СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

13/X-75



P2 - 9053

И.Лукач, Я.А.Смородинский



# ОБ АЛГЕБРЕ МАТРИЦ ГЕЛЛ-МАННА ДЛЯ ГРУППЫ SU (3)

1975

P2 - 9053

И.Лукач*, Я.А.Смородинский

# ОБ АЛГЕБРЕ МАТРИЦ ГЕЛЛ-МАННА ДЛЯ ГРУППЫ SU (3)

* Институт физики Словацкой Академии наук, Братислава.

## Введение

Группа унитарной симметрии была введена в теорию элементарных частиц как непосредственное обобщение группы изотопического спина /I/. Группа $SU(3)$ является восьмипараметрической группой второго ранга, т.е. из восьми генераторов группы два генератора являются коммутирующими /2/. Их можно отождествить с третьей компонентой изотопического спина и гиперзарядом. Генераторы группы $SU(3)$ представляют собой восемь эрмитовых 3 x 3 матриц $\lambda_i$ ( $i$ = I,2, ... 8), называемых теперь матрицами Гелл-Манна. Эти матрицы имеют вид:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (I)$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы (I) образуют так называемое фундаментальное представление группы $SU(3)$. Они удовлетворяют, как известно, следующим соотношениям:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk}\lambda_k, \quad \{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3}\delta_{ij} + 2d_{ijk}\lambda_k, \qquad (2)$$

$$Sp\,\lambda_i = 0, \quad Sp\,\lambda_i\lambda_j = 2\delta_{ij}, \qquad (3)$$

$$f_{ijk} = \frac{1}{4i} Sp([\lambda_i, \lambda_j]\lambda_k), \; d_{ijk} = \frac{1}{4} Sp(\{\lambda_i, \lambda_j\}\lambda_k). \qquad (4)$$

Постоянные $f_{ijk}$ , являющиеся структурными константами алгебры группы $SU(3)$, полностью антисимметричны и постоянные $d_{ijk}$ полностью симметричны по отношению к перестановкам индексов. Не равные нулю элементы $f_{ijk}$ и $d_{ijk}$ приведены , например, в /I/.

Диагональные матрицы $\lambda_3$ и $\lambda_8$ образуют максимальную коммутативную подалгебру Картана для группы $SU(3)$. Они связаны известным образом с наблюдаемыми величинами зарядом $Q$ и гиперзарядом $Y$ :

$$\lambda_Q = \frac{1}{2}\left(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \lambda_Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Матрицы $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ (матрицы Паули) образуют подалгебру алгебры группы $SU(3)$ с коммутационными соотношениями

$$[\lambda_\alpha, \lambda_\beta] = i e_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma, \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3. \qquad (6)$$

Следовательно, набор матриц (I) выбран так, чтобы группа изотопического спина $SU_T(2)$ была непосредственно подгруппой группы $SU(3)$ , т.е. имеет место цепочка подгрупп

$$SU(3) \supset SU_T(2) \otimes U_Y(1). \qquad (7)$$

Группа $SU(3)$ содержит три подгруппы $SU(2)$ , которые соответствуют подгруппам так называемых $U$ , $V$ , $T$ -спинов.



В общем случае необязательно строить представления группы $SU(3)$ согласно цепочке (5), так как вместо подгруппы $T$-спина можно выбрать подгруппу $U$- или $V$-спина /3/. Выбор цепочки подгрупп (4) продиктован тем обстоятельством, что в случае (теоретического) отсутствия электромагнитных взаимодействий сильные взаимодействия сохраняют изотопический спин, т.е. в этом случае изотопический спин является хорошим квантовым числом. На самом деле на опыте сильные и электромагнитные взаимодействия выступают **вместе**, т.е. изотопическая инвариантность не имеет места. Естественно поставить такой вопрос: какая величина ( т.е. какое квантовое число ) сохраняется в случае совместного присутствия сильных и электромагнитных взаимодействий? В предельном случае "отключения" электромагнитных взаимодействий она должна переходить в квадрат изотопического спина.

В работе /4/ показано, как в рамках симметрии $SU(3)$ можно объединить сильные и электромагнитные взаимодействия. Для представлений группы $SU(3)$ можно использовать специальный ( эллиптический ) базис, соответствующий цепочке подгрупп

$$SU(3) \supset U_Q(1) \otimes U_Y(1), \qquad (8)$$

которая означает сохранение заряда и гиперзаряда, но не сохранение изотопического спина /5/. В работе /4/ получена обобщенная формула Гелл-Манна-Окубо для масс частиц унитарного супермультиплета, которая имеет следующий вид:

$$\hat{m} = \alpha + \beta(k'^2 Y + k^2 Q) + \gamma\left[4\lambda_{QY(2)}(k^2) - k'^2 Y^2 + k^2 Q^2\right]. \qquad (9)$$

В формуле (9) $\alpha, \beta, \gamma$ - некоторые постоянные. Параметр $0 \le k^2 \le 1$

( $k'^2 = 1 - k^2$ ), позволяющий непрерывным образом перейти от подгруппы $T$ –спина ( $k^2 = 0$ ) к подгруппе $U$ –спина ( $k^2 = 1$ ), является параметром, непосредственно связанным с расстоянием между фокусами эллиптической системы координат на сфере, причём величина $k^2/k'^2$ характеризует одновременно соотношение электромагнитных и сильных взаимодействий. Собственное значение $\lambda_{QY(\tau)}(k^2)$ является собственным значением оператора $k'^2 C^{(2)}_T - k^2 C^{(2)}_U$, который является определённой линейной комбинацией операторов Казимира на подгруппах $T$– и $U$–спинов. Собственное значение $\lambda_{QY(\tau)}(k^2)$ оператора $k'^2 C^{(2)}_T - k^2 C^{(2)}_U$ является именно тем квантовым числом, которое сохраняется в случае совместного присутствия сильных и электромагнитных взаимодействий. В частном случае $k^2 = 0$, собственное значение $\lambda_{QY(\tau)}(0) = T(T+1)$, и массовая формула (9) переходит в известную формулу Гелл-Манна – Окубо.

Из массовой формулы (9) исключением параметров $\alpha, \beta, \gamma, k^2$ для октета барионов $1/2^+$ получаются четыре правила сумм, которые удобно записать в следующей форме /4/:

$$\frac{1}{3}(m_{N^+} + m_{\Sigma^-} + m_{\Xi^0}) = \frac{1}{3}(m_{N^0} + m_{\Sigma^+} + m_{\Xi^-}) = \frac{1}{2}(m_{\Lambda^0} + m_{\Sigma^0}) = \alpha_0,$$

$$\frac{1}{3}(m^2_{N^+} + m^2_{\Sigma^-} + m^2_{\Xi^0}) = \frac{1}{3}(m^2_{N^0} + m^2_{\Sigma^+} + m^2_{\Xi^-}) = \tag{10}$$

$$= \alpha_0^2 + \frac{1}{12}\left[(m_{\Xi^-} - m_{N^+})^2 + (m_{\Xi^0} - m_{N^0})^2 + (m_{\Sigma^-} - m_{\Sigma^+})^2\right] + \frac{1}{8}(m_{\Sigma^0} - m_{\Lambda^0})^2.$$

Правила сумм для квадратов масс октета псевдоскалярных мезонов, аналогичные формулам (10) для октета барионов, имеют вид (в силу СРТ-инвариантности в массовой формуле (9) для мезонов $\beta = 0$ ):

$$\frac{1}{3}(m^2_{\pi^+} + m^2_{K^+} + m^2_{K^0}) = \frac{1}{2}(m^2_{\pi^0} + m^2_{\eta^0}),$$

$$\frac{1}{9}\left[(m^2_{K^+} - m^2_{\pi^+})^2 + (m^2_{\pi^+} - m^2_{K^0})^2 + (m^2_{K^0} - m_{K^+})^2\right] = \frac{1}{8}(m^2_{\eta^0} - m^2_{\pi^0})^2. \tag{11}$$

Такие же формулы имеют место также для квадратов масс октета векторных мезонов, заменив формально $\eta^0 \to \varphi^0$, $\pi^\pm \to \rho^\pm$, $\pi^0 \to \rho^0$, $K^\pm \to K^{*\pm}$, $K^0 \to K^{*0}$, $\widetilde{K}^0 \to \widetilde{K}^{*0}$.

В общем случае мы должны предположить, что октетам барионов, псевдоскалярных и векторных мезонов соответствуют разные $k^2$, которые обозначим, например, как $k^2_B, k^2_P, k^2_V$. Используя явные выражения для теоретических значений масс частиц октета из работы /4/, получаем для постоянных $k^2_B$ и $k^2_P$ (и аналогично также для $k^2_V$ ) формулы:

$$k^2_B = \frac{m_{\Sigma^-} - m_{\Sigma^+}}{m_{\Xi^-} - m_{N^+}} = \frac{m_{\Xi^-} + m_{N^0} - m_{\Xi^0} - m_{N^+}}{m_{\Xi^-} - m_{N^+}} = \frac{3(m_{\Sigma^0} + m_{\Lambda^0}) - 2(m_{\Xi^0} + m_{\Sigma^+} + m_{N^+})}{2(m_{\Xi^-} - m_{N^+})} =$$

$$= \frac{m_{N^0} - m_{N^+}}{m_{\Xi^0} - m_{\Sigma^+}} = \frac{m_{\Xi^0} + m_{\Sigma^-} - m_{\Xi^-} - m_{\Sigma^+}}{m_{\Xi^0} - m_{\Sigma^+}} = \frac{3(m_{\Sigma^0} + m_{\Lambda^0}) - 2(m_{\Xi^-} + m_{\Sigma^+} + m_{N^+})}{2(m_{\Xi^0} - m_{\Sigma^+})} =$$

$$= \frac{m_{\Xi^-} - m_{\Xi^0}}{m_{\Xi^-} - m_{N^0}} = \frac{m_{\Sigma^-} + m_{N^+} - m_{\Sigma^+} - m_{N^0}}{m_{\Sigma^-} - m_{N^0}} = \frac{3(m_{\Sigma^0} + m_{\Lambda^0}) - 2(m_{\Xi^0} + m_{\Sigma^+} + m_{N^0})}{2(m_{\Sigma^-} - m_{N^0})} = \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{9\left(\frac{m_{\Sigma^0} - m_{\Lambda^0}}{m_{\Sigma^-} + m_{\Sigma^+} - m_{\Xi^0} - m_{N^0}}\right)^2 - 3}\,\right],$$

$$k^2_P = \frac{m^2_{K^0} - m^2_{K^+}}{m^2_{K^0} - m^2_{\pi^+}} = \frac{3(m^2_{\eta^0} + m^2_{\pi^0}) - 2(m^2_{\pi^+} + 2m^2_{K^+})}{2(m^2_{K^0} - m^2_{\pi^+})} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{9}{4}\left(\frac{m^2_{\eta^0} - m^2_{\pi^0}}{m^2_{K^0} - m^2_{\pi^+}}\right)^2 - 3}\,\right]. \tag{13}$$

Формулы (I2) и (I3) являются некоторой другой записью правил сумм (I0) и (II) *. Как нетрудно убедиться, формулы (I0) и (II) из них легко получаются.

Параметры $\alpha, \beta, \gamma$ введены в массовую формулу (9) из феноменологических соображений и принимают разные значения для представлений разных размерностей. Параметр $k^2$ ( его определённое значение ) является, однако, математической характеристикой представлений всех размерностей. Теоретически мы можем построить бесконечное количество представлений заданной размерности (например, октетов), которые будут отличаться разными значениями параметра $k^2$ из интервала его допустимых значений.

С этой целью в дальнейшем построим фундаментальное представление группы $SU(3)$, которое, в отличие от представления (I), назовём неканоническим. Построенные таким образом матрицы (их назовём обобщёнными матрицами Гелл-Манна) образуют опять некоторую алгебру, которая с математической точки зрения изоморфна известной алгебре матриц Гелл-Манна. Покажем, что эти алгебры с точки зрения физики не эквивалентны: алгебра старая является частным случаем новой.

---

*/ В настоящей работе не приводится сравнения формул (I2) и (I3) с экспериментальными данными. Для формул (I0) и (II) это сделано в работе /4/. Цель данной работы состоит прежде всего в выяснении следствий, вытекающих из математической модели симметрии $SU(3)$, которая не включает инвариантность относительно какой-нибудь из трёх подгрупп $SU(2)$ группы $SU(3)$ . В будущем предполагается аналогичное обобщение, т.е. построение и использование бесподгрупповых базисов и для других групп.



### Алгебра Ли группы $SU(3)$

Восемь элементов алгебры Ли группы $SU(3)$ обозначим через $E_{\pm\alpha}$, $\alpha = 1,2,3$ ($E^{+}_{\alpha} = E_{-\alpha}$) и $H_1, H_2$ . Корни этой алгебры обозначим через $\vec{r}(\alpha)$, $\alpha = 1,2,3$ ( $\vec{r}(-\alpha) = \vec{r}(\alpha)$ ), причём имеет место нормировка

$$\sum_{\alpha} r_i(\alpha)\, r_j(\alpha) = \delta_{ij} . \qquad (14)$$

Базис алгебры группы $SU(3)$, называемый базисом Картана - Вейля, записывается в стандартной форме коммутационных соотношений

$$\begin{gathered}[H_1, H_2] = 0,\ [H_1, E_\alpha] = r_1(\alpha) E_\alpha,\ [H_2, E_\alpha] = r_2(\alpha) E_\alpha, \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] = r_1(\alpha) H_1 + r_2(\alpha) H_2,\ [E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_\gamma,\end{gathered} \qquad (15)$$

если $\vec{r}(\gamma) = \vec{r}(\alpha) + \vec{r}(\beta)$ есть корень отличный от нуля. Фундаментальное представление (I) удовлетворяет соотношениям (I5), если положить

$$H_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda_3,\ H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda_8,\ E_{\pm 3} = \frac{1}{2\sqrt{6}}(\lambda_1 \pm i\lambda_2),\ E_{\pm 2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}(\lambda_4 \mp i\lambda_5),\ E_{\pm 1} = \frac{1}{2\sqrt{6}}(\lambda_6 \pm i\lambda_7). \qquad (16)$$

Корни алгебры Ли группы $SU(3)$ в этом базисе имеют значения

$$\begin{gathered}\vec{r}(1) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right),\ \vec{r}(2) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right), \vec{r}(3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \\ \vec{r}(1) + \vec{r}(2) + \vec{r}(3) \equiv 0 .\end{gathered} \qquad (17)$$

Ненулевые постоянные $N_{\alpha\beta}$ равны ( $N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha} = -N_{-\alpha-\beta}$ )

$$N_{12} = N_{23} = N_{31} = \frac{1}{\sqrt{6}} . \qquad (18)$$

Предположим теперь, что диагональные матрицы фундаментального представления имеют общий вид диагональных матриц

$$H_1' = \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_3' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad H_2' = \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8' = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где $a_i$ и $b_i$ - некоторые постоянные, на которые наложен ряд условий, вытекающих из соотношений (3). Из условия неприводимости следует, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad b_1 + b_2 + b_3 = 0, \tag{20}$$

и условие нормировки требует, чтобы имело место:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 2, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 2. \tag{21}$$

Добавляя к матрицам (19) шесть матриц $E'_{\pm\alpha} \equiv E_{\pm\alpha}$ из (16) и подставляя матрицы (19) в коммутационные соотношения (15), находим, что корни новой алгебры Ли группы $SU(3)$ имеют значения

$$\begin{aligned} \vec{r}'(1) &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(a_2 - a_3,\ b_2 - b_3\right), \\ \vec{r}'(2) &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(a_3 - a_1,\ b_3 - b_1\right), \\ \vec{r}'(3) &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(a_1 - a_2,\ b_1 - b_2\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Условие нормировки (14) для корней (22) автоматически выполнено в силу условий (20) и (21).

Алгебра Ли группы $SU(3)$ с корнями (22) изоморфна алгебре с корнями (17). Действительно, разложим новый базис по старому. Учитывая формулы (3), имеем

$$\begin{pmatrix} H_1' \\ H_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta \\ -\sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}. \tag{23}$$



Следовательно, для постоянных $a_i$ и $b_i$ получаем следующие явные выражения

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos\delta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\delta, & b_1 &= -\sin\delta + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\delta, \\ a_2 &= -\cos\delta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\delta, & b_2 &= \sin\delta + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\delta, \\ a_3 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\delta, & b_3 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\delta, \end{aligned} \tag{24}$$

что кратко можно записать таким образом:

$$a_i = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\delta - \frac{2\pi}{3}i\right), \quad b_i = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\delta - \frac{2\pi}{3}i\right). \tag{25}$$

Если теперь положить

$$\sin\delta = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2-k^2}{4\sqrt{1-k^2+k^4}}}, \quad \cos\delta = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2-k^2}{4\sqrt{1-k^2+k^4}}}, \tag{26}$$

то постоянные $a_i$ и $b_i$ можно выразить через параметр $k^2$, который определяет эллиптический базис для представлений группы $SU(3)$ /4,5/. Постоянные $a_i$ и $b_i$, как функции параметра $k^2$, имеют потом следующий явный вид:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}\,e_1}{\sqrt{3(e_1^2+e_2^2+e_3^2)}}}, & b_1 &= \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}\,e_1}{\sqrt{3(e_1^2+e_2^2+e_3^2)}}}, \\ a_2 &= -\sqrt{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}\,e_2}{\sqrt{3(e_1^2+e_2^2+e_3^2)}}}, & b_2 &= \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}\,e_2}{\sqrt{3(e_1^2+e_2^2+e_3^2)}}}, \\ a_3 &= -\sqrt{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}\,e_3}{\sqrt{3(e_1^2+e_2^2+e_3^2)}}}, & b_3 &= -\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}\,e_3}{\sqrt{3(e_1^2+e_2^2+e_3^2)}}}, \end{aligned} \tag{27}$$

где три параметра $e_i$ связаны с параметром $k^2$ с помощью формул:

$$e_1 = -(1+k^2), \quad e_2 = 2k^2-1, \quad e_3 = 2-k^2,$$
$$e_1 \le e_2 \le e_3, \quad e_1+e_2+e_3 \equiv 0, \qquad (28)$$
$$e_1^2+e_2^2+e_3^2 = -2(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1) = 6(1-k^2+k^4).$$

При изменении $k^2$ от 0 до I угол $\delta$ изменяется от 0 до $\pi/6$, поэтому реально $\delta$ всегда можно выбрать из этого интервала. Другие значения связаны с возможностью циклической перестановки унитарных осей. Пусть матрица $R$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^2 = R^{-1}, \quad R^3 = 1, \qquad (29)$$

является оператором, который циклически переставляет унитарные оси. Тогда имеем:

$$R^{-1}\lambda_3' R = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad R^{-1}\lambda_8' R = \begin{pmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \end{pmatrix}, \qquad (30)$$

$$R\lambda_3' R^{-1} = \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad R\lambda_8' R^{-1} = \begin{pmatrix} b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Преобразованию (30) соответствует величина угла $\delta$ из интервала $[\pi/6, \pi/3]$, а преобразованию (31) соответствуют углы $\delta$ из интервала $[\pi/3, \pi/2]$.

Зависимость диагональных матриц (I9) для фундаментального представления группы $SU(3)$ от параметров $e_i$ (т.е. от $k^2$ или $\delta$) даёт возможность непрерывным образом перейти в любую из трёх подгрупп $SU(2)$ этой группы. Случаю $e_1 = e_2$ ($k^2=0$, $\delta=0$)



соответствует подгруппа $T$-спина, случаю $e_2 = e_3$ ($k^2=1$, $\delta=\pi/6$) соответствует подгруппа $U$-спина и случаю $e_3 = e_1$ ($k^2\to\infty$, $\delta=\pi/3$) соответствует подгруппа $V$-спина. Графическая зависимость постоянных $a_i$ и $b_i$ от параметра $0 \le k^2 \le$ I показана на рис. I.

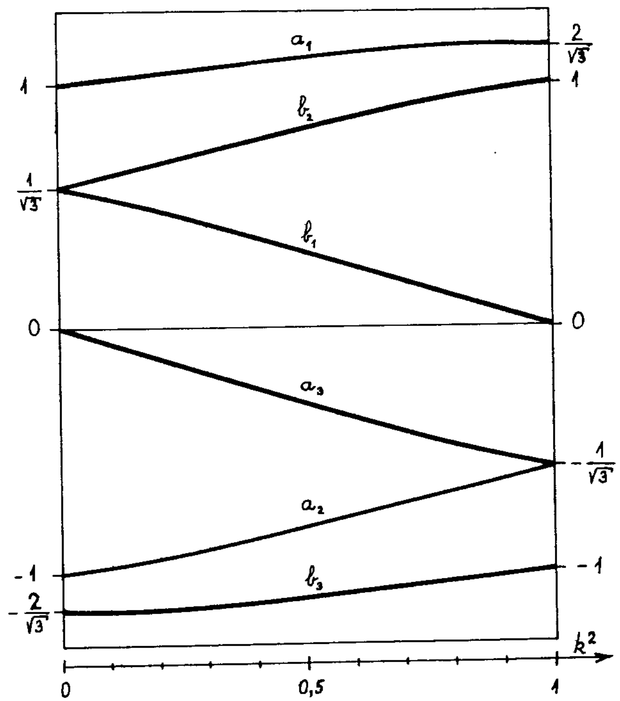


Рис. I.

Постоянные $a_i$ и $b_i$, кроме соотношений (20) и (2I), удовлетворяют ещё целому ряду других соотношений, которые понадобятся нам в будущем и которые нетрудно проверить. Они имеют вид:

$$
\begin{gathered}
a_1 - a_2 = -\sqrt{3}\, b_1, \quad a_2 - a_3 = -\sqrt{3}\, b_2, \quad a_3 - a_1 = -\sqrt{3}\, b_3, \\
b_1 - b_2 = \sqrt{3}\, a_3, \quad b_2 - b_3 = \sqrt{3}\, a_2, \quad b_3 - b_1 = \sqrt{3}\, a_3, \\
a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2 = \frac{4}{3}, \\
a_1 a_2 + b_1 b_2 = a_2 a_3 + b_2 b_3 = a_3 a_1 + b_3 b_1 = -\frac{2}{3}, \\
a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\
a_2 b_3 + a_3 b_2 = 2 a_1 b_1, \quad a_3 b_1 + a_1 b_3 = 2 a_2 b_2, \quad a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2 a_3 b_3 .
\end{gathered}
\tag{32}
$$

Эти соотношения можно получить из определителя, которому удовлетворяют $a_i$ и $b_i$

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 2\sqrt{3}, \tag{33}
$$

с учётом соотношений (20) и (21).

Корни нашей новой алгебры (22) в силу соотношений (31) имеют значения

$$
\vec{r}(1) = \frac{1}{2}(b_1, -a_1), \quad \vec{r}(2) = \frac{1}{2}(b_2, -a_2), \quad \vec{r}(3) = \frac{1}{2}(b_3, -a_3). \tag{34}
$$

На корневой диаграмме алгебры группы $SU(3)$ они повёрнуты на угол $\delta$ (по часовой стрелке) относительно корней (17). Корневые диаграммы для частных случаев $k^2 = 0$ ( $\delta = 0$ , подгруппа $SU_T(2)$) $k^2 = 1$ ( $\delta = \pi/6$ , подгруппа $SU_U(2)$ ) и в общем случае $0 \le \delta \le \pi/6$ приведены на рис. 2 а, б, в.

В работе[5] показано, что в случае эллиптического базиса для группы $SU(3)$ диагональными операторами (собственные значения этих операторов являются наблюдаемыми) являются операторы



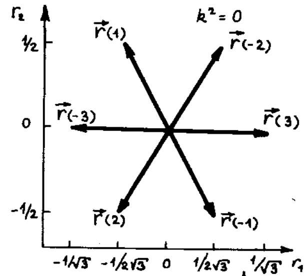


Рис. 2а.

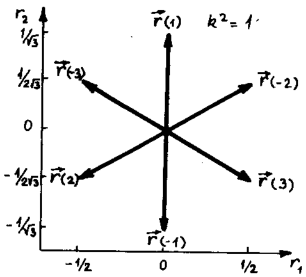


Рис. 2б.

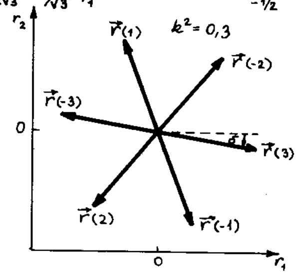


Рис. 2в.

Казимира группы $SU(3)$ второго и третьего порядков, операторы заряда и гиперзаряда и оператор, который является некоторой линейной комбинацией операторов Казимира всех трёх подгрупп $SU(2)$ группы $SU(3)$ , т.е. оператор вида

$$
a_1 \hat{C}_U^{(2)} + a_2 \hat{C}_V^{(2)} + a_3 \hat{C}_T^{(2)}, \quad a_i = const. \tag{35}
$$

Там же показано, что оператор (35) эквивалентен оператору

$$
k'^2 \hat{C}_T^{(2)} - k^2 \hat{C}_U^{(2)} = \lambda_{QY(\tau)}(k^2) \tag{36}
$$

с собственным значением $\lambda_{QY(\tau)}(k^2)$ , которое различает состояния с одинаковыми $Q$ и $Y$ и которое зависит только от одного параметра $0 \le k^2 \le 1$ , причём

$$
k^2 = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}. \tag{37}
$$

В частном случае $a_1 = a_2$, ( $k^2 = 0$ ) оператор (36) эквивалентен оператору квадрата изотопического спина (т.е. оператору Казимира подгруппы $SU_T(2)$ ) и его собственное значение $\lambda_{QY(\tau)}(0) = T(T+1)$.
Следовательно, мы можем утверждать, что изоморфным алгебрам Ли группы $SU(3)$ с разными $0 \leq \delta \leq \pi/6$ (т.е. разными $k^2$ ) соответствуют разные (неэквивалентные) физические состояния, различаемые собственными значениями оператора (36). Таким образом, группа движения корневого пространства имеет реальный физический смысл.

Отметим ещё, что наблюдаемыми величинами для всех изоморфных алгебр с коммутирующими элементами вида (I9) являются их определённые линейные комбинации, соответствующие заряду и гиперзаряду, т.е.

$$\lambda_Q = \frac{1}{2}(a_1\lambda'_3 + b_1\lambda'_8), \qquad (38)$$
$$\lambda_Y = \frac{1}{2}(a_3\lambda'_3 + b_3\lambda'_8).$$

Продемонстрируем теперь применение алгебры обобщённых матриц Гелл-Манна к расчёту реального процесса с участием барионов и мезонов.

Барион-мезонные константы связи

Исходя из сказанного выше, рассмотрим теперь процесс с участием октета барионов и октета псевдоскалярных мезонов, т.е. процесс

$$B \longrightarrow B + P. \qquad (39)$$

Для этого процесса выпишем явный вид барион-мезонных констант связи и ряд соотношений между ними.



Сначала мы должны выписать ненулевые компоненты полностью антисимметричных структурных постоянных $f'_{ijk}(\delta)$ и полностью симметричных постоянных $d'_{ijk}(\delta)$ для алгебры Ли обобщённых матриц Гелл-Манна $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_8$, где $\lambda'_3$ и $\lambda'_8$ определены формулами (I9) и (25). Непосредственно используя формулы (4), находим ненулевые компоненты $f'_{ijk}(\delta)$ и $d'_{ijk}(\delta)$, которые приведены в таблицах I и 2. Графическая зависимость этих ненулевых компонент от угла поворота корневой диаграммы $\delta$ в пределах его изменения от нуля до $\pi/2$ приведена на рисунках 3 и 4 соответственно.

Как известно, для описания октетов барионов и псевдоскалярных мезонов можно пользоваться восьмимерными векторами $B_i$ и $P_i$ ( $i =$ I, 2, ......8) или спинорами $B^\alpha_\beta$ и $P^\alpha_\beta$. Октет барионов представляется в виде матрицы (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование)

$$(B)^\alpha_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\lambda'_i(k_8^2)\right]^\alpha_\beta B_i = \qquad (40)$$
$$\begin{pmatrix} \frac{a_1(k_8^2)}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{b_1(k_8^2)}{\sqrt{2}}\Lambda^0 & \Sigma^+ & N^+ \\ \Sigma^- & \frac{a_2(k_8^2)}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{b_2(k_8^2)}{\sqrt{2}}\Lambda^0 & N^0 \\ \Xi^- & \Xi^0 & \frac{a_3(k_8^2)}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{b_3(k_8^2)}{\sqrt{2}}\Lambda^0 \end{pmatrix},$$

и аналогично выглядит также октет псевдоскалярных мезонов

$$(P)^\alpha_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\lambda'_i(k_P^2)\right]^\alpha_\beta P_i = \qquad (4I)$$

Таблица I

| $ijk$ | $f'_{ijk}(\delta)$ | $k^2=0$ $\delta=0$ | $k^2=1$ $\delta=\pi/6$ | $ijk$ | $f'_{ijk}(\delta)$ | $k^2=0$ $\delta=0$ | $k^2=1$ $\delta=\pi/6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 123 | $-\sqrt{3}/2 \cdot b_3 = \cos\delta$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | 257 | $1/2$ | $1/2$ | $1/2$ |
| 128 | $\sqrt{3}/2 \cdot a_3 = -\sin\delta$ | 0 | $-1/2$ | 345 | $\sqrt{3}/2 \cdot b_2 = \cos(\pi/3-\delta)$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ |
| 147 | $1/2$ | $1/2$ | $1/2$ | 367 | $-\sqrt{3}/2 \cdot b_1 = -\cos(\pi/3+\delta)$ | $-1/2$ | 0 |
| 156 | $-1/2$ | $-1/2$ | $-1/2$ | 458 | $-\sqrt{3}/2 \cdot a_2 = \sin(\pi/3-\delta)$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ |
| 246 | $1/2$ | $1/2$ | $1/2$ | 678 | $\sqrt{3}/2 \cdot a_1 = \sin(\pi/3+\delta)$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |

Таблица 2

| $ijk$ | $d'_{ijk}(\delta)$ | $k^2=0$ $\delta=0$ | $k^2=1$ $\delta=\pi/6$ | $ijk$ | $d'_{ijk}(\delta)$ | $k^2=0$ $\delta=0$ | $k^2=1$ $\delta=\pi/6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 113 | $-1/2 \cdot a_3 = 1/\sqrt{3}\sin\delta$ | 0 | $\sqrt{3}/6$ | 344 | $-1/2 \cdot a_2 = 1/\sqrt{3}\sin(\pi/3-\delta)$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/6$ |
| 118 | $-1/2 \cdot b_3 = 1/\sqrt{3}\cos\delta$ | $\sqrt{3}/3$ | $1/2$ | 355 | $-1/2 \cdot a_2 = 1/\sqrt{3}\sin(\pi/3-\delta)$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/6$ |
| 146 | $1/2$ | $1/2$ | $1/2$ | 366 | $-1/2 \cdot a_1 = -1/\sqrt{3}\sin(\pi/3+\delta)$ | $-1/2$ | $-\sqrt{3}/3$ |
| 157 | $1/2$ | $1/2$ | $1/2$ | 377 | $-1/2 \cdot a_1 = -1/\sqrt{3}\sin(\pi/3+\delta)$ | $-1/2$ | $-\sqrt{3}/3$ |
| 223 | $-1/2 \cdot a_3 = 1/\sqrt{3}\sin\delta$ | 0 | $\sqrt{3}/6$ | 448 | $-1/2 \cdot b_2 = -1/\sqrt{3}\cos(\pi/3-\delta)$ | $-\sqrt{3}/6$ | $-1/2$ |
| 228 | $-1/2 \cdot b_3 = 1/\sqrt{3}\cos\delta$ | $\sqrt{3}/3$ | $1/2$ | 558 | $-1/2 \cdot b_2 = -1/\sqrt{3}\cos(\pi/3-\delta)$ | $-\sqrt{3}/6$ | $-1/2$ |
| 247 | $-1/2$ | $-1/2$ | $-1/2$ | 668 | $-1/2 \cdot b_1 = -1/\sqrt{3}\cos(\pi/3+\delta)$ | $-\sqrt{3}/6$ | 0 |
| 256 | $1/2$ | $1/2$ | $1/2$ | 778 | $-1/2 \cdot b_1 = -1/\sqrt{3}\cos(\pi/3+\delta)$ | $-\sqrt{3}/6$ | 0 |
| 333 | $3/2 \cdot a_1 a_2 a_3 = 1/\sqrt{3}\sin 3\delta$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 883 | $-3/2 \cdot a_1 a_2 a_3 = -1/\sqrt{3}\sin 3\delta$ | 0 | $-\sqrt{3}/3$ |
| 338 | $-3/2 \cdot b_1 b_2 b_3 = 1/\sqrt{3}\cos 3\delta$ | $\sqrt{3}/3$ | 0 | 888 | $3/2 \cdot b_1 b_2 b_3 = -1/\sqrt{3}\cos 3\delta$ | $-\sqrt{3}/3$ | 0 |



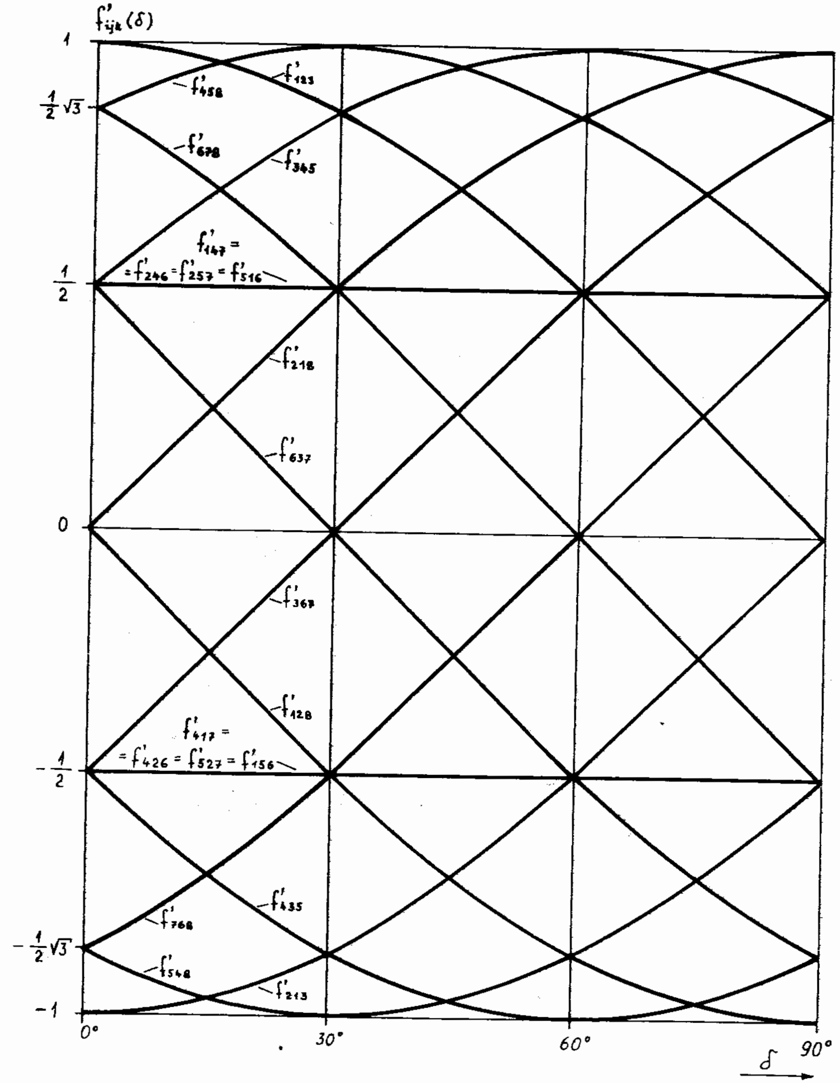


Рис. 3

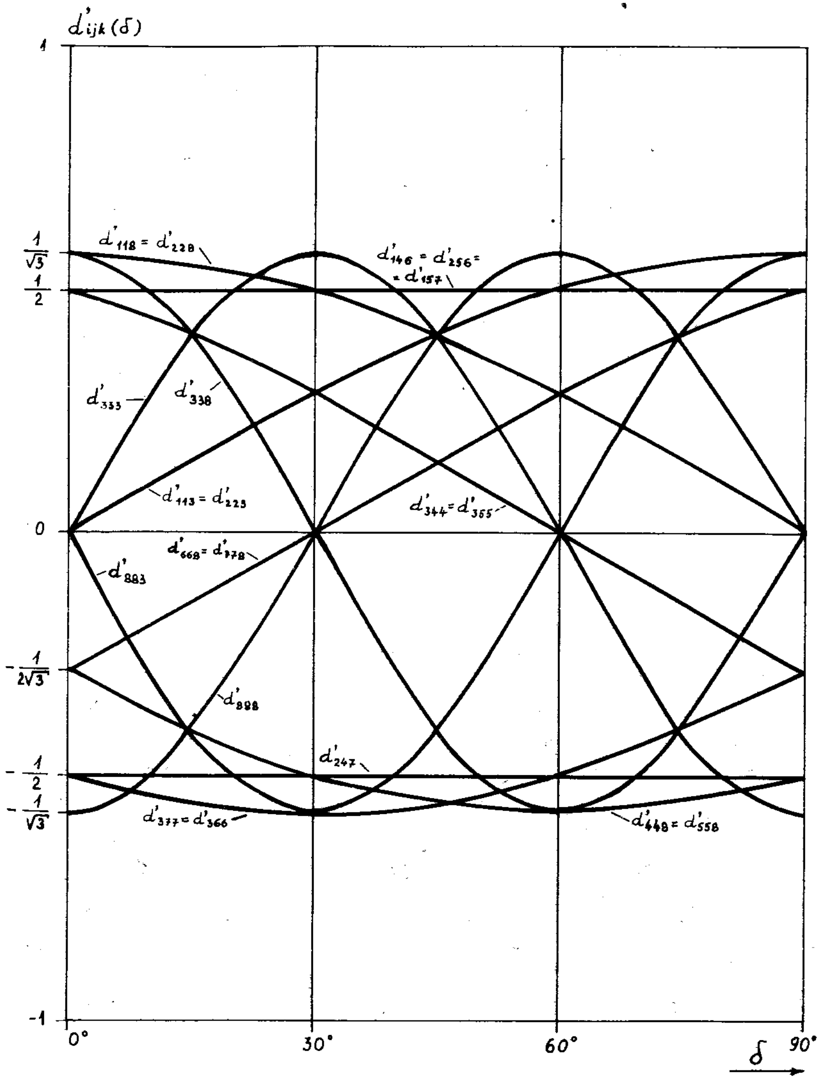


Рис. 4



$$= \begin{pmatrix} \frac{a_1(k_p^2)}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{b_1(k_p^2)}{\sqrt{2}}\eta^0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{a_2(k_p^2)}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{b_2(k_p^2)}{\sqrt{2}}\eta^0 & K^0 \\ K^- & \tilde{K}^0 & \frac{a_3(k_p^2)}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{b_3(k_p^2)}{\sqrt{2}}\eta^0 \end{pmatrix},$$

причем явный вид $a_i(k^2)$ и $b_i(k^2)$ дается формулами (27). Вернемся теперь к процессу (34). Как известно /6/, амплитуда этого процесса состоит из двух независимых комбинаций:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} g_f \left[\bar{B}^k_\ell B^i_k - \bar{B}^i_k B^k_\ell\right] \bar{P}^\ell_i + \frac{1}{\sqrt{2}} g_d \left[\bar{B}^k_\ell B^i_k + \bar{B}^i_k B^k_\ell\right] \bar{P}^\ell_i . \qquad (42)$$

Преобразуем выражение (42) с помощью (40) и (41) при помощи соотношения (2) к следующему виду:

$$M = \frac{i}{2} g_f f'_{ijk}(k_B^2)\, Sp\left[\lambda'_k(k_B^2)\lambda'_\ell(k_p^2)\right] \bar{B}_i B_j P_\ell + \frac{1}{2} g_d d'_{ijk}(k_B^2)\, Sp\left[\lambda'_k(k_B^2)\lambda'_\ell(k_p^2)\right] \bar{B}_i B_j P_\ell . \qquad (43)$$

Отличные от нуля и двойки шпуры произведений $\lambda'$ -матриц в выражении (43) равны

$$\begin{aligned} Sp\left[\lambda'_3(k_B^2)\lambda'_3(k_p^2)\right] &= 2\cos(\delta_B - \delta_p), \\ Sp\left[\lambda'_8(k_B^2)\lambda'_8(k_p^2)\right] &= 2\cos(\delta_B - \delta_p), \\ Sp\left[\lambda'_3(k_B^2)\lambda'_8(k_p^2)\right] &= 2\sin(\delta_B - \delta_p), \\ Sp\left[\lambda'_8(k_B^2)\lambda'_3(k_p^2)\right] &= -2\sin(\delta_B - \delta_p). \end{aligned} \qquad (44)$$

Окончательно получаем для матричного элемента (42) следующее довольно длинное выражение:

$$
\begin{aligned}
M = {} & \frac{g_d}{\sqrt{3}} \sin(2\delta_B + \delta_P)\left[\bar{\Sigma}^0\Sigma^0\pi^0 - \bar{\Lambda}^0\Lambda^0\pi^0 - \bar{\Sigma}^0\Lambda^0\eta^0 - \bar{\Lambda}^0\Sigma^0\eta^0\right] + \\
& + \frac{g_d}{\sqrt{3}} \cos(2\delta_B + \delta_P)\left[\bar{\Sigma}^0\Sigma^0\eta^0 - \bar{\Lambda}^0\Lambda^0\eta^0 + \bar{\Sigma}^0\Lambda^0\pi^0 + \bar{\Lambda}^0\Sigma^0\pi^0\right] + \\
& + \left[\frac{g_d}{\sqrt{3}} \sin\left(\delta_P - \frac{2\pi}{3}\right) - g_f \cos\left(\delta_P - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \bar{N}^0 N^0 \pi^0 + \\
& + \left[\frac{g_d}{\sqrt{3}} \sin\left(\delta_P - \frac{2\pi}{3}\right) + g_f \cos\left(\delta_P - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \bar{\Xi}^0 \Xi^0 \pi^0 + \\
& + \left[\frac{g_d}{\sqrt{3}} \cos\left(\delta_P - \frac{2\pi}{3}\right) + g_f \sin\left(\delta_P - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \bar{N}^0 N^0 \eta^0 + \\
& + \left[\frac{g_d}{\sqrt{3}} \cos\left(\delta_P - \frac{2\pi}{3}\right) - g_f \sin\left(\delta_P - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \bar{\Xi}^0 \Xi^0 \eta^0 + \\
& + \left[\frac{g_d}{\sqrt{3}} \sin\left(\delta_P - \frac{4\pi}{3}\right) + g_f \cos\left(\delta_P - \frac{4\pi}{3}\right)\right] \bar{N}^+ N^+ \pi^0 + \qquad (45) \\
& + \left[\frac{g_d}{\sqrt{3}} \sin\left(\delta_P - \frac{4\pi}{3}\right) - g_f \cos\left(\delta_P - \frac{4\pi}{3}\right)\right] \bar{\Xi}^- \Xi^- \pi^0 + \\
& + \left[\frac{g_d}{\sqrt{3}} \cos\left(\delta_P - \frac{4\pi}{3}\right) - g_f \sin\left(\delta_P - \frac{4\pi}{3}\right)\right] \bar{N}^+ N^+ \eta^0 + \\
& + \left[\frac{g_d}{\sqrt{3}} \cos\left(\delta_P - \frac{4\pi}{3}\right) + g_f \sin\left(\delta_P - \frac{4\pi}{3}\right)\right] \bar{\Xi}^- \Xi^- \eta^0 + \\
& + \left[\frac{g_d}{\sqrt{3}} \sin\delta_P - g_f \cos\delta_P\right] \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ \pi^0 + \\
& + \left[\frac{g_d}{\sqrt{3}} \sin\delta_P + g_f \cos\delta_P\right] \bar{\Sigma}^- \Sigma^- \pi^0 + \\
& + \left[\frac{g_d}{\sqrt{3}} \cos\delta_P + g_f \sin\delta_P\right] \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ \eta^0 + \\
& + \left[\frac{g_d}{\sqrt{3}} \cos\delta_P - g_f \sin\delta_P\right] \bar{\Sigma}^- \Sigma^- \eta^0 +
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{2}}(g_f + g_d)\left[\bar{\Sigma}^+ N^+ \tilde{K}^0 + \bar{N}^+ \Sigma^+ K^0 + \bar{\Sigma}^- N^0 K^- + \bar{N}^0 \Sigma^- K^+ + \bar{\Xi}^- \Xi^0 \pi^- + \bar{\Xi}^0 \Xi^- \pi^+\right] + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}}(g_d - g_f)\left[\bar{\Xi}^- \Sigma^- \tilde{K}^0 + \bar{\Sigma}^- \Xi^- K^0 + \bar{\Xi}^0 \Sigma^+ K^- + \bar{\Sigma}^+ \Xi^0 K^+ + \bar{N}^0 N^+ \pi^- + \bar{N}^+ N^0 \pi^+\right] + \\
& + \left[\sqrt{3}\, g_d \sin\left(\delta_B - \frac{2\pi}{3}\right) - g_f \cos\left(\delta_B - \frac{2\pi}{3}\right)\right]\left(\bar{\Xi}^0 \Sigma^0 \tilde{K}^0 + \bar{\Sigma}^0 \Xi^0 K^0\right) + \\
& + \left[\sqrt{3}\, g_d \sin\left(\delta_B - \frac{2\pi}{3}\right) + g_f \cos\left(\delta_B - \frac{2\pi}{3}\right)\right]\left(\bar{\Sigma}^0 N^0 \tilde{K}^0 + \bar{N}^0 \Sigma^0 K^0\right) + \\
& + \left[\sqrt{3}\, g_d \cos\left(\delta_B - \frac{2\pi}{3}\right) - g_f \sin\left(\delta_B - \frac{2\pi}{3}\right)\right]\left(\bar{\Lambda}^0 N^0 \tilde{K}^0 + \bar{N}^0 \Lambda^0 K^0\right) + \\
& + \left[\sqrt{3}\, g_d \cos\left(\delta_B - \frac{2\pi}{3}\right) + g_f \sin\left(\delta_B - \frac{2\pi}{3}\right)\right]\left(\bar{\Xi}^0 \Lambda^0 \tilde{K}^0 + \bar{\Lambda}^0 \Xi^0 K^0\right) + \\
& + \left[\sqrt{3}\, g_d \sin\left(\delta_B - \frac{4\pi}{3}\right) - g_f \cos\left(\delta_B - \frac{4\pi}{3}\right)\right]\left(\bar{\Sigma}^0 N^+ K^- + \bar{N}^+ \Sigma^0 K^+\right) + \\
& + \left[\sqrt{3}\, g_d \sin\left(\delta_B - \frac{4\pi}{3}\right) + g_f \cos\left(\delta_B - \frac{4\pi}{3}\right)\right]\left(\bar{\Xi}^- \Sigma^0 K^- + \bar{\Sigma}^0 \Xi^- K^+\right) + \qquad (45) \\
& + \left[\sqrt{3}\, g_d \cos\left(\delta_B - \frac{4\pi}{3}\right) - g_f \sin\left(\delta_B - \frac{4\pi}{3}\right)\right]\left(\bar{\Xi}^- \Lambda^0 K^- + \bar{\Lambda}^0 \Xi^- K^+\right) + \\
& + \left[\sqrt{3}\, g_d \cos\left(\delta_B - \frac{4\pi}{3}\right) + g_f \sin\left(\delta_B - \frac{4\pi}{3}\right)\right]\left(\bar{\Lambda}^0 N^+ K^- + \bar{N}^+ \Lambda^0 K^+\right) + \\
& + \left[\sqrt{3}\, g_d \sin\delta_B - g_f \cos\delta_B\right]\left(\bar{\Sigma}^- \Sigma^0 \pi^- + \bar{\Sigma}^0 \Sigma^- \pi^+\right) + \\
& + \left[\sqrt{3}\, g_d \sin\delta_B + g_f \cos\delta_B\right]\left(\bar{\Sigma}^0 \Sigma^+ \pi^- + \bar{\Sigma}^+ \Sigma^0 \pi^+\right) + \\
& + \left[\sqrt{3}\, g_d \cos\delta_B - g_f \sin\delta_B\right]\left(\bar{\Lambda}^0 \Sigma^+ \pi^- + \bar{\Sigma}^+ \Lambda^0 \pi^+\right) + \\
& + \left[\sqrt{3}\, g_d \cos\delta_B + g_f \sin\delta_B\right]\left(\bar{\Sigma}^- \Lambda^0 \pi^- + \bar{\Lambda}^0 \Sigma^- \pi^+\right).
\end{aligned}
$$

Из матричного элемента (45) непосредственно видно, как выражаются отдельные барион-мезонные константы связи через четыре параметра $g_f$, $g_d$, $\delta_B$ и $\delta_P$, и поэтому их здесь выписывать не будем. Для 56 констант связи можно выписать ряд правил сумм, используя соотношения между $a_i(\delta)$ и $b_i(\delta)$. Всего имеется 24 независимых правила сумм, и такими, например, являются следующие равенства для сумм квадратов барион-мезонных констант связи:

$$
\begin{aligned}
& g^2_{N^+N^+\pi^0} + g^2_{N^0N^0\pi^0} + g^2_{\Sigma^+\Sigma^+\pi^0} = g^2_{\Xi^-\Xi^-\pi^0} + g^2_{\Xi^0\Xi^0\pi^0} + g^2_{\Sigma^-\Sigma^-\pi^0} = \\
&= g^2_{N^+N^+\eta^0} + g^2_{N^0N^0\eta^0} + g^2_{\Sigma^+\Sigma^+\eta^0} = g^2_{\Xi^-\Xi^-\eta^0} + g^2_{\Xi^0\Xi^0\eta^0} + g^2_{\Sigma^-\Sigma^-\eta^0} = \\
&= g^2_{N^+N^+\pi^0} + g^2_{N^+N^+\eta^0} = g^2_{N^0N^0\pi^0} + g^2_{N^0N^0\eta^0} = g^2_{\Sigma^+\Sigma^+\pi^0} + g^2_{\Sigma^+\Sigma^+\eta^0} = \\
&= g^2_{\Xi^-\Xi^-\pi^0} + g^2_{\Xi^-\Xi^-\eta^0} = g^2_{\Xi^0\Xi^0\pi^0} + g^2_{\Xi^0\Xi^0\eta^0} = g^2_{\Sigma^-\Sigma^-\pi^0} + g^2_{\Sigma^-\Sigma^-\eta^0} = \\
&= g^2_{\Sigma^0\Sigma^0\pi^0} + g^2_{\Sigma^0\Sigma^0\eta^0} + \frac{1}{2}\left( g_{\Sigma^+N^+\tilde{K}^0} - g_{\Xi^-\Sigma^-\tilde{K}^0} \right)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& g^2_{\Xi^0\Sigma^0\tilde{K}^0} + g^2_{\Sigma^0N^+K^-} + g^2_{\Sigma^-\Sigma^0\pi^-} = g^2_{\Xi^-\Sigma^0K^-} + g^2_{\Sigma^0N^0\tilde{K}^0} + g^2_{\Sigma^0\Sigma^+\pi^-} = \\
&= g^2_{\Lambda^0N^0\tilde{K}^0} + g^2_{\Xi^-\Lambda^0K^-} + g^2_{\Lambda^0\Sigma^+\pi^-} = g^2_{\Xi^0\Lambda^0\tilde{K}^0} + g^2_{\Lambda^0N^+K^-} + g^2_{\Sigma^-\Lambda^0\pi^-} = \\
&= g^2_{\Xi^0\Sigma^0\tilde{K}^0} + g^2_{\Xi^0\Lambda^0\tilde{K}^0} = g^2_{\Sigma^0N^+K^-} + g^2_{\Lambda^0N^+K^-} = g^2_{\Sigma^-\Sigma^0\pi^-} + g^2_{\Sigma^-\Lambda^0\pi^-} = \\
&= g^2_{\Sigma^0N^0\tilde{K}^0} + g^2_{\Lambda^0N^0\tilde{K}^0} = g^2_{\Xi^-\Sigma^0K^-} + g^2_{\Xi^-\Lambda^0K^-} = g^2_{\Sigma^0\Sigma^+\pi^-} + g^2_{\Lambda^0\Sigma^+\pi^-} = \\
&= 9\left( g^2_{\Sigma^0\Sigma^0\pi^0} + g^2_{\Sigma^0\Sigma^0\eta^0} \right) + \frac{1}{2}\left( g_{\Sigma^+N^+\tilde{K}^0} - g_{\Xi^-\Sigma^-\tilde{K}^0} \right)^2,
\end{aligned}
\tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
& 3\left( g^2_{\Xi^0\Sigma^0\tilde{K}^0} + g^2_{\Sigma^0N^+K^-} + g^2_{\Sigma^-\Sigma^0\pi^-} - g^2_{N^+N^+\pi^0} - g^2_{N^0N^0\pi^0} - g^2_{\Sigma^+\Sigma^+\pi^0} \right) = \\
&= 4\left( g_{\Sigma^+N^+\tilde{K}^0} + g_{\Xi^-\Sigma^-\tilde{K}^0} \right)^2 = 24\left( g^2_{\Sigma^0\Sigma^0\pi^0} + g^2_{\Sigma^0\Sigma^0\eta^0} \right).
\end{aligned}
$$



Магнитные моменты

Рассмотрим коротко магнитные моменты барионного октета с точки зрения обобщённой алгебры матриц Гелл-Манна. Существенно новых результатов ожидать нельзя, и отличие от результатов, полученных раньше /7/, мы получим только для магнитных моментов $\Lambda^0$ и $\Sigma^0$ частиц. Итак, общий вид матричного элемента октупольного тока $(V_\mu)^\alpha_\beta$ между состояниями барионов /2/ ( $q = p_1 - p_2$ ) имеет вид

$$
\begin{aligned}
\langle p_2 | (V_\mu)^\alpha_\beta | p_1 \rangle = {} & i F^f(q^2) \cdot f'_{ijk}(k_B^2) \cdot (\lambda'_k)^\alpha_\beta \bar{B}_i B_j + \\
& + F^d(q^2) \left[ \frac{2}{3} (\delta_{ij})^\alpha_\beta + d'_{ijk}(k_B^2) (\lambda'_k)^\alpha_\beta \right] \bar{B}_i B_j ,
\end{aligned}
\tag{47}
$$

где $F(q^2)$ выражается через формфакторы $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$ ( $f$ и $d$ типа) следующим образом:

$$
F(q^2) = \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) F_1(q^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2M} u(p_1) F_2(q^2). \tag{48}
$$

Подставив в выражение для матричного элемента $(V_\mu)^1_1$ постоянные $f'_{ijk}(k_B^2)$ и $d'_{ijk}(k_B^2)$ из таблиц I и 2, получаем

$$
\begin{aligned}
\langle p_2 | (V_\mu)^1_1 | p_1 \rangle = {} & F^f(q^2) \left[ \bar{N}^+ N^+ + \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ - \bar{\Sigma}^- \Sigma^- - \bar{\Xi}^- \Xi^- \right] + \\
& F^d(q^2) \left[ \frac{1}{3} \bar{N}^+ N^+ - \frac{2}{3} \bar{N}^0 N^0 + \left( a_1^2 - \frac{2}{3} \right) \bar{\Lambda}^0 \Lambda^0 + \frac{1}{3} \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \right. \\
& \left. + \left( b_1^2 - \frac{2}{3} \right) \bar{\Sigma}^0 \Sigma^0 + \frac{1}{3} \bar{\Sigma}^- \Sigma^- - \frac{2}{3} \bar{\Xi}^0 \Xi^0 + \frac{1}{3} \bar{\Xi}^- \Xi^- + a_1 b_1 \left( \bar{\Sigma}^0 \Lambda^0 + \bar{\Lambda}^0 \Sigma^0 \right) \right].
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Отсюда получаем формфакторы октета барионов, выраженные через формфакторы $f$ и $d$ типа и параметр $k_B^2$.

$$F_i^{N^+} = F_i^f + \frac{1}{3} F^d , \quad F_i^{N^0} = -\frac{2}{3} F_i^d , \qquad F_i^{\Lambda^0} = \left(a_1^2 - \frac{2}{3}\right) F_i^d ,$$

$$F_i^{\Sigma^+} = F_i^f + \frac{1}{3} F_i^d , \quad F_i^{\Sigma^0} = \left(b_1^2 - \frac{2}{3}\right) F_i^d , F_i^{\Sigma^-} = -F_i^f + \frac{1}{3} F_i^d , \qquad (50)$$

$$F_i^{\Xi^0} = -\frac{2}{3} F_i^d , \qquad F_i^{\Xi^-} = -F_i^f + \frac{1}{3} F_i^d , F_i^{\Sigma^0\Lambda^0} = a_1 b_1 F_i^d .$$

Из выражений (50), в частности при $q^2 = 0$ , следуют соотношения для магнитных моментов октета барионов

$$\mu_{N^+} = \mu_{\Sigma^+} , \quad \mu_{N^0} = \mu_{\Xi^0} , \quad \mu_{\Sigma^-} = \mu_{\Xi^-} , \quad \mu_{\Lambda^0} = -\mu_{\Sigma^0} . \qquad (51)$$

Выражая все магнитные моменты через магнитные моменты нуклонов $\mu_{N^+}$ и $\mu_{N^0}$ , имеем

$$\mu_{\Lambda^0} = \frac{1 + k_B^2}{2\sqrt{1 - k_B^2 + k_B^4}} \mu_{N^0} , \quad \mu_{\Sigma^+} = \mu_{N^+} , \quad \mu_{\Sigma^-} = -(\mu_{N^+} + \mu_{N^0}) ,$$

$$\mu_{\Sigma^0} = -\frac{1 + k_B^2}{2\sqrt{1 - k_B^2 + k_B^4}} \mu_{N^0} , \quad \mu_{\Xi^0} = \mu_{N^0} , \quad \mu_{\Xi^-} = -(\mu_{N^+} + \mu_{N^0}) , \qquad (52)$$

$$F_2^{\Sigma^0\Lambda^0}(0) = \frac{1 - k_B^2}{\sqrt{3}\sqrt{1 - k_B^2 + k_B^4}} \mu_{N^0} .$$

Заключение

В данной работе показано, как необходимо изменить алгебру группы $SU(3)$ , чтобы в рамках этой группы естественным образом рассматривать сильные и электромагнитные взаимодействия как одно взаимодействие. Хотелось бы подчеркнуть ещё раз тот факт, что изоморфные с математической точки зрения алгебры группы $SU(3)$ описывают неэквивалентные физические действительности. Считаем необходимым подчеркнуть лишний раз, что в случае присутствия электромагнитных взаимодействий также существует сохра-



няющееся квантовое число – собственное значение оператора (36), которое при $k^2 = 0$ переходит в квадрат изотопического спина. Как указывается в данной работе, движение корневого пространства имеет реальный физический смысл, т.е. поворот корневой диаграммы алгебры Ли группы $SU(3)$ означает включение некоторого взаимодействия (электромагнитного), которое нарушает изотопическую инвариантность.

На основе модели $SU(3)$ с алгеброй обобщённых матриц Гелл-Манна здесь рассчитаны барион-мезонные постоянные связи в трилинейном лагранжиане взаимодействия и рассмотрены магнитные моменты октета барионов. Мы могли бы обобщить практически все результаты, которые получены для модели $SU(3)$ с изотопической инвариантностью, такие как распады резонансов, соотношения между вероятностями, амплитуды разных процессов рассеяния и рождения, ограничения на сечения и т.д. Объём этой статьи не позволяет всё это рассматривать здесь. К тому же для конкретных расчётов необходимо сконструировать коэффициенты Клебша-Гордана для произведения представлений группы $SU(3)$ с разными $k^2$ , которые являются некоторыми функциями этих параметров, а не числами, как это имеет место в случае изотопической инвариантности.

Литература


1. M.Gell-Mann. Report CTSL-20, 1961.
   Y.Ne'eman.Nucl.Phys., 26, 222 (1961).
2. R.E.Behrends, J.Dreitlein, C.Fronsdal, W.Lee.
   Rev.Mod.Phys., 34, 1 (1962). (Перевод в кн. Теория групп и элементарные частицы, Мир, Москва, I967);
   Нгуен Ван Хьеу. Лекции по унитарной симметрии элементарных частиц. Атомиздат, Москва, I967.
3. C.A.Levinson, H.J.Lipkin, S.Meshkov. Phys.Lett., 1,44(1962); Nuovo Cim., 23, 236 (1962); Phys.Rev.Lett., 10, 361 (1963).
4. И.Лукач. ЯФ, I8, 202 (I973).
5. И.Лукач, Л.Тотх. ЯФ, I7, I337 (I973).
6. Y.Ne'eman. Algebraic theory of particle physics.
   New York - Amsterdam, Benjamin, 1967;
   Н.Ф.Нелипа. Введение в теорию сильновзаимодействующих частиц. Атомиздат, Москва, I970.
7. S.Coleman, S.L.Glashow. Phys.Rev.Lett., 6, 423 (1961).



Рукопись поступила в издательский отдел
9 июля I975 года.