,q_1)$ равна

$$\Phi(p;p_1,q_1) = (-1)^3\Big\{\frac{1}{q^2+\mu_1^2}\,\frac{1}{p_1^2+m_1^2}\,\frac{1}{q_1^2+\mu_1^2} +$$

$$+ \frac{1}{q^2+\mu_1^2}\,\frac{1}{p_1^2+m_2^2}\,\frac{1}{q_1^2+\mu_2^2}\Big\}\,\Gamma_\alpha \hat{q}\,\Gamma_\beta\, Sp\,\Gamma_\alpha \hat{p}_1 \Gamma_\beta \hat{q}_1 . \qquad /10/$$

Далее используем тождество

$$\Gamma_\alpha \hat{q}\,\Gamma_\beta\, Sp\,\Gamma_\alpha \hat{p}_1 \Gamma_\beta \hat{q}_1 = 2^6\,(q\cdot p_1)\,q_{1\alpha}\,\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\,. \qquad /11/$$

Таким образом, дело сводится к вычислению интегралов типа

$$J_\alpha = \int \frac{q\cdot p_1\, q_{1\alpha}\, d^4 q_1\, d^4 p_1}{(q^2+\mu_1^2)(p_1^2+m_2^2)(q_1^2+\mu_2^2)} = \pi^4 p_\alpha\, \mathcal{J}(\Lambda^2; p^2, \mu_1^2; m_2^2, \mu_2^2)\,. \qquad /12/$$

Они вычислены в *Приложении.* Интегралы эти расходятся; поэтому при вычислении вводилось ограничение на импульсы интегрирования: $|p_1|$, $|q_1| < \Lambda$. Используя /1/, /6/, /10/-/12/, получаем выражение для оператора массы:

$$\hat{\mathfrak{M}} = i\,G^2\,\hat{p}\,(1+\gamma_5)\,M. \qquad /13/$$

Полагая $\mu_1^0 = 0$, $\mu_2^0 = \mu_0$, $m_1^0 = m_2^0 = m_0$, получим следующие выражения для функций M для различных полей:

для поля ψ_1: $M = \mathcal{J}(\Lambda^2; m_0^2, 0\,; m_0^2, 0) + \mathcal{J}(\Lambda^2; m_0^2, 0\,; m_0^2, \mu_0^2)\,;$ /14/

для поля ψ_2: $M = \mathcal{J}(\Lambda^2; m_0^2, \mu_0^2; m_0^2, 0) + \mathcal{J}(\Lambda^2; m_0^2, \mu_0^2; m_0^2, \mu_0^2)\,;$ /14'/

для поля ν_1: $\quad M = \mathcal{J}(\Lambda^2; 0, m_0^2; 0, m_0^2) + \mathcal{J}(\Lambda^2; 0, m_0^2; \mu_0^2, m_0^2)$: /15/

для поля ν_2: $\quad M = \mathcal{J}(\Lambda^2; \mu_0^2, m_0^2; \mu_0^2, m_0^2) + \mathcal{J}(\Lambda^2; \mu_0^2, m_0^2; 0, m_0^2)$ /15 ′/

Выражения для интегралов $\mathcal{J}$ даны в Приложении; их общая структура такова:

$$\mathcal{J}(\Lambda^2; m_0^2, \mu_0^2; m_0^2, \mu_0^2) = \frac{1}{4}\Lambda^4\left(1 + a\frac{m_0^2}{\Lambda^2} + \ldots + b\frac{\mu_0^2}{\Lambda^2} + \ldots\right). \qquad /16/$$

Обратимся теперь к уравнению для полей. Они имеют следующий общий вид:

$$(i\hat{p} + m_0 + \hat{\mathfrak{M}})\phi = 0, \qquad /17/$$

где ϕ - одно из полей ψ_1, ψ_2, ν_1, ν_2, а m_0 - соответствующая затравочная масса. Введя обозначение

$$z = G^2 M, \qquad /18/$$

напишем уравнение /17/ в явном виде

$$[\,i\hat{p} + \frac{m_0}{1+z} + \frac{z}{1+z} i\hat{p}\gamma_5\,]\phi = 0. \qquad /17\,'/$$

Умножая это уравнение на оператор

$$-i\hat{p} + \frac{m}{1+z} - \frac{z}{1+z} i\hat{p}\gamma_5,$$

получим условие

$$-p^2\left[1 - \left(\frac{z}{1+z}\right)^2\right] = \frac{m_0^2}{(1+z)^2}. \qquad /19/$$

Искомая физическая масса частицы $m = +\sqrt{p^2}$, т.е.

$$m = \frac{m_0}{(1+2z)^{1/2}}. \qquad /20/$$

Для нейтральных полей отсюда находим

$$\mu_1 = 0, \qquad /21/$$

$$\mu_2 = \frac{\mu_0}{(1+2z)^{1/2}}. \qquad /22/$$

Причем здесь для вычисления z достаточно ограничиться первым членом разложения /16/, так что:

$$z \approx \frac{1}{2} G^2 \Lambda^4. \qquad /23/$$

Для заряженных полей

$$m_1 = \frac{m_0}{(1+2z)^{1/2}}, \quad m_2 = \frac{m_0}{(1+2z)^{1/2}}. \qquad /24/$$

Отсюда находим интересующее нас приближенное выражение для разности масс $m_1 - m_2$:

$$m_1 - m_2 = \frac{m_0}{(1+2z)^{3/2}}(z_2 - z_1). \qquad /25/$$

Разность $z_2 - z_1$ на основании формул /14/ и /14 ′/ и /П.18/, /П.21/ *Приложения* равна

$$z_2 - z_1 \approx \frac{1}{4} G^2 \Lambda^4 (b_1'' + b_1' - b_1)\frac{\mu_0^2}{\Lambda^2}, \qquad /26/$$

где b_1, b_1' и b_1'' - числовые коэффициенты ~1. Оставаясь в рамках обычного четырехфермионного взаимодействия, нельзя предполагать, что $G^2\Lambda^4 \gg 1$. Далее, из опыта известно, что масса мюонного нейтрино $\mu_2 < 1{,}2$ *МэВ*. Поэтому расщепление масс заряженных спиноров ψ_1 и ψ_2, обусловленное фермиевским взаимодействием, оказывается крайне малым.

Следовательно, различие масс мюона и электрона не может быть обусловлено слабым взаимодействием лептонов и имеет более глубокое происхождение, связанное, по всей видимости, с внутренней структурой мюона. Тот факт, что мюон нестабилен и распадается на электрон и пару нейтрино, указывает на наличие такой структуры.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы покажем, что интеграл /12/ обладает следующим свойством: если при фиксированном Λ положить любую из масс m_1, μ_1, m_2, μ_2 равной нулю, то результат интегрирования оказывается конечным. Из этого следует, что интеграл /12/ представляется в виде ряда Тэйлора /16/ по квадратам этих масс.

Кроме того, вычислим величину $\mathcal{J}(\Lambda^2;0,0;0,0)$ - первый член ряда /16/.

Используя закон сохранения 4-импульса /8/, представим интеграл /12/ в виде

$$J_\alpha = \frac{1}{2}\int \frac{d^4 q_1 q_\alpha}{q_1^2 + \mu_2^2} I, \qquad /П.1/$$

где

$$I = \int \frac{\mu_1^2 + (p+q_1)^2 - p_1^2}{(q^2+\mu_1^2)(p_1^2+m_2^2)} d^4p_1 - \int \frac{d^4 p_1}{p_1^2 + m_2^2}. \qquad /П.2/$$

Поскольку $\int d^4p_1/(p_1^2+m_1^2) = \text{const}$, а $\int d^4q_1 q_{1\alpha}/(q_1^2+\mu_2^2) = 0$, второй интеграл в /П.2/ не дает вклада.

Интеграл I вычисляем стандартным способом, переходя к 4-мерному эвклидовому пространству /1/. Используя соотношение /1/

$$d^4p_1 = \frac{i}{2} y\,dy\,d\Omega^{(4)}_{p_1}, \qquad /П.3/$$

где $y = p_1^2 > 0$, а $d\Omega^{(4)}_{p_1}$ - элемент телесного угла, причем

$$d\Omega^{(4)}_{p_1} = \sin^2\theta_1 \sin\theta_2\, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \qquad /П.4/$$

имеем

$$I = 2\pi i \int_0^{\Lambda^2} \frac{\mu_1^2 + Q^2 - y}{y + m_2^2} y\,dy \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta_1\, d\theta_1}{(p-Q)^2 + \mu_1^2}. \qquad /П.5/$$

Выбирая ось x_1 вдоль вектора $Q = p + q_1$, так, что

$$p_1 \cdot Q = \sqrt{p_1^2}\sqrt{Q^2}\cos\theta_1. \qquad /П.6/$$

непосредственно выполняем интегрирование по углу θ_1, с использованием формулы

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{a - \cos\theta} = \pi[a - \sqrt{a^2-1}] \quad \text{при } |a| > 1. \qquad /П.7/$$

Имеем

$$I = i\pi^2 R(Q^2, m_2^2, \mu_1^2), \qquad /П.8/$$

где

$$R(Q^2; m_2^2, \mu_1^2) = \frac{1}{2Q^2}\int_0^{\Lambda^2} \frac{\mu_1^2 + Q^2 - y}{y + m_2^2} \times$$

$$\times [y + Q^2 + \mu_1^2 - \sqrt{(y + Q^2 + \mu_1^2)^2 - 4yQ^2}]\,dy.$$

Из формулы /П.8/ следует, что при фиксированном Λ функции $R(a^2; m_2^2, 0)$ и $R(Q^2; 0, \mu_1^2)$ конечны. При $m_2 = \mu_1 = 0$ имеем

$$R(Q^2; 0, 0) = Q^2\left(\frac{3}{2} + \ln\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right) - \Lambda^2. \qquad /П.9/$$

Поскольку p - единственный внешний импульс, входящий в интеграл /П.1/, J_α должен иметь вид

$$J_\alpha = p_\alpha(\pi^4 \mathcal{J}). \qquad /П.10/$$

Используя /П.1/ и /П.8/, находим

$$\mathcal{J} = \frac{i}{2\pi^2 p^2}\int \frac{d^4 q_1 p\cdot q_1}{q_1^2 + \mu_2^2} R(Q^2; m_2^2, \mu_1^2). \qquad /П.11/$$

Переходя к переменной $z = Q^2 = (p+q_1)^2$ и используя те же приемы, что и при вычислении интеграла I, имеем

$$\mathcal{J} = \frac{-1}{\pi^2 p^2}\int zR(z;m_2^2,\mu^2)\, f(z;p^2,\mu_2^2)\,dz, \qquad /П.12/$$

где

$$f(z,p^2,\mu_2^2) = \frac{1}{2}\int \frac{pQ-p^2}{(p-Q)^2+\mu_2^2}\, d\,\Omega_Q^{(4)}. \qquad /П.13/$$

Область интегрирования по переменной Q не является сферически симметричной, поскольку мы произвели сдвиг на постоянный вектор p, однако при $\Lambda^2 \gg p^2$ это отличие мало. Интегрирование величины /П.13/ по 4-сфере проводится аналогично тому, как это делалось при получении выражения /П.8/. В результате находим:

$$f(z;p^2,\mu_2^2) = \frac{2\pi^2 p^2}{\beta^2}(z-\beta), \qquad /П.14/$$

где

$$\beta = \beta(z;p^2,\mu_2^2) = z+p^2+\mu_2^2+\sqrt{(z+p^2+\mu_2^2)-4p^2z}\,. \qquad /П.15/$$

И окончательно для $\mathcal{J}$ имеем следующее представление:

$$\mathcal{J} = \int_0^{\Lambda^2} zR(z;m_2^2,\mu_1^2)\,\frac{\beta(z;-m_1^2,\mu_2^2)-z}{\beta^2(z;-m_1^2,\mu_2^2)}\,dz, \qquad /П.16/$$

откуда следует конечность $\mathcal{J}$ при $m_1^2=0$ или $\mu_2^2=0$. Полагая все массы равными нулю, находим*

$$\mathcal{J}(\Lambda^2;0,0;0,0) = \frac{1}{4}\int_0^{\Lambda^2}\left(\frac{3}{2}+\ln\frac{\Lambda^2}{z}\right) z\,dz = \frac{1}{4}\Lambda^4\,. \qquad /П.17/$$

Итак, входящие в формулы /14/ и /15/ интегралы $\mathcal{J}$ можно записать в виде

$$\mathcal{J}(\Lambda^2;m_0^2,0;m_0^2,0) = \frac{1}{4}\Lambda^4\left(1+a_1\frac{m_0^2}{\Lambda^2}+a_2\frac{m_0^2}{\Lambda^2}+\dots\right), \qquad /П.18/$$

*При этом область интегрирования в формуле /П.12/ становится сферически симметричной.

$$\mathcal{J}(\Lambda^2;m_0^2,0;m_0^2,\mu_0^2) = \frac{1}{4}\Lambda^4\left(1+a_1\frac{m_0^2}{\Lambda^2}+a_2\frac{m_0^2}{\Lambda^4}+\dots + b_1\frac{\mu_0^2}{\Lambda^2}+b_2\frac{\mu_0^4}{\Lambda^4}+\dots+c_1\frac{m_0^2\mu_0^2}{\Lambda^4}+\dots\right), \qquad /П.19/$$

$$\mathcal{J}(\Lambda^2;m_0^2,\mu_0^2;m_0^2,0) = \frac{1}{4}\Lambda^4\left(1+a_1\frac{m_0^2}{\Lambda^2}+a_2\frac{m_0^2}{\Lambda^4}+\dots + b'_1\frac{\mu_0^2}{\Lambda^2}+b'_2\frac{\mu_0^4}{\Lambda^4}+\dots+c'_1\frac{m_0^2\mu_0^2}{\Lambda^4}+\dots\right), \qquad /П.20/$$

$$\mathcal{J}(\Lambda^2;m_0^2,\mu_0^2;m_0^2,\mu_0^2) = \frac{1}{4}\Lambda^4\left(1+a_1\frac{m_0^2}{\Lambda^2}+a_2\frac{m_0^4}{\Lambda^4}+\dots + b''_1\frac{\mu_0^2}{\Lambda^2}+b''_2\frac{\mu_0^4}{\Lambda^4}+\dots+c''_1\frac{m_0^2\mu_0^2}{\Lambda^4}+\dots\right). \qquad /П.21/$$

и т.д. Числовые коэффициенты a, b и c порядка единицы.

Из формул /П.18/-/П.21/ сразу получаем формулу /26/.

Литература

1. *А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика, М., Наука, 1969, стр. 492-493.*

Рукопись поступила в издательский отдел 21 июля 1975 года.