сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р2-90-90

И. Лукач

О РАЗЛОЖЕНИИ АЛГЕБРЫ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

1990

Четырехмерные евклидовы и псевдоевклидовы пространства с постоянной метрикой, а также связанные с ними десятипараметрические группы движений, оставляющие инвариантным расстояние между двумя точками этих пространств, играют в физике исключительную роль. Обычно евклидовы и различные псевдоевклидовы пространства рассматриваются отдельно и самостоятельно, после того как постоянная метрика этих пространств при помощи некоторого центроаффинного преобразования приведена к определенной канонической форме. Метод диагонализации разных квадратичных форм в математике хорошо известен (см., например, [1,2]) и оправдан с практической точки зрения при решении конкретных физических проблем. Однако метод диагонализации квадратичных форм имеет один существенный недостаток: диагонализация любой квадратики означает переход в специальную систему координат, и, как правило, посредством этого перехода мы теряем правильную тензорную запись многих (если даже не всех) величин.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим произвольную однородную квадратичную форму $f_0(x)$ в четырехмерном действительном пространстве R_4 с точками, определяемыми контравариантными векторами X^i:

$$f\,(X) = c_{ik}\, X^i X^k \,, \qquad i,k = 1,2,3,4, \tag{1}$$

где ковариантный тензор c_{ik} является некоторой постоянной матрицей с отличным от нуля определителем, то есть $c_0 = \det|c_{ik}| \neq 0$. Условимся, как это обычно принято, во всех выражениях по одинаковым верхним (контравариантным)и нижним (ковариантным) индексам проводить суммирование, причем операцию суммирования только по верхним или только по нижним индексам будем рассматривать как операцию, не имеющую смысла. Кроме того, условимся, что величины с индексом нуль (внизу или наверху) будут обозначать постоянные величины или инварианты. Согласно вышесказанному квадрика $f_0(X)$ в виде (1) представляет собой инвариант.

С физической точки зрения квадратичная форма (1) определяет в произвольной косоугольной системе координат с постоянной метрикой c_{ik} квадрат расстояния точки с координатами (X^1, X^2, X^3, X^4) от начала координат, находящегося в точке (0,0, 0, 0). Диагонализация квадратичной формы (1) при помощи соответствующего центроаффинного преобразования с постоянными коэффициентами

$$X'^i = A^i_k X^k, \quad A_0 = \det|A^i_k| \neq 0$$

приводит к разным типам евклидовых и псевдоевклидовых пространств, определяемым соответствующими сигнатурами. В зависимости от сигнатуры диагонализированной квадратичной формы различаем соответствующие шестипараметрические группы движений (вращений или псевдовращений) этих пространств, которые обычно обозначаются как SO(p,q), где p, q обозначают соответственно число плюсов и минусов в сигнатуре квадратичной формы. Таким образом, в четырехмерном пространстве имеем следующие типы диагональных квадратичных форм и соответствующих им групп движений:

$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 = f_0$ – группа четырехмерных вращений SO(4)

$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - (X^4)^2 = f_0$ – пространственноподобная группа Лоренца SO(3,1)

(2)

$(X^1)^2 + (X^2)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 = f_0$ – группа SO(2,2)

$(X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 = f_0$ – времениподобная группа Лоренца SO(1,3)

Классификация квадратичных форм (1) по сигнатурам на самом деле означает классификацию по некоторой системе инвариантов, составленных из первоначальных коэффициентов данной квадратичной формы (то есть из составляющих метрического тензора c_{ik}). При изучении преобразований однородных четырехмерных квадрик существенную роль играет не сигнатура квадратичной формы, а именно система инвариантов, сохраняющихся при данных преобразованиях. Следовательно, при исследованиях, например, групп движений и геометрических свойств их групповых пространств, а также при изучении алгебр соответствующих групп преобразований нет необходимости исходить из диагональных видов квадратичных форм (2). Без ограничений общности можно изучать преобразования в себя общей квадратичной формы (1) (то есть автоморфизм формы (1) относительно некоторых линейных преобразований) и соответствующую классификацию по системе инвариантов относительно центроаффинных преобразований (то есть диагонализацию) можно провести в окончательных формулах. Такой подход имеет по крайней мере два преимущества: во-первых, этот подход является единым по отношению к изучению всех четырехмерных однородных квадратичных форм и, во-вторых, этот подход позволяет использовать тензорный аппарат и тензорную запись всех формул с самого начала вычислений.

Итак, вместо различных групп преобразований SO(p,q), действующих в пространствах квадратичных форм с различными сигнатурами (2), будем рассматривать матричную группу преобразований общей квадратичной формы (1), которую будем обозначать как SQ(4). Группа SQ(4) порождает в пространстве R_4 преобразования вида

$$X'^{i} = t^{i}_{k}(u)\, X^{k}, \quad t_0 = \det |t^{i}_{k}(u)| = 1, \tag{3}$$

где $t^{i}_{k}(u)$ - матрица преобразований четырехмерного пространства, зависящая от некоторого набора групповых параметров (u). При этом инвариантность квадратичной формы (1) относительно преобразований (3) означает, что должны иметь место соотношения

$$c_{ij}\, t^{i}_{k}(u)\, t^{j}_{\ell}(u) = c_{k\ell}\,. \tag{4}$$

Соотношения (4) накладывают на шестнадцатимерное матричное многообразие $t^{i}_{k}(u)$ десять связей, и, таким образом, в общем случае матрица $t^{i}_{k}(u)$ зависит от шести независимых параметров (u) (групповых переменных). Из этого следует, что групповое пространство группы SQ(4) является шестимерным многообразием. В качестве независимых параметров (u) можно выбрать шесть составляющих некоторого антисимметрического ковариантного (или контравариантного) тензора второго ранга (бивектора) в четырехмерном пространстве. Явный вид матрицы преобразований $t^{i}_{k}(u)$ можно выписать, если использовать для нее форму Кэли /3/, которую формально можно записать в виде $(C \mp u)\cdot(C \pm u)^{-1}$, где через C обозначена матрица с элементами метрики c_{ik} и u есть матрица с элементами ковариантного бивектора $u_{ik} = -u_{ki}$. В данной работе, однако, нет необходимости выписывать явный вид матрицы $t^{i}_{k}(u)$, так как в дальнейшем нас будет интересовать только алгебра группы SQ(4).

Как известно, алгебра группы движений произвольной однородной четырехмерной квадратичной формы строится на шести антисимметрических генераторах $M_{ik} = -M_{ki}$, которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям /4/:

$$[M_{ij}, M_{k\ell}] = i\,(c_{ik} M_{j\ell} + c_{j\ell} M_{ik} - c_{i\ell} M_{jk} - c_{jk} M_{i\ell}) =$$

$$= \frac{i}{2}(c_{ik}\, \delta^{pq}_{j\ell} + c_{j\ell}\, \delta^{pq}_{ik} - c_{i\ell}\, \delta^{pq}_{jk} - c_{jk}\, \delta^{pq}_{i\ell})\, M_{pq} = \frac{1}{2} c^{pq}_{ij,k\ell} M_{pq}\,, \tag{5}$$

где коэффициенты c_{ik} совпадают с составляющими метрического тензора квадрики (1), $\delta^{pq}_{ik} = \delta^{p}_{i}\delta^{q}_{k} - \delta^{p}_{k}\delta^{q}_{i}$ - обобщенный символ

Кронекера и через $c^{pq}_{ij,k\ell}$ обозначены структурные постоянные рассматриваемой алгебры. Коммутационные соотношения (5) легко получить, если генераторы M_{ik} представить в виде

$$M_{ik} = -i\,(c_{ij}\, X^j \partial_k - c_{kj}\, X^j \partial_i\,), \qquad \partial_k = \frac{\partial}{\partial X^k}\,.$$

Хорошо также известно, что для группы четырехмерных вращений SO(4) (то есть, когда $c_{ik} \equiv \delta_{ik}$) генераторы группы M_{ik} можно представить при помощи двух трехмерных векторных операторов L_α, N_β (α, β = 1,2,3) на основе отношения

$$N_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & L_3 & -L_2 & N_1 \\ -L_3 & 0 & L_1 & N_2 \\ L_2 & -L_1 & 0 & N_3 \\ -N_1 & -N_2 & -N_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом генераторы L_α, N_β удовлетворяют коммутационным соотношениям, которые обычно записываются в виде [5]

$$[\,L_\alpha\,, L_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, L_\gamma\,,\ [\,N_\alpha\,, N_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, L_\gamma\,,\ [\,L_\alpha\,, N_\beta] = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, N_\gamma\,.$$

После введения двух новых векторных операторов $J_\alpha\,(\pm)$, которые являются, соответственно, половиной суммы и половиной разности генераторов L_α и N_α, то есть $J_\alpha\,(\pm) = 1/2\,(L_\alpha \pm N_\alpha)$, алгебра группы SO(4) (ASO(4)) в новом базисе приобретает вид

$$[\,J_\alpha\,(\pm)\,, J_\beta(\pm)\,] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, J_\gamma\,(\pm)\,, \qquad [\,J_\alpha\,(\pm)\,, J_\beta(\mp)\,] = 0. \tag{6}$$

Запись ASO (4) в форме (6) интерпретируется как разложение этой алгебры на две подалгебры (прямое произведение двух подалгебр), соответствующие двум группам трехмерных вращений, что обычно записывается в виде

$$ASO\,(4) = ASO\,(3) \oplus ASO\,(3)\,. \tag{7}$$

Аналогичное разложение алгебры, правда, с выходом в область комплексной переменной, можно написать также для алгебры группы Лоренца [6].

Отметим, однако, по крайней мере два важных недостатка при переходе от генераторов M_{ik} к генераторам L_α, N_β и представлению ASO(4) в виде (6). Во-первых, это потеря ковариантности формул в связи с тем, что от индексов в четырехмерном пространстве мы произвольно перешли к индексам в некотором трехмерном пространстве. Во-вторых, мы нарушили тензорную запись формул и перестали различать контравариантные и ковариантные индексы, а также мы перестали соблюдать соглашение о суммировании только по одному верхнему и одному нижнему индексу. В физике часто не делают различий между верхними и нижними индексами, ссылаясь на возможность перехода в ортогональную систему координат, которая стирает различия между контравариантными и ковариантными величинами. В литературе по физике, даже в случае, когда различаются верхние и нижние индексы, можно найти сколько угодно примеров, где произвольно манипулируют с положением индексов (например, соотношения типа $\gamma^i\gamma^j\gamma^k + \gamma^k\gamma^j\gamma^i = \delta_{ij}\,\gamma^k + \delta_{kj}\,\gamma^i$). Здесь, однако, нет возможности заняться доказательством неоправданности таких подходов во всех случаях. Некоторым подтверждением точки зрения, что в физике необходимо четко соблюдать ковариантную запись всех соотношений, будут формулы следующего раздела данной работы.

В связи с вышесказанным замечанием о важности четкого различия между контравариантными и ковариантными величинами отметим, что наряду с ковариантными генераторами $M_{k\ell}$ можно определить контравариантные генераторы M^{ij} при помощи соотношения

$$M^{ij} = c^{ik}\,c^{j\ell}\,M_{k\ell}\,. \tag{8}$$

Формула (8) означает, что для поднятия индексов тензорных величин в данной работе будем использовать постоянный обратный метрический тензор c^{ik}, для которого имеет место $c^{ik}c_{jk} = \delta^i_j$ (см. приложение). Генераторы M^{ij} удовлетворяют аналогичным коммутационным соотношениям, как и генераторы $M_{k\ell}$, в чем нетрудно убедиться:

$$[M^{ij}, M^{k\ell}] = i\,(c^{ik}M^{j\ell} + c^{j\ell}M^{ik} - c^{i\ell}M^{jk} - c^{jk}M^{i\ell}),$$

$$[M_{ij}, M^{k\ell}] = i\,(\delta^{kp}_{ij}\,c^{\ell q} + \delta^{\ell q}_{ij}\,c^{kp})\,M_{pq} = -i\,(\delta^{k\ell}_{ip}\,c_{jq} + \delta^{k\ell}_{jq}\,c_{ip})\,M^{pq}\,.$$

Известно также, что в четырехмерных пространствах индексы ковариантного (контравариантного) антисимметрического тензора второго ранга можно поднять (опустить) также при помощи полностью антисимметрического контравариантного (ковариантного) тензора четвертого ранга $\epsilon^{ijk\ell}$ ($\epsilon_{ijk\ell}$) и получить соответствующие так называемые дуальные антисимметрические тензоры. Определим дуальные контравариантные генераторы следующим образом:

$$\bar{M}^{ij} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0}} e^{ijk\ell} M_{k\ell} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0}} e^{ijk\ell} c_{km} c_{\ell n} M^{mn} = \frac{1}{2}\sqrt{\epsilon_0}\, c^{ik} c^{j\ell} e_{k\ell mn} M^{mn},$$

$$e^{ijk\ell} = \frac{1}{\sqrt{|c_0|}} \epsilon^{ijk\ell}, \quad e_{ijk\ell} = \sqrt{|c_0|}\, \epsilon_{ijk\ell},$$

где $\epsilon_0 = c_0/|c_0| = \pm 1$ и через c_0 обозначен определитель метрики c_{ik}, который может быть как положительным, так и отрицательным. Аналогично можно определить также дуальные ковариантные генераторы $\bar{M}_{ij}$, для которых имеем

$$\bar{M}_{ij} = c_{ik} c_{j\ell} \bar{M}^{k\ell} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0}} c_{ik} c_{j\ell} e^{k\ell mn} M_{mn},$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0}} c_{ik} c_{j\ell} e^{k\ell mn} \bar{M}_{mn} = \frac{1}{2}\sqrt{\epsilon_0}\, e_{ijk\ell}\, c^{km} c^{\ell n} \bar{M}_{mn}. \tag{9}$$

Преобразования (9) будем называть преобразованиями дуальности в четырехмерном пространстве и более подробно к ним вернемся в следующем разделе.

Выпишем для полноты также коммутационные соотношения для дуальных генераторов, которые также образуют алгебру. После несложных вычислений (см. приложение) получаем

$$[\bar{M}_{ij}, \bar{M}_{k\ell}] = i\sqrt{\epsilon_0}\, c^{mn} (e_{ijkm} \bar{M}_{n\ell} - e_{ij\ell m} \bar{M}_{nk}),$$

$$[\bar{M}^{ij}, \bar{M}^{k\ell}] = \frac{i}{\sqrt{\epsilon_0}} c_{mn} (e^{ijkm} \bar{M}^{n\ell} - e^{ij\ell m} \bar{M}^{nk}),$$

$$[\bar{M}_{ij}, \bar{M}^{k\ell}] = i\sqrt{\epsilon_0}\, e_{ijpq} (c^{kp} \bar{M}^{q\ell} - c^{p\ell} \bar{M}^{qk}),$$

$$[M_{ij}, \bar{M}^{k\ell}] = \frac{i}{\sqrt{\epsilon_0}} e^{k\ell pq} (c_{ip} M_{qj} - c_{jp} M_{qi}),$$

$$[M_{ij}, \bar{M}_{k\ell}] = -i\sqrt{\epsilon_0}\, c^{pq} (e_{k\ell ip} M_{qj} - e_{k\ell jp} M_{qi}),$$

$$[M^{ij}, \bar{M}^{k\ell}] = -\frac{i}{\sqrt{\epsilon_0}} c_{pq} (e^{k\ell ip} M^{qj} - e^{k\ell jp} M^{qi}).$$

Естественно, что структурные константы алгебры дуальных генераторов группы SO(4) имеют несколько более сложный вид, чем структурные константы ASO(4) в форме (5). Выпишем также явный вид операторов Казимира группы SQ (4), которые коммутируют со всеми генераторами M_{ij} и дуальными генераторами $\bar{M}_{k\ell}$. Эти операторы можно записать в виде

$$F_0(M)=\frac{1}{2}c^{ik}c^{j\ell}M_{ij}M_{k\ell}=\frac{1}{2}M_{ij}M^{ij}=\frac{1}{2}\bar{M}_{ij}\bar{M}^{ij},$$
$$E_0(M)=\frac{1}{4\sqrt{\epsilon_0}}e^{ijk\ell}M_{ij}M_{k\ell}=\frac{1}{2}M_{ij}\bar{M}^{ij}=\frac{1}{2}\bar{M}_{ij}M^{ij}. \qquad (10)$$

Ниже покажем, каким образом можно разложить алгебру группы движений произвольной однородной четырехмерной квадратичной формы на прямое произведение двух подалгебр при соблюдении ковариантной записи всех формул. При этом разложение ASO(4) и алгебры группы Лоренца окажутся некоторыми частными случаями этого общего разложения ASQ(4).

АЛГЕБРА ГРУППЫ SQ(4) И ЕЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Пусть в рассматриваемом четырехмерном пространстве с метрикой c_{ik} задан произвольный постоянный единичный контравариантный вектор n^i $(c_{ik}n^in^k=n_in^i=1)$. При помощи этого единичного вектора, постоянного метрического тензора c_{ik} $(c^{j\ell})$ и полностью антисимметричного тензора $e^{ijk\ell}$ можно образовать из антисимметрических тензорных операторов M_{pq}, представляющих собой генераторы группы SQ(4), один векторный оператор T_i и один псевдовекторный оператор S^i следующим образом:

$$T^i=c^{ip}M_{pq}n^q,\quad T_i=c_{ik}T^k=M_{ik}n^k, \qquad (11)$$

$$S^i=\frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0}}e^{ipqr}M_{pq}n_r,\quad S_i=c_{ik}S^k=\frac{1}{2}\sqrt{\epsilon_0}\,e_{ipqr}M^{pq}n^r. \qquad (12)$$

Коэффициент $(\epsilon_0)^{-1/2}$ в (12) введен из соображений удобства, чтобы сохранить некоторую симметрию всех формул (см. приложение). Конечно, в зависимости от значения ϵ_0 псевдовектор S^i может быть действительным или чисто мнимым, что, однако, с формальной точки зрения не имеет значения. Более подробное обсуждение этого обстоятельства приводится в заключении.

Из определения T^i и S^i в (11) и (12) непосредственно видно, что имеет место

$$c_{ik}T^in^k=c_{ik}S^in^k\equiv 0.$$

Это означает, что векторы T^i и S^i перпендикулярны к единичному вектору n^k, и, таким образом, при заданном n^k только три компоненты T^i и три компоненты S^i являются независимыми. В конечном итоге шесть независимых компонент антисимметрического тензора M_{pq} заменяются шестью независимыми составляющими векторов T^i и S^i.

Чтобы найти явное выражение генераторов M_{pq} через векторные генераторы T^i и S^i, достаточно вычислить выражение

$$\sqrt{\epsilon_0}\, e_{ijk\ell}\; S^k n^\ell = \frac{1}{2} e_{ijk\ell}\; e^{kpqr} M_{pq} n_r n^\ell = M_{ij} + n_i T_j - n_j T_i \,.$$

Отсюда получаем явный вид генераторов M_{ij}:

$$M_{ij} = T_i n_j - T_j n_i + \sqrt{\epsilon_0}\, e_{ijk\ell}\, S^k n^\ell \,. \tag{13}$$

Отметим, что генераторы M_{ij} зависят от составляющих единичного вектора n^k и компонент векторов T^k и S^k линейным образом. Теперь, зная коммутационные соотношения для операторов M_{ij} (5), без особого труда можно найти коммутационные соотношения между операторами T^i и S^j, то есть построить алгебру этих операторов. В результате получаем

$$\begin{aligned} [\,T^i, T^j\,] = [\,S^i, S^j\,] = i\sqrt{\epsilon_0}\; c^{ik} c^{j\ell}\; e_{k\ell pq} S^p n^q \,, \\ [\,T^i, S^j\,] = [\,S^i, T^j\,] = i\sqrt{\epsilon_0}\; c^{ik} c^{j\ell}\; e_{k\ell pq} T^p n^q \,. \end{aligned} \tag{14}$$

Отметим ковариантную запись алгебры (14), что связано с наличием единичного вектора n^k. Алгебру операторов (14) можно, однако , еще дальше упростить, если ввести два векторных оператора Q^i_+ и Q^i_- следующим образом*:

$$Q^i_\pm = \frac{1}{2}(T^i \pm S^i) = \frac{1}{2}\Big(c^{ip} M_{pq} n^q \pm \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0}}\, e^{ipqr} M_{pq} n_r\Big)\,. \tag{15}$$

Очевидно, что все составляющие операторов $Q^i_\pm$ также не являются независимыми, поскольку по-прежнему имеет место условие перпендикулярности:

---

*Индексы "±" в (15) и последующих формулах не связаны с контравариантностью и ковариантностью соответствующих величин и поэтому могут быть верхними или нижними. Будем их писать там, где имеется у тензорных величин свободное место, например, $Q^i_\pm$ или $Q^\pm_i$. В случае смешанных тензоров будем эти индексы помещать в скобки, например $N^{ij}_{k\ell}(\pm)$.

$$c_{ik}\, Q^i_+ n^k = c_{ik}\, Q^i_- n^k = 0.$$

Отметим также, что для $\epsilon_0 = -1$ (группа Лоренца) операторы $Q^i_\pm$ становятся взаимно комплексно сопряженными. Теперь, как нетрудно убедиться, при помощи коммутационных соотношений (14) алгебра группы движений произвольной однородной четырехмерной квадратичной формы принимает вид

$$[\, Q^i_\pm\, , Q^j_\pm \,] = \pm i \sqrt{\epsilon_0}\, c^{ik}\, c^{j\ell}\, e_{k\ell pq}\, Q^p_\pm n^q ,$$

$$[\, Q^i_\pm\, , Q^j_\mp \,] = 0 . \qquad (16)$$

Формулы (16) означают, что ASQ(4) в общем случае распадается на две подалгебры. Формально это разложение можно записать в виде

$$ASQ(4) = ASQ_+(4) \otimes ASQ_-(4) \qquad (17)$$

и утверждать, что в общем случае алгебра группы SQ(4) является прямым произведением двух подалгебр. При этом необходимо отметить, что в правой части соотношения (17) приведены алгебры групп $SQ_\pm(4)$, а не групп $SQ_\pm(3)$, как бы это следовало, если бы мы исходили из аналогии разложения алгебры группы SO(4) в записи (7). Для этого есть по крайней мере два основания. Во-первых, группы $SQ_\pm(4)$, об алгебрах которых идет речь, действуют в одном и том же четырехмерном пространстве, хотя их действие имеет, конечно, некоторый специфический характер. Во-вторых, размерности алгебр групп $SQ_\pm(4)$ в общем случае не являются трехмерными, как это следовало бы из предположения, что это алгебры некоторых трехмерных групп SQ(3)*. В связи с вышесказанным остается открытым вопрос о том, насколько обоснованной является даже в случае ASO(4) запись разложения этой алгебры в виде (7).

Чтобы более наглядно продемонстрировать утверждения предыдущего абзаца, введем наряду с генераторами M_{ij} в форме (13) два набора операторов $M^\pm_{ij}$ следующим образом:

$$M^\pm_{ij} = (c_{ik}\, c_{j\ell} - c_{i\ell}\, c_{jk} \pm \sqrt{\epsilon_0}\, e_{ijk\ell}\,)\, Q^k_\pm n^\ell . \qquad (18)$$

---

*Размерность алгебры группы движений произвольной однородной трехмерной квадратичной формы SQ(3) равна трем [7].

Умножая соотношение (18) на соответствующие множители, получаем

$$Q^i_\pm = c^{ip} M^\pm_{pq} n^q , \quad Q^i_\pm = \pm \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0}} e^{ipqr} M^\pm_{pq} n_r .$$

Так как операторы $Q^k_\pm$ выражаются через генераторы M_{pq} посредством (15), то в конечном итоге операторы $M^\pm_{ij}$ должны выражаться также через генераторы M_{pq} (и должна исчезнуть их зависимость от произвольного единичного вектора n^k).

Из (18) и (15) имеем

$$M^\pm_{ij} = \frac{1}{4}(\delta^{pq}_{ij} \pm \sqrt{\epsilon_0}\, e_{ijk\ell}\, c^{kp} c^{\ell q}) M_{pq} = \frac{1}{2} N^{pq}_{ij}(\pm) M_{pq}. \qquad (19)$$

В формулах (19) введены два нильпотентных оператора $N^{pq}_{ij}(\pm)$, антисимметрических как по верхним, так и по нижним индексам:

$$N^{pq}_{ij}(\pm) = N^{qp}_{ji}(\pm) = -N^{qp}_{ij}(\pm) = -N^{pq}_{ji}(\pm) = \frac{1}{2}(\delta^{pq}_{ij} \pm \sqrt{\epsilon_0}\, e_{ijk\ell}\, c^{kp} c^{\ell q}),$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} N^{pq}_{ij}(\pm) N^{k\ell}_{pq}(\pm) = N^{k\ell}_{ij}(\pm), \\ &\frac{1}{2} N^{pq}_{ij}(\pm) N^{k\ell}_{pq}(\mp) = 0. \end{aligned} \qquad (20)$$

Из явного вида $M^\pm_{ij}$ (19) следует простая связь генераторов M_{ij} с этими операторами:

$$M_{ij} = M^+_{ij} + M^-_{ij}. \qquad (21)$$

Формулы (19) и (21) показывают, что операторы $M^\pm_{ij}$ имеют по шесть составляющих, однако о количестве независимых компонент каждого из операторов M^+_{ij} и M^-_{ij} в отдельности нельзя говорить. Специальная конструкция операторов $M^\pm_{ij}$ (а также их действие) приводит к тому, что нельзя говорить об определенной размерности каждой из подалгебр $ASQ_\pm(4)$ в отдельности, можно говорить только об определенной размерности $ASO(4)$, которая остается равной шести.

Кроме соотношений (20) существует целый ряд полезных соотношений, которым удовлетворяют нильпотентные операторы $N^{pq}_{ij}(\pm)$, что в конечном итоге упрощает вычисления с операторами $M^{\pm ij}_{ij}$. Выпишем здесь некоторые из них:

$$c_{mp} N^{mn}_{ij}(\pm) N^{pq}_{k\ell}(\pm) = \frac{1}{2} c_{ia}\, c_{jb}\, N^{ab}_{k\ell}(\pm)\, c^{nq} +$$

$$+\frac{1}{2}[\, c_{ik}\, N^{nq}_{j\ell}(\pm) + c_{j\ell}\, N^{nq}_{ik}(\pm) - c_{i\ell}\, N^{nq}_{jk}(\pm) - c_{jk}\, N^{nq}_{i\ell}(\pm)\,],$$

$$\frac{1}{2} c_{mp} c_{nq} N^{mn}_{ij}(\pm)\, N^{pq}_{k\ell}(\pm) = c_{ia}\, c_{jb}\, N^{ab}_{k\ell}(\pm),$$

$$\frac{1}{4\sqrt{\epsilon_0}}\, e^{ijk\ell}\, N^{mn}_{ij}(\pm)\, N^{pq}_{k\ell}(\pm) = \pm c^{ma} c^{nb} N^{pq}_{ab}(\pm), \tag{22}$$

$$\frac{1}{2} c^{ik}\, c^{j\ell}\, N^{mn}_{ij}(\pm)\, N^{pq}_{k\ell}(\mp) = \frac{1}{4\sqrt{\epsilon_0}}\, e^{ijk\ell}\, N^{mn}_{ij}(\pm)\, N^{pq}_{k\ell}(\mp) = 0.$$

Если теперь воспользоваться соотношениями (22) для $N^{pq}_{ij}(\pm)$, то из коммутационных соотношений для ASQ(4) (5) легко получить явную форму подалгебр $ASQ_{\pm}(4)$. Коммутационные соотношения этих подалгебр имеют следующий простой вид:

$$[\, M^{\pm}_{ij}\,, M^{\pm}_{k\ell}\,] = i\,(c_{ik}\, M^{\pm}_{j\ell} + c_{j\ell}\, M^{\pm}_{ik} - c_{i\ell}\, M^{\pm}_{jk} - c_{jk}\, M^{\pm}_{i\ell}\,),$$

$$[\, M^{\pm}_{ij}\,, M^{\mp}_{k\ell}\,] = 0. \tag{23}$$

Выпишем, наконец, также явные формулы для инвариантных операторов, которые можно построить из операторов $M^{\pm}_{ij}$ или $Q^{i}_{\pm}$. После несложных вычислений имеем

$$F_0(M^{\pm}) = \frac{1}{2} c^{ik}\, c^{j\ell}\, M^{\pm}_{ij}\, M^{\pm}_{k\ell} = c_{pq}\, Q^{p}_{\pm}\, Q^{q}_{\pm} = \frac{1}{2}[\, F_0(M) \pm E_0(M)],$$

$$F_0(M^{\pm}, M^{\mp}) = \frac{1}{2} c^{ik}\, c^{j\ell}\, M^{\pm}_{ij}\, M^{\mp}_{k\ell} = c_{pq}\, Q^{p}_{\pm} Q^{q}_{\mp} = 0,$$

$$E_0(M^{\pm}) = \frac{1}{4\sqrt{\epsilon_0}}\, e^{ijk\ell}\, M^{\pm}_{ij}\, M^{\pm}_{k\ell} = \pm c_{pq}\, Q^{p}_{\pm} Q^{q}_{\pm} = \pm\frac{1}{2}[\, F_0(M) \pm E_0(M)], \tag{24}$$

$$E_0(M^{\pm}, M^{\mp}) = \frac{1}{4\sqrt{\epsilon_0}}\, e^{ijk\ell}\, M^{\pm}_{ij}\, M^{\mp}_{k\ell} = \pm c_{pq}\, Q^{p}_{\pm} Q^{q}_{\mp} = 0.$$

Из формул (24) непосредственно следует, что имеет место

$$F_0(M^{\pm}) = \pm E_0(M^{\pm}).$$

Это означает, что количество независимых операторов Казимира после разложения ASQ(4) на две подалгебры, построенные на операторах $M^{\pm}_{ij}$, сохраняется и равно двум. Таким образом, наряду с системой двух операторов Казимира (10) для группы SQ(4) мы можем выбрать также эквивалентную систему инвариантных операторов $F_0(M^{+})$ и $F_0(M^{-})$.

Нильпотентные операторы $N_{ij}^{pq}(\pm)$ (20) позволяют определить в четырехмерном пространстве R_4 постоянный оператор дуальности D_{ij}^{pq} следующим образом:

$$D_{ij}^{pq} = N_{ij}^{pq}(+) - N_{ij}^{pq}(-) = \sqrt{\epsilon_0}\, e_{ijk\ell}\, c^{kp} c^{\ell q} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} e^{pqrs} c_{ri} c_{sj} . \quad (25)$$

Так как имеет место

$$\frac{1}{2} D_{ij}^{pq} D_{pq}^{k\ell} = \frac{1}{2} [N_{ij}^{pq}(+) - N_{ij}^{pq}(-)][N_{pq}^{k\ell}(+) - N_{pq}^{k\ell}(-)] = \delta_{ij}^{k\ell} ,$$

то собственные значения оператора дуальности (15) равны ± 1. Операторы $M_{ij}^{\pm}$, введенные формулой (19), являются именно операторами с определенной дуальностью в связи с тем, что выполняется тождество

$$\frac{1}{2} D_{ij}^{pq} M_{pq}^{\pm} = \pm M_{ij}^{\pm} . \quad (26)$$

Соотношение (26) позволяет теперь выяснить смысл индексов "$\pm$" у величин этого раздела. Они непосредственно связаны со значениями дуальности величин, которые обозначены этими индексами.

Исходя из определения оператора дуальности (25), можно преобразование (9) в пространстве генераторов M_{ij} записать как

$$\bar{M}_{ij} = \frac{1}{2} D_{ij}^{pq} M_{pq} , \quad M_{ij} = \frac{1}{2} D_{ij}^{pq} \bar{M}_{pq} .$$

Два способа поднятия (опускания) индексов у антисимметрических тензоров второго ранга в четырехмерном пространстве связаны именно с возможностью определения в этом пространстве преобразования дуальности. Переход к операторам $M_{ij}^{\pm}$, которые обладают определенной дуальностью, позволяет как раз устранить произвол в поднятии (опускании) индексов, так как имеет место

$$\bar{M}_{ij}^{\pm} = \pm M_{ij} , \quad \bar{M}_{\pm}^{ij} = \pm M_{\pm}^{ij} .$$

В заключение этого раздела можно сформулировать утверждение, что разложение ASQ(4) в общем случае на две подалгебры (17) связано именно с возможностью введения в алгебру группы SQ(4) генераторов $M_{ij}^{\pm}$, которые обладают определенной дуальностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в работе продемонстрирован некоторый общий подход к четырехмерным пространствам с постоянной метрикой и к алгебрам соответствующих групп движений этих пространств. Показано, как в общем случае шестимерную алгебру группы движений произвольной четырехмерной однородной квадрики можно разложить на прямое произведение двух подалгебр (формулы (16) и (23)). Возможность разложения ASQ(4) непосредственно связана с существованием дуальности в четырехмерных пространствах. Единый подход к исследованию четырехмерных квадрик позволяет на всех этапах правильно использовать тензорные обозначения всех величин, а тем самым и тензорное исчисление как таковое. Если в формуле (13) для M_{ij} выбрать единичный вектор n^k в форме (0, 0, 0, 1), то получаем шесть операторов*:

$$M_{\alpha\beta} = \sqrt{\epsilon_0}\, e_{\alpha\beta\gamma 4} S^{\gamma} = \sqrt{\epsilon_0}\, e_{\alpha\beta\gamma} S^{\gamma}, \quad M_{\alpha 4} = T_{\alpha}, \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3,$$

на которых можно построить алгебру группы четырехмерных вращений SO(4) ($\epsilon_0 = 1$) или алгебру группы Лоренца SO(1,3) ($\epsilon_0 = -1$) в форме, обычно приводимой в физической литературе. Указанный выше выбор единичного вектора с общетеоретической точки зрения (даже в случае SO(4) или SO(1,3)) ничем не оправдан.

По-видимому, следовало бы также остановиться на вопросе о физическом значении вектора n^k. Здесь, однако, нет возможности уделять детальное внимание этой проблеме. Скажем только кратко, что в определенных физических задачах, имеющих дело с симметрией группы SQ(4), условный смысл этого вектора можно найти или определить. Однако вряд ли можно найти какой-то общий физический смысл этого вектора, поскольку он только вспомогательный, ведь,как показано в данной работе, без него можно обойтись и осуществить разложение ASQ(4) при помощи двух наборов генераторов $M^{\pm}_{ij}$ с определенными дуальностями.

В данной работе приведена только часть результатов, которые связаны с рассмотрением преобразований общей четырехмерной квадрики. При помощи формализма, присущего алгебрам, здесь рассмотрена именно ASQ(4). Необходимо, однако, аналогичным образом, то есть в соответствии с результатами данной работы,рассмотреть шестимерное групповое пространство группы SQ(4) при соответствующей параметризации матрицы преобразований $t^i_k(u)$ этой группы. Необходимо также найти все геометрические характеристики (метрику, тензор Римана, кривизну и т.п) этого пространства. Естественно, что при этом необходимо найти также конкретную реализацию приведенной здесь шестимерной группы ASQ(4), построить представления группы SQ(4) (точнее, всех ее ветвей, определяемых системой инвариантов постоянной метри-

---

*Предполагается, что одновременно произведена диагонализация квадратичной формы таким образом, что $c_{44} = 1$.

ки c_{ik}), определить собственные значения операторов Казимира группы SQ(4) и т.д.

Следует особо подчеркнуть, что результаты данной работы имеют непосредственное отношение как к группе Лоренца, так и к группе Пуанкаре /8,9/. Конечно, все эти задачи выходят далеко за цели и рамки данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Аналитические выражения для определителей и матриц в четырехмерном пространстве

В теоретической физике часто имеем дело с постоянными матрицами и соответствующими определителями в четырехмерном пространстве. Для вычислений очень удобно иметь в распоряжении аналитические выражения для четырехмерных определителей и связь между контравариантными и ковариантными постоянными матрицами. Выпишем сначала выражение для определения c_0 от постоянного ковариантного метрического тензора $c_{ik} = c_{ki}$*. В разных учебниках по алгебре приводится выражение для такого определителя в виде

$$c_0 = \det|c_{ik}| = \epsilon^{abcd} c_{a1} c_{b2} c_{c3} c_{d4}, \qquad (\text{П}.1)$$

где ϵ^{abcd} есть полностью антисимметрический контравариантный тензор в четырехмерном пространстве со значениями ± 1 в зависимости от четности перестановки его индексов или 0, если его индексы не соответствуют никакой перестановке. Выражение для c_0, однако, не является наиболее общим, так как в нем есть фиксированная перестановка (1, 2, 3, 4), и с точки зрения тензорного анализа оно не пригодно. Следуя трехмерному случаю /10/, определим выражение для определителя в четырехмерном случае в виде

$$c_0 = \frac{1}{4!} \epsilon^{abcd} \epsilon^{ijk\ell} c_{ai} c_{bj} c_{ck} c_{d\ell}, \qquad (\text{П}.2)$$

из которого видно, что при преобразованиях коэффициентов как тензоров определитель c_0 действительно является инвариан-

---

*Многие из последующих формул верны не только для симметрических матриц, но и для антисимметрических матриц или же матриц без определенной симметрии.

том. Формулу (П.1) можно, однако, прямо обобщить для любой перестановки вторых индексов. Очевидно, имеет место

$$c_0\,\epsilon_{ijk\ell} = \epsilon^{abcd}\, c_{ai}\, c_{bj}\, c_{ck}\, c_{d\ell}\,. \tag{П.3}$$

Отсюда при помощи свертки левой и правой сторон формулы (П.3) с тензором $\epsilon^{ijk\ell}$ немедленно получаем выражение (П.2) для c_0. Введем теперь вместо действительных полностью асимметрических ковариантного и контравариантного тензоров $\epsilon_{ijk\ell}$ и $\epsilon^{ijk\ell}$ некоторые новые "нормированные" тензоры $e_{ijk\ell}$ и $e^{ijk\ell}$ следующим образом:

$$e_{ijk\ell} = \sqrt{|c_0|}\,\epsilon_{ijk\ell}\,, \qquad e^{ijk\ell} = \frac{1}{\sqrt{|c_0|}}\,\epsilon^{ijk\ell}\,.$$

Тогда формулу (П.3) можно переписать в виде

$$\sqrt{\epsilon_0}\, e_{ijk\ell} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\, e^{abcd}\, c_{ai}\, c_{bj}\, c_{ck}\, c_{d\ell}\,, \tag{П.4}$$

где $\epsilon_0 = c_0/|c_0| = \pm 1$ есть знак определителя c_0. Множители $\sqrt{\epsilon_0}$ и $1/\sqrt{\epsilon_0}$ в случае $\epsilon = -1$ становятся чисто мнимыми, и именно они ответственны за появление комплексных чисел в формулах, которые первоначально касались действительных величин.

Если определить постоянную контравариантную матрицу c^{ij} как матрицу, обратную матрице c_{ik}, которая удовлетворяет соотношению $c_{ik}c^{ij} = \delta^j_k$, то из (П.4) получаем

$$\sqrt{\epsilon_0}\, e_{ijk\ell}\, c^{ai} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\, e^{abcd}\, c_{bj}\, c_{ck}\, c_{d\ell}\,. \tag{П.5}$$

После свертки обеих сторон соотношения (П.5) с тензором $e^{pjk\ell}$ получаем для обратной матрицы c^{ap} явное аналитическое выражение

$$c^{ap} = \frac{1}{3!\,\epsilon_0}\, e^{abcd}\, e^{pqrs}\, c_{bq}\, c_{cr}\, c_{ds} = \frac{1}{6\,c_0}\,\epsilon^{abcd}\epsilon^{pqrs}\, c_{bq}\, c_{cr}\, c_{ds}\,. \tag{П.6}$$

Формула (П.4), или выражение (П.6), для элементов обратной матрицы к матрице c_{ik} позволяет получить целый ряд полезных соотношений между разными произведениями тензорных величин c_{ik}, $c^{j\ell}$, $e_{ijk\ell}$ и e^{abcd}. Приведем их здесь без вывода:

$$\sqrt{\epsilon_0}\, e_{ijk\ell}\, c^{ai}\, c^{bj} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\, e^{abcd}\, c_{ck}\, c_{d\ell}\,,$$

$$c^{ai}c^{bj} - c^{aj}c^{bi} = \frac{1}{2\epsilon_0}e^{abcd}e^{ijk\ell}\, c_{ck}c_{d\ell}\,,$$

$$c_{ai}c_{bj} - c_{aj}c_{bi} = \frac{1}{2}\epsilon_0\, e_{abcd}e_{ijk\ell}\, c^{ck}c^{d\ell}\,,$$

$$\sqrt{\epsilon_0}\, e_{ijk\ell}\, c^{ai}c^{bj}c^{ck} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}e^{abcd}c_{d\ell}\,,$$

$$c_{ai} = \frac{\epsilon_0}{6}e_{abcd}e_{ijk\ell}\, c^{bj}c^{ck}c^{d\ell}\,,$$

$$\epsilon_0\, e_{abcd}e_{ijk\ell}\, c^{ai}c^{bj}c^{ck}c^{d\ell} = 4!$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. - Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965.
2. Фаддеев Д.К. - Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
3. Turnbull H.W. - The Theory of Determinants, Matrices and Invariants. N.Y.. Dover Publications, 1960.
4. Барут А., Рончка Р. - Теория представлений групп и ее применения. М.: Мир, 1980, т.1.
5. Гюрши Ф. - В сб.: Теория групп и элементарные частицы. М.: Мир, 1967, с.25.
6. Любарский Г.Я. - Теория групп и ее применения в физике. М.: ГИФМЛ, 1958.
7. Lukáč I. - In.: Proceedings of the Conference Hadron Structure´87, Physics and Applications, v.14, Bratislava, Slovak Academy of Sciences, 1988, p.357.
8. Федоров Ф.И. - Группа Лоренца. М.: Наука, 1979.
9. Широков Ю.М. - ЖЭТФ, 1957, т.33, № 4(10), с.861; 1957, т.33, № 5(11), с.1196; 1957, т.33, № 5(11), с.1208; 1958, т.34, № 3, с.717.
10. Мак-Коннел А.Дж. - Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: ГИФМЛ, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 февраля 1990 года.